

# Lead kompenzator

Predrag Pejović

06.06.2021, 23:22

Namena *lead* kompenzatora je da obezbedi povećanje margine faze bez promene frekvencije jediničnog pojačanja. U tom cilju se u sistem kaskadno vezuje element sa funkcijom prenosa

$$G_{lead}(s) = G_{lead0} \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (1)$$

gde je  $\omega_z < \omega_p$ . U slučaju da je  $\omega_z < 100 \omega_p$ , amplitudska i fazna karakteristika *lead* kompenzatora su prikazane na slikama 1 i 2, na kojima su plavom bojom prikazane asimptotske (Bodeove) karakteristike, a narandžastom bojom egzaktno krive. Vidi se da *lead* kompenzator u oblasti  $\omega_z/10 < \omega < 10\omega_p$  unosi fazno prednjačenje (*phase lead*, odatle mu potiče ime)  $0 < \varphi < 90^\circ$ , ali i da modifikuje amplitudsku karakteristiku kružnog pojačanja (funkcije prenosa sistema u otvorenoj sprezi). Funkciju prenosa *lead* kompenzatora ćemo izborom povoljne vrednosti  $G_{lead0}$  prilagoditi uslovu da je pri maksimumu faznog prednjačenja koje kompenzator unosi, a koje se postavlja na frekvenciji jediničnog pojačanja, apsolutna vrednost funkcije prenosa kompenzatora jednaka jedan. Ovako kompenzator kada se poveže u sistem neće uticati na frekvenciju jediničnog pojačanja, za koju se pretpostavlja da je ranije postavljena u skladu sa željama projektanta sistema.

Za precizno postavljanje margine faze, Bodeove (asimptotske, aproksimativne) frekvencijske karakteristike nisu dovoljno tačne, što će biti ilustrovano na dijagramima. Ovaj zaključak dobija na značaju ako je uz mali napor moguće egzaktno modelovanje *lead* kompenzatora.

Fazna karakteristika koja odgovara usvojenoj funkciji prenosa *lead* kompenzatora je

$$\arg G_{lead}(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_z} - \arctan \frac{\omega}{\omega_p}. \quad (2)$$

Kada je rešenje problema poznato, lako je odabrati adekvatnu notaciju, pa će taj način izlaganja biti primenjen i u ovom slučaju. Iz za sada ne baš sasvim jasnih razloga, povoljno je da se  $\omega_z$  i  $\omega_p$  predstavu u funkciji neke centralne kružne frekvencije i parametra koji predstavlja razmaknutost  $\omega_z$  i  $\omega_p$ . Na ovaj način se postiže normalizacija, a korekcija faze će postati samo funkcija parametra razmaknutosti  $\omega_z$  i  $\omega_p$ . Kako se Bodeove karakteristike crtaju u logaritamskoj razmeri po frekvenciji, centralna frekvencija  $\omega_c$  na polovini rastojanja između  $\omega_z$  i  $\omega_p$  na logaritamskoj skali je

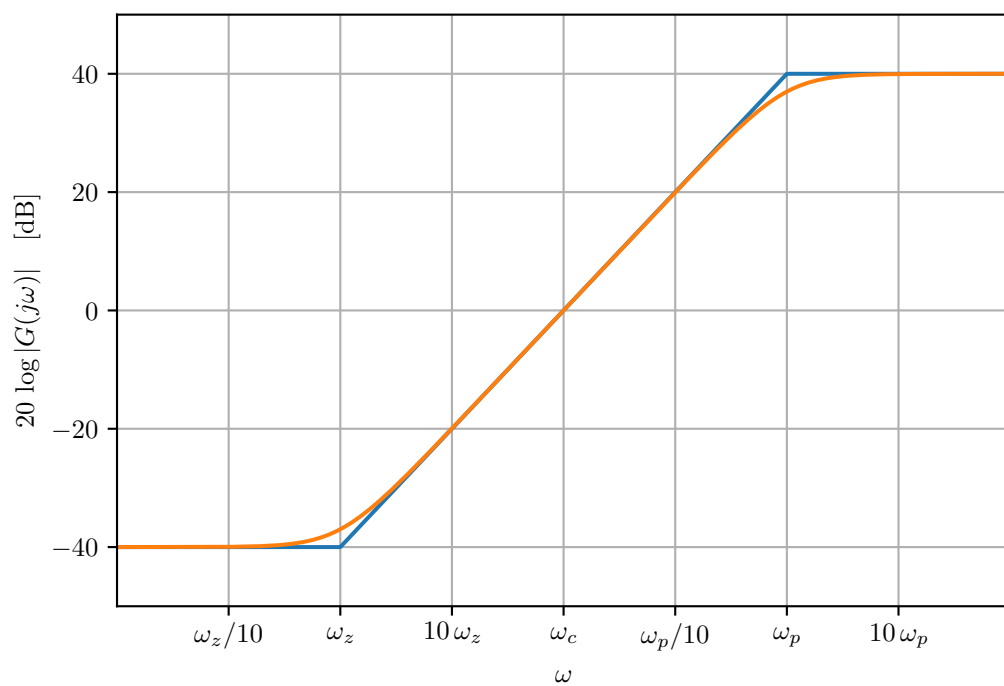
$$\log \omega_c = \frac{\log \omega_z + \log \omega_p}{2} \quad (3)$$

(da ne otvaramo sada pitanje jedinica mere, rešiće se u ovom slučaju samo od sebe posle antilogaritmovanja), što odgovara geometrijskoj sredini  $\omega_z$  i  $\omega_p$

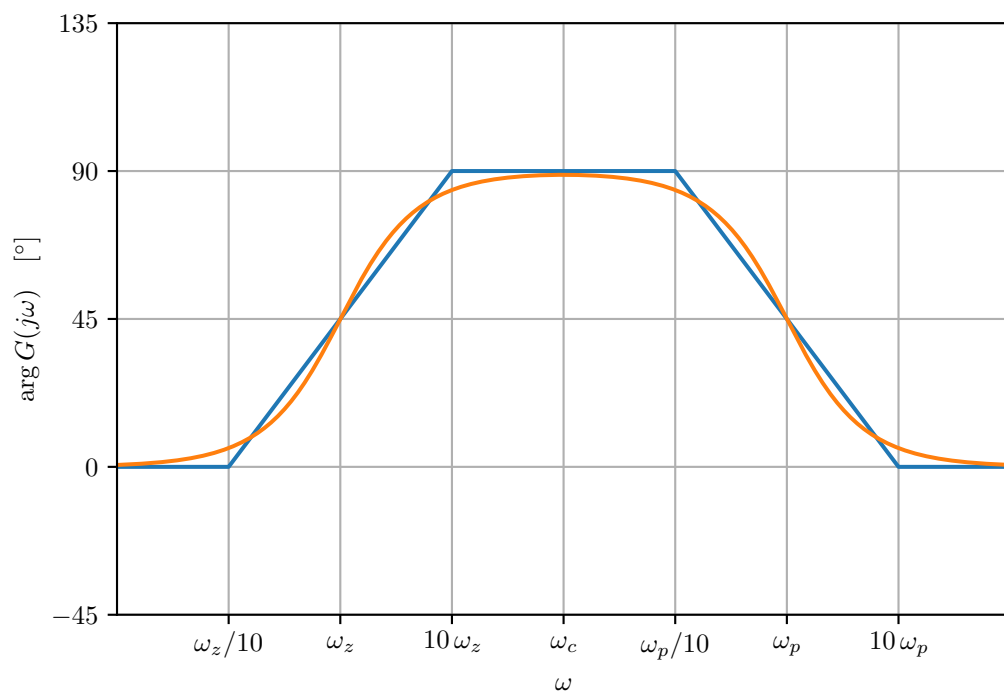
$$\omega_c \triangleq \sqrt{\omega_z \omega_p}. \quad (4)$$

Ako parametar razmaknutosti  $p$  definišemo kao

$$p \triangleq \frac{\omega_p}{\omega_c} \quad (5)$$



Slika 1: Amplitudska karakteristika  $G_{lead}(j\omega)$ .



Slika 2: Fazna karakteristika  $G_{lead}(j\omega)$ .

sledi da je

$$\omega_p = p \omega_c \quad (6)$$

i

$$\omega_z = \frac{\omega_c}{p}. \quad (7)$$

Sada se argument funkcije prenosa *lead* kompenzatora svodi na

$$\arg(G_{lead}(j\omega)) = \arctan \frac{p\omega}{\omega_c} - \arctan \frac{\omega}{p\omega_c}. \quad (8)$$

Kružna frekvencija  $\omega$  se u gornjoj jednačini javlja isključivo normalizovana sa  $\omega_c$ , pa je moguće smanjiti broj simbola uvođenjem

$$x \triangleq \frac{\omega}{\omega_c} \quad (9)$$

gde je  $x$  kružna frekvencija  $\omega$  normalizovana na  $\omega_c$ , posle čega je

$$\arg(G_{lead}(jx)) = \arctan(px) - \arctan\left(\frac{x}{p}\right). \quad (10)$$

Pitanja koja se prirodno postavljaju su pri kojoj vrednosti  $x$  funkcija  $\arg(G_{lead}(jx))$  dostiže svoj maksimum i koliki je taj maksimum? Izvod argumenta funkcije prenosa kompenzatora po normalizovanoj frekvenciji  $x$  se dobija kao

$$\frac{d}{dx} \arg(G_{lead}(jx)) = -\frac{p(p^2 - 1)(x^2 - 1)}{p^2 x^4 + (p^4 + 1)x^2 + p^2} \quad (11)$$

što je jednako nuli za  $x = 1$ , kada je

$$\max(\arg G_{lead}(jx)) = \arg G_{lead}(j1) = \arctan p - \arctan \frac{1}{p}. \quad (12)$$

Definišimo maksimum korekcije faze kao  $\varphi$ , pa je

$$\varphi(p) \triangleq \arctan p - \arctan \frac{1}{p} \quad (13)$$

što je samo funkcija parametra razmaknutosti polova  $p$ . Zavisnost  $\varphi(p)$  data jednačinom (13) je prikazana na slici 3 narandžastom linijom, dok je plavom linijom prikazana zavisnost koju predviđa Bodeova aproksimacija. Ista zavisnost  $\varphi(p)$  je na slici 4 prikazana sa logaritamskom podelom  $p$  ose, što je povoljno za vizuelizaciju imajući u vidu da se Bodeove frekvencijske karakteristike crtaju u logaritamskoj razmeri. Sa dijagrama se vidi da za  $p = 1$ , kada  $\omega_z = \omega_c = \omega_p$ , *lead* kompenzator ne unosi nikakvu korekciju faze,  $\varphi(1) = 0$ . U pvoj dekadi po  $p$ ,  $\varphi(p)$  naglo raste do približno  $78^\circ$  i ovo je oblast koja je od najvećeg interesa u primenama. Nakon prve dekade,  $\varphi(p)$  polako raste, konvergirajući ka asimptotskoj vrednosti od  $90^\circ$ .

Kako se *lead* kompenzator koristi da poveća marginu faze na frekvenciji jediničnog pojačanja, potrebno je da frekvenciji jediničnog pojačanja odgovara vrednost  $x = 1$ , odnosno da  $\omega_c$  bude postavljeno tako da bude jednako kružnoj frekvenciji jediničnog pojačanja. Kako kaskadno vezivanje kompenzatora ne bi promenilo frekvenciju jediničnog pojačanja, amplituda funkcije prenosa *lead* kompenzatora na  $j\omega_c$  treba da bude jednaka 1,

$$|G_{lead}(j\omega_c)| = G_{lead0} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}} = 1 \quad (14)$$

što se svodi na

$$G_{lead0} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_z}} = 1 \quad (15)$$

odakle je konačno

$$G_{lead0} = \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_p}} = \frac{1}{p}. \quad (16)$$

Nakon prikazanog izvođenja, funkcija prenosa *lead* kompenzatora dobija formu koja je pogodna za vizuelizaciju u procesu projektovanja

$$G_{lead}(s) = \frac{1}{p} \frac{1 + \frac{ps}{\omega_c}}{1 + \frac{s}{p\omega_c}} \quad (17)$$

gde je  $p$  parametar koji je sa željenom korekcijom faze povezan sa

$$\varphi = \arctan p - \arctan \frac{1}{p} \quad (18)$$

kako je prikazano na slikama 3 i 4 narandžastom linijom, dok plava linija predstavlja rezultat dobijen Bodeovom aproksimacijom i opravdava uvođenje egzaktnog računa. Za projektovanje kompenzatora je pogodnija invertovana forma u kojoj je  $p$  izraženo kao funkcija željene korekcije margine faze,

$$p = \tan \varphi + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}. \quad (19)$$

Posle algebarskih (uglavnom ne trigonometrijskih, od trigonometrije je potrebno samo  $\tan x = \sin x / \cos x$ ) transformacija (19) se svodi na za neke pogodniju (lepšu?) formu

$$p = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}}. \quad (20)$$

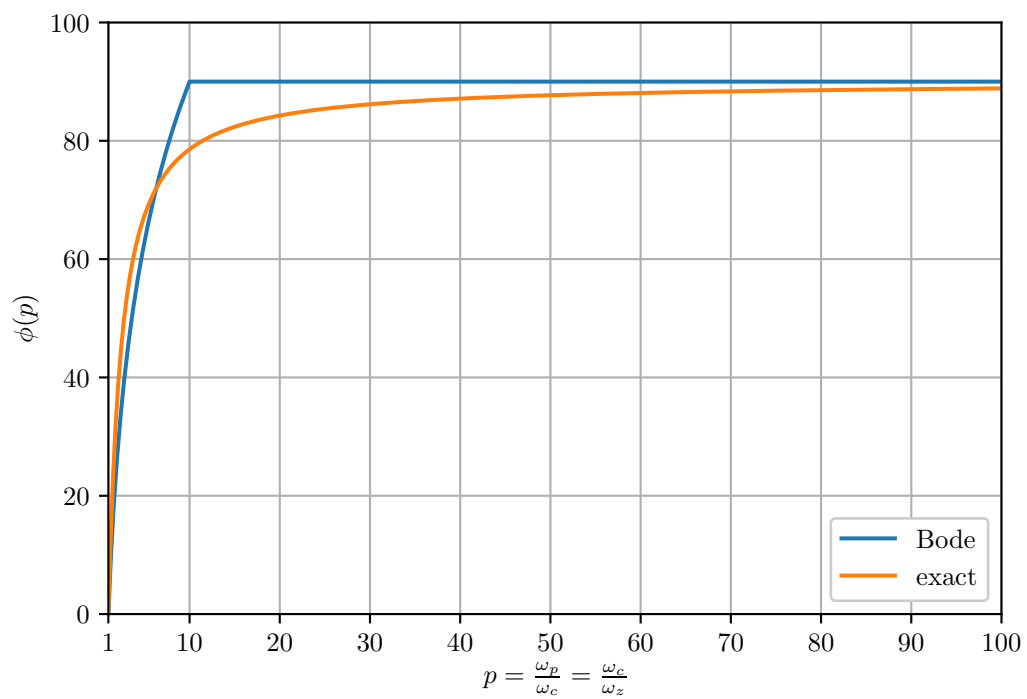
Na osnovu izvedenih jednačina, projektovanje *lead* kompenzatora na osnovu zadate frekvencije jediničnog pojačanja  $\omega_c$  i zahtevanog povećanja margine faze  $\varphi$  se izvodi u dva jednostavna koraka:

1. Prema jednačini (19) ili (20) se izračuna vrednost parametra razmaknutosti nule i pola  $p$ .
2. Realizuje se funkcija prenosa *lead* kompenzatora prema jednačini (17).

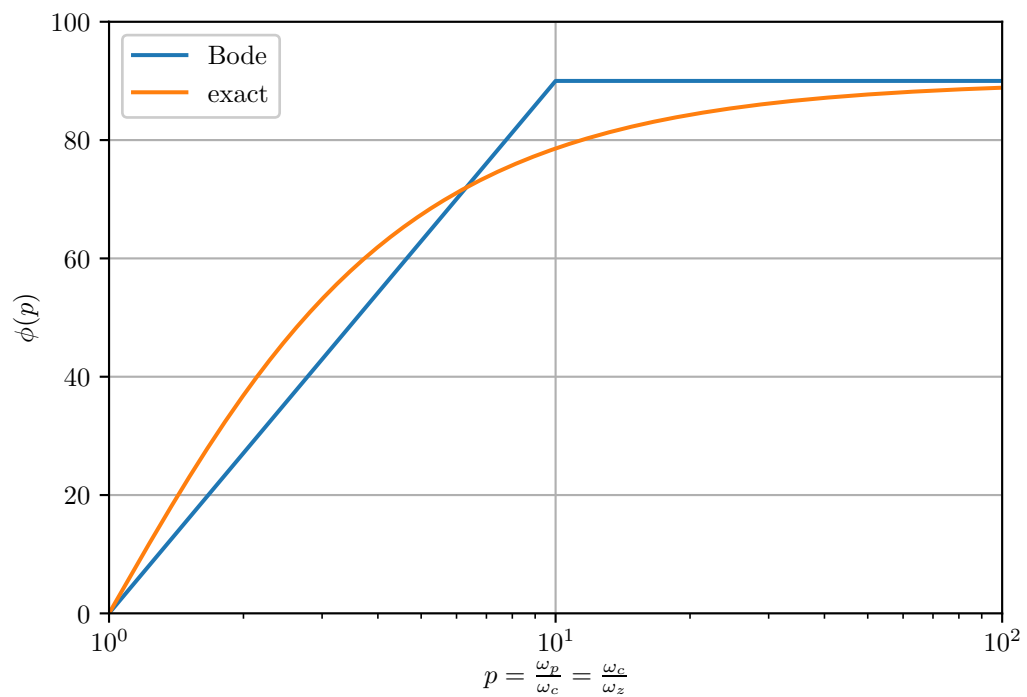
*Lead* kompenzator projektovan na opisani način održava frekvenciju jediničnog pojačanja neizmenjenom, popravljajući marginu faze, ali utiče i na funkciju prenosa sistema u otvorenoj sprezi (kružno pojačanje) i na ostalim frekvencijama. Ispod  $\omega_z/10$  *lead* kompenzator ne unosi značajnu promenu faze funkcije prenosa sistema u otvorenoj sprezi, ali utiče na amplitudu, smanjujući je približno za faktor

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{lead}(s) = \frac{1}{p} \quad (21)$$

jer  $p > 1$ . Smanjenje amplitude funkcije prenosa sistema u otvorenoj sprezi na niskim frekvencijama smanjuje efekte zatvaranja povratne sprege u smislu smanjenja greške stacionarnog stanja i smanjenja uticaja poremećaja na odziv sistema. Ovo je cena koja je plaćena za popravljajući margine faze, odnosno udaljavanje kružnog pojačanja sistema od tačke granične stabilnosti  $(-1, 0)$ . Kako bi se kompenzovali ovi negativni efekti uvođenja *lead* kompenzatora, biće uveden *lag* ili proporcionalno-integralni kompenzator koji treba da poveća kružno pojačanje na niskim frekvencijama. Doduše, *lag* kompenzator bi verovatno bio svakako uveden, kako bi se povećalo



Slika 3: Zavisnost  $\varphi(p)$ .



Slika 4: Zavisnost  $\varphi(p)$ .

kružno pojačanje na niskim frekvencijama i smanjila ili eliminisala greška stacionarnog stanja, čak i u slučaju da *lead* kompenzator nije potreban.

Na visokim frekvencijama, iznad  $10\omega_p$ , *lead* kompenzator ne unosi značajno pomeranje fazne karakteristike kružnog pojačanja, ali unosi povećanje amplitudske karakteristike od

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{lead}(s) = p \quad (22)$$

puta. Ukoliko je kružno pojačanje na razmatranim frekvencijama manje od 1, ova promena ne utiče na stabilnost sistema, ali povećava uticaj visokofrekvencijskih smetnji poput talasnosti izlaznog napona na frekvenciji prekidanja (*ripple*) i šuma.

U nekim situacijama postoji potreba da se margina faze smanji kako bi sistem dobio brži odziv. U tom slučaju se može primeniti *lag* kompenzator koji ima funkciju prenosa koja je recipročna (17)

$$G_{lag}(s) = p \frac{1 + \frac{s}{p\omega_c}}{1 + \frac{ps}{\omega_c}}. \quad (23)$$

Ovakav kompenzator ne utiče na frekvenciju jediničnog pojačanja, a unosi korekciju faze od  $-\varphi$ , gde je  $\varphi$  dato sa (20).

Na opisani način smo dobili dva kompenzatora kojima možemo da korigujemo marginu faze na frekvenciji jediničnog pojačanja u opsegu  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ . Ukoliko je potrebna veća korekcija faze, ovi kompenzatori se mogu vezivati na red, kaskadirati, pa je teorijski moguće postići bilo kakvu korekciju faze, odnosno zadati fazu kružnog pojačanja prilikom ulaska Nikvistove krive u jedinični krug.