14-amaliy mashg`ulot

Mavzu: Oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemalari asosida yechiladigan modellashtirish masalalari

Reja

1. Amaliy mashg`ulot uchun kerakli jihozlar
2. Nazariy ma`lumotlar
3. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushuncha
4. MatLab dasturida xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish
5. Amaliy qism
6. Amaliy topshiriqlar

Kerakli jihozlar. Matlab®/Simulink®dasturiy ta'minoti bilan ta'minlangan kompyuterlar va printerlar.

Nazariy ma`lumotlar

Differensial tenglamalar haqida umumiy tushuncha

Differensial tenglamalar va ularning sistemalari juda ko`p dinamik jarayonlarning matematik modellarini qurishda qo`llaniladi. Bunday differensial tenglamalar yoki ularning sistemalari yechimlari to`plami cheksiz bo`lib, yechimlar bir biridan o`zgarmas sonlarga farq qiladi. Yechimni bir qiymatli aniqlash uchun qo`shimcha tarzda boshlang`ich yoki chegaraviy shartlar qo`yiladi. Bunday shartlar soni differensial tenglama yoki ularning sistemasi tartibi bilan mos bo`lishi lozim. Qo`shimcha shartlarning berilishiga bog`liq holda differensial tenglamalarni quyidagi ikki turdagi masalaga ajratiladi:

- *Koshi masalasi* – qo`shimcha shart sifatida intervalning bitta nuqtasi (boshlang`ich nuqtasi) berilgan bo`lsa;
- *Chegaraviy masala* - qo`shimcha shart intervalning chegaralarida berilgan bo`lsa.

Differensial tenglamalar haqida umumiy tushuncha.

<u>1 – ta'rif</u>. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x, noma'lum y=f(x) funksiya va uning u', u'',.....,$u^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi.

Agar izlangan funksiya y=f(x) bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy differentsial tenglama, bir nechta o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lsa $u=U(x_1, x_2,...., x_n)$ xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

<u>2-ta'rif</u>. Differensial tenglamaning tartibi deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday y=f(x) funksiyaga aytiladi.

Birinchi tartibli differentsial tenglama umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F\ (x,y,\ y¢\ )=0 \qquad (2.1)$$

Agar bu tenglamani birinchi tartibli xosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, u holda

$$y¢\ =f(x,y) \qquad (2.2)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Odatda, (2.2) tenglama hosilaga nisbatan yechilgan tenglama deyiladi. (2.2) tenglama uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema o'rinli :

Teorema. Agar (2.2) tenglamada f(x,y) funksiya va undan y bo'yicha olingan df/dy xususiy hosila X0Y tekisligidagi (x_0,y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartnii qanoatlantiruvchi birgina y=j(x) yechimi mavjud.

$x=x_0$ da y(x) funksiya y_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi:

$$y(x_0)=y_0$$

4 – ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb bitta ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga bog'liq quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y=j(x,c)$$

funksiyaga aytiladi:

a) bu funksiya differensial tenglamani ixtiyoriy c da qanoatlantiradi;

b) $x=x_0$ da $y=y_0$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham shunday $c=c_0$ qiymat topiladiki, $y=j(x,c_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

5 – ta'rif. Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi F(x,y,c)=0 tenglik (1.1) differentsial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

6 – ta'rif. Ixtiyoriy c - o'zgarmas miqdorda $c=c_0$ ma'lum qiymat berish natijasida y=j(x,c) umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday $y=j(x,c_0)$ funksiya xususiy yechim deyiladi. $F(x,y,c_0)$ - xususiy integral deyiladi.

7-ta'rif. (2.1) differensial tenglama uchun dy/dx=c=const munosabat bajariladigan nuqtalarning geometrik o'rni berilgan differensial tenglamaning izoklinasi deyiladi.

Differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechish uchun MATLAB paketida quyidagi funksiyalar tashkil qilingan: *ode* 45(f, interval, X0, options), *ode* 23(f, interval, X0, options), *ode*113(f, interval, X0, options), *ode*15*s*(f, interval, X0, options), *ode* 23*s*(f, interval, X0, options), *ode* 23*t*(f, interval, X0, options), *ode* 23*tb*(f, interval, X0, options).

Bu funksiyalarning kirish parametrlari:

- ✓ f- vektor funksiya bo`lib, $x' = f(x, t)$ tenglamani hisoblash uchun qo`llanilgan;
- ✓ X0 - boshlang'ich shart vektori;
- ✓ interval- ikkita sondan iborat massiv bo`lib, differensial tenglama yoki sistemaning integrallash intervalini aniqlaydi;
- ✓ options- differensial tenglama yoki ularning sistemalarini yechishning borishini boshqarish parametri.

Barcha funksiyalar quyidagi natijalar chiqaradi:

- ✓ T massiv – yechim izlanayotgan to`rning koordinatalari.
- ✓ X matritsa – i – ustuni yechim vektorining Ti bo`lakdagi qiymati.

Ode 45 funksiyada to`rtinchi-beshinchi tartibli Runge-Kutta usuli, *ode* 23da ikkinchi – uchinchi tartibli Runge-Kutta usuli, *ode*113 funksiyasida esa Adams usuli kiritilgan.

Qattiq sistemalarni yechishga mo`ljallangan funsiyalar *ode*15*s* , ya'ni bu funksiyada Gir usuli kiritilgan. Rozenbrok usuli *ode* 23*s* funksiyasida, qattiq sistemaning yanada yuqori aniqlikdagi yechimini olish uchun *ode*15*s* funksiyasini qo`llash mumkin.

MatLab dasturida xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish

Differensial tenglamalar sistemasining "qattiq sistema" bo`lish ta'rifini keltiramiz. *n* - tartibli differensial tenglamalar sistemasi

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad (5.1)$$

qattiq sistema deyiladi [7], agar quyidagi shart o`rinli bo`lsa:

- ➢ B matrisa barcha xos sonlarining haqiqiy qismi musbat bo`lsa: $\mathrm{Re}(\lambda_k)<0$, $k=0,1,...,n-1$;

$\max_{0 \le k \le n-1} |\mathrm{Re}(\lambda_k)|$ son, katta bo`lsa.

- Sistemaning *qattiqlik soni* deb ataluvchi $s =$

$$\min_{1 \le k \le n} \mathrm{Re}(\lambda_k)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.2)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

(5.2) chiziqsiz differensial tenglamalar sistemasini qattiqlikka tekshirishda B matrisa rolida $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ xususiy hosilalar matrisasi ishlatiladi.

Uncha katta bo`lmagan qattiqlik soni bilan berilgan sistemalarni yechish uchun ode23t, shunga o`xshash sistemalarni baholash uchun ode23tb, funksiyalari xizmat qiladi.

Bu funksiyalarning qo`llanilishini aniq misollarda ko`ramiz.

5.1.-masala. Quyidagi chegaraviy masalani [2,25; 2] intervalda yeching:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = e^{\sin(t)}, \quad x(0,25) = -1, \quad x'(0,25) = 1. \qquad (5.3)$$

MATLAB funksiyalaridan foydalanish mumkin bo`lishi uchun tenglamani sistemaga keltiramiz. Buning uchun $y = \frac{dx}{dt}$ almashtirish bajaramiz va

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -4y - 13x + e^{\sin(t)}, \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \qquad (5.4)$$

tenglamalar sistemasiga ega bo`lamiz. Sistema uchun quyidagi

$$\begin{cases} y(0,25) = 1, \\ x(0,25) = -1, \end{cases} \qquad (5.5)$$

boshlang`ich shart o`rinli bo`lsin.

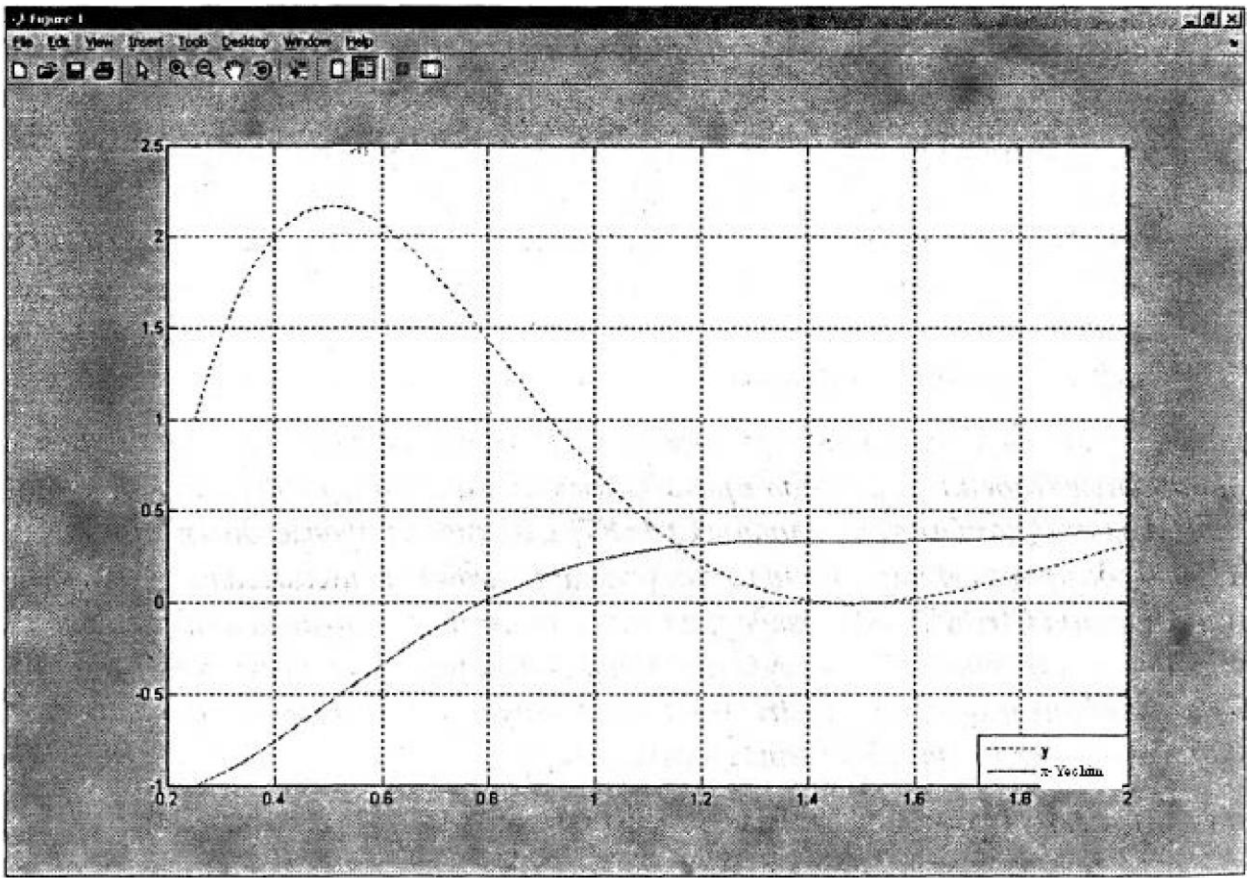
(5.4) sistemani hisoblash funksiyasini tuzamiz (2.8-listing). 2.9-listing da (5.4) tenglamani ode45 funksiyasi yordamida yechish tasvirlangan, yechim grafigi 32-rasmda keltirilgan.

5.1-listing.

```
function F=FF(t,x)
F=[-4*x(1)-13*x(2)+exp(t);      x(1)];
end
```

5.2-listing.

```
% boshlang`ich shart vektorini hosil qilamiz x0=[1,-1];
% Integrallash intervalini, ya'ni ikki sonli massivni
%           hosil           qilamiz
interval=[0.25 2];
% ode45 funksiyasiga murojaat qilamiz
[T,X]=ode45(@FF, interval, x0);
% grafik yechimni chiqarish
plot(T,X(:,1),':',T,X(:,2),'-');
legend("y", 'x - Yechim'); grid
on;
```



1-rasm. (5.4) sistemaning grafik yechimi.

Differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechish uchun mo`ljallangan boshqa funksiyalarga ham shu tarzda murojaat qilish mumkin. Differensial tenglamalarni yechishda qo`llaniladigan MATLAB funksiyalarini izchil o`rganish uchun paketning ma'lumotlar tizimiga [4] murojaat qilish zarur.

Mavzuga doir topshiriqlar

1. *x"=-2x' differensial tenglamani yechish?*
2. $() - = 6 +$ *differensial tenglamani yechish va yechimni tekshirish?*
3. $() - 8 = 5\,() +$ *differensial tenglamani yechish va yechimni tekshirish?*
4. $+ \quad + \quad + 1$ *ifodaning x bo'yicha differensalini toping?*
5. *Y=3x*^{3}*+4x*^{2}*+8x-48 ifodaning x bo'yicha differensalini toping?*
6. $\int^{()} \int \ (\quad + \quad)$ *ifodadan ikki marta (avval x, keyin y bo`yicha) aniq integralni hisoblang?*
7. $\int^{()} \int ((+) + 2)$ *ifodadan ikki marta (avval x, keyin y bo`yicha) aniq integralni hisoblang?*

Nazorat savollari

1) Dasturlash, m-fayllar va funksiyalar;

2) Dslove funksiyasining vazifasi nima?
3) Darajalar bo`yicha komplektlash funksiyasini ayting?
4) Oddiy differensial tenglamalar;
5) Birinchi tartibli ODT, Eyler metodi;
6) Runge-Kutta metodi;
7) ODT yechilmalari: ode23, ode45, ode113;
8) Ikkinchi tartibli ODTlar va Yuqori tartibli ODTlar;