

12-amaliy mashg'ulot

Mavzu: Ma'lumotlarni approksimatsiyalash. Eng kichik kvadratlar usuli

Reja

1. Amaliy mashg'ulot uchun kerakli jihozlar
2. Nazariy ma'lumotlar
3. Approksimatsiyalash tushunchasi va metodlari
4. Funksiyalarni berilgan oraliqlarda approksimatsiyalashga doir misollar
5. Amaliy qism
6. Amaliy topshiriqlar

Kerakli jihozlar. Matlab®/Simulink® dasturiy ta'minoti bilan ta'minlangan kompyuterlar va printerlar.

Nazariy ma'lumotlar

Approksimatsiya deganda bir funksiya (approksimatsiyalanuvchi) ni berilgan qiymatlari va ma'lum kriteriy asosida boshqa eng yaxshi yaqinlashuvchi funksiyaga almashtirish tushuniladi.

Bugungi kunda spectral analiz va signallarni qayta ishlash masalalari bir qancha qiyinchiliklar tug'dirmoqda. Signallarni ma'lum algoritmlarga nisbatan qayta ishlash, filtrlash, signallar aniqliligini tekshirish talab qilinadi. Bu masalalarni hal qilishda Matlab tizimi bizga amaliy yordam beradi. Eng kichik kvadratlar usuli yordamida signallarni approksimatsiyalash jarayonini Matlab tizimining polyfit funksiyasini qo'llagan holda kiruvchi ma'lumotlarga polinom yordamida yaqinlashish hamda polyval funksiyasini qo'llagan holda natijani vizuallashtirish va yaqinlashish xatoligini aniqlaymiz. Bir necha turdagi uzluksiz funksiyaga yaqinlashishning usullaridan biri polinomli yaqinlashishning eng kichik kvadratlar usulidir. Ma'lumotlar to'plami uchun quyidagi ifoda o'rinli bo'lib:

$$(y_i)_{i=1,2,\dots,N}$$

N chi darajali polinomni topish talab qiladi.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$$

Uning koeffitsiyentlari quyidagi minimizatsiya masalasini yechadi.

$$\min_{a_0, a_1, \dots, a_N} \sum_{i=1}^N (y_i - p(x_i))^2$$

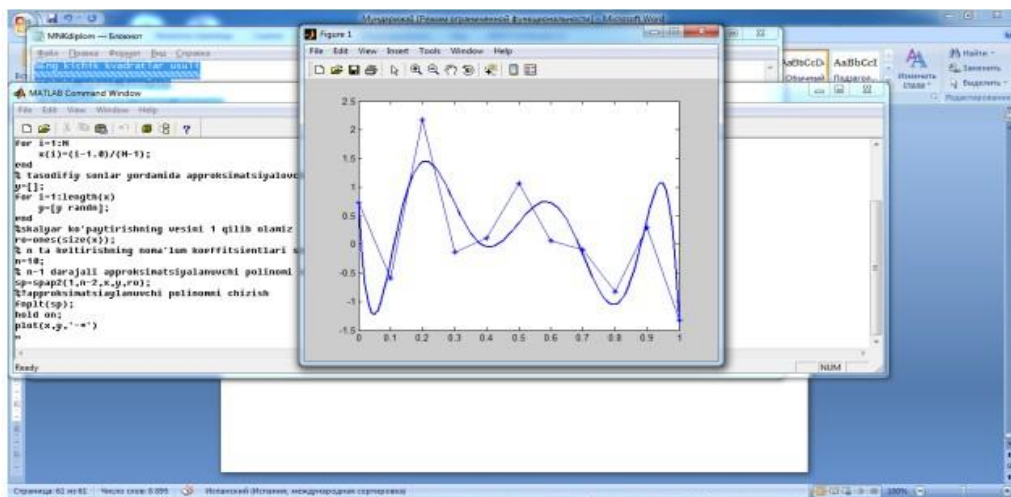
Eng kichik kvadratlar usuli yordamida signalni approksimatsiyalashni bir nechta usulda ko'rib chiqamiz.

1-usul

1) N ta nuqtaninig sonini aniqlash.

$$N=11;$$

- 2) Teng o'lchovli setka ko'rinishida approksimatsiyalash funksiyasining argumentlarini sikl yordamida aniqlaymiz. $for\ i=1:N\ x(i)=(i-1.0)/(N-1);$
end
- 3) Tasodifiy sonlar yordamida approksimatsiyalovchi funksiyani qiyamatlarini modellashtiramiz. $y=[];$ $for\ i=1:length(x)\ y=[y\ randn];$
end
- 4) Skalyar ko'paytirishning vesini 1 qilib olamiz. $ro=ones(size(x));$
- 5) n ta keltirishning noma'lum koeffitsientlari sonini aniqlash. $n=10;$
- 6) n-1 darajali approksimatsiyalanuvchi polinomi eng kichik kvadratni usulida qurish. $sp=spap2(1,n-2,x,y,ro);$
- 7) approksimatsiyalanuvchi polinomni chizish.
 $fnplt(sp);$
hold on;
 $plot(x,y,'-*');$



1-rasm. Eng kichik kvadratlar usuli yordamida kiruvchi signalni approksimatsiyalash.

2-usul

- 1) x va y massivlarda berilgan qiymatlarga polinomning 1chi, 3chi, 5chidarajalari bo'yicha yaqinlashish qiymatlarini topamiz. Buning uchun tizimga 2 ta x va y massivni kiritamiz.

$$x = [0.1\ 0.3\ 0.45\ 0.5\ 0.79\ 1.1\ 1.89\ 2.4\ 2.45];$$

$$y = [-3\ -1\ 0.9\ 2.4\ 2.5\ 1.9\ 0.1\ -1.3\ -2.6];$$

- 2) Kiruvchi argumentlar uchun polyfit funksiyasini qo'llab 1ch, 3ch, 5chidarajalar uchun koeffitsiyentlarini topamiz.

$$>> p1 = polyfit(x, y, 1)$$

$$p1 = -0.6191\ 0.6755$$

```
>> p3 = polyfit(x, y, 3) p3 =  
2.2872 -12.1553 17.0969 -4.5273
```

```
>> p5 = polyfit(x, y, 5)  
p5 = -6.0193 33.9475 -62.4220 35.9698 4.7121 -3.8631
```

va bundan polinom ko'phadlarini topamiz.

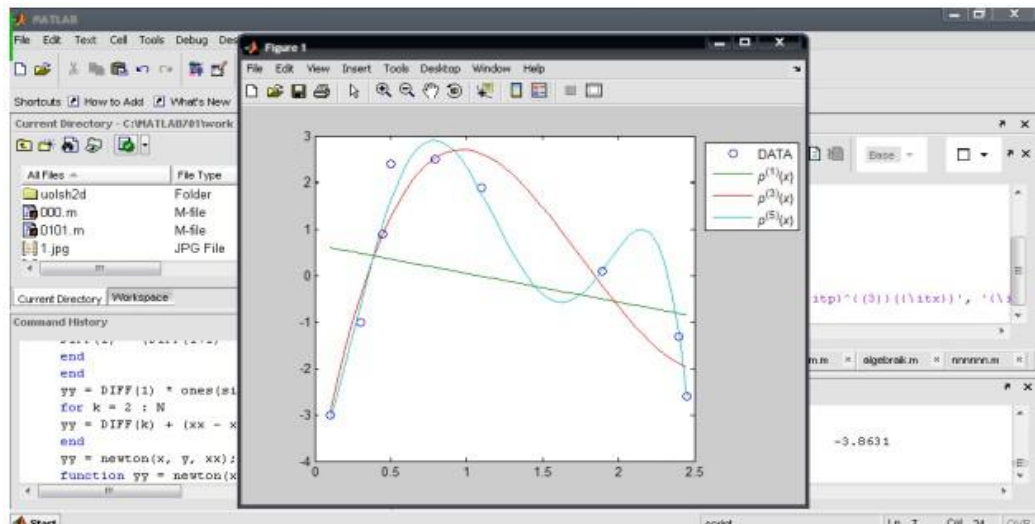
$$O() = -0,6191 * \quad + 0,6755$$

$$O() = 2,2872 * \quad - 12,1533 \quad + 17,0969 * \quad - 4,5273$$

$$O() = -6,0193 * \quad + 33,9475 * \quad - 62,4220 \quad + 35,9698 * \quad + 4,7121 \\ * \quad - 4,5273$$

Ushbu polinomlarning grafigini chizish uchun quyidagi ketma-ketliklardan foydalanamiz.

```
>> xx = linspace(x(1), x(end), 100);  
>> yy1 = polyval(p1, xx);  
>> yy3 = polyval(p3, xx);  
>> yy5 = polyval(p5, xx);  
>> plot(x, y, 'o', xx, yy1, xx, yy3, xx, yy5)  
>> legend('DATA', '\itp^{\{1\}}(\itx)', '\itp^{\{3\}}(\itx)',  
'\itp^{\{5\}}(\itx)', -1)
```



2-rasm. 1,3,5 darajali polinom grafigi.

Polinom grafigining berilgan nuqtalardan qanchalik uzoqligini ya'ni qanchalik yaqinlashish xatoligi bilish uchun ikki argumentli polyfit funksiyasini chaqiramiz. Birinchi argument qurilgan polinom koeffitsiyentlari, ikkinchisi esa yaqinlashish xaqidagi axborot strukturasi. Masalan:

```
>> [p3, S3] = polyfit(x, y, 3) p3 =  
2.2872 -12.1553 17.0969 -4.5273 S3 =
```

$R: [4 \times 4 \text{ double}]$

$df: 5 \text{ normr:}$

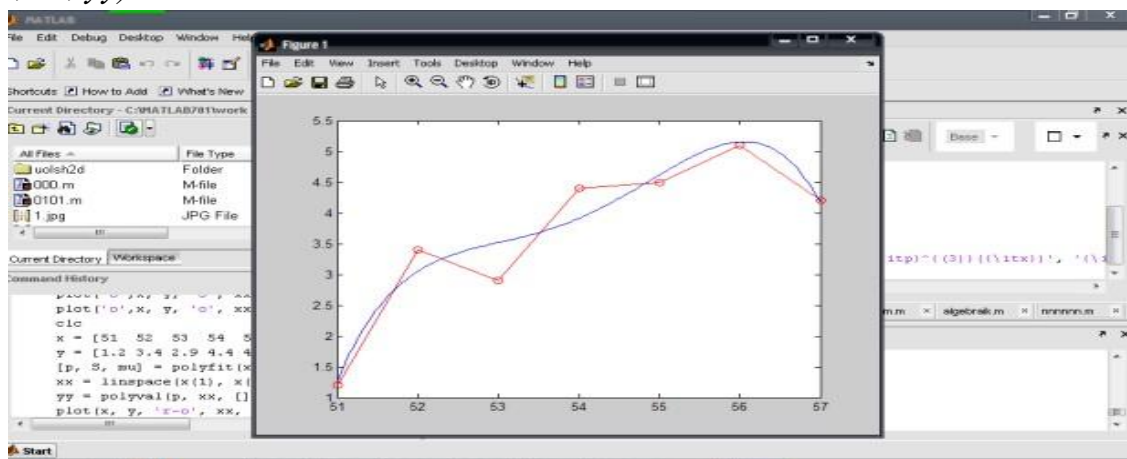
1.7201

Bu yerda norma o'rta kvadratik norma xatoligi sanaladi quyidagi formula singari.

Yoki Eng kichik $\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$ kvadratlar usuli

bo'yicha polinomli yaqinlashishni 4 darajasini quyidagicha keltirish ham mumkin.

$x = [51 \ 52 \ 53 \ 54 \ 55 \ 56 \ 57]; y = [1.2 \ 3.4 \ 2.9 \ 4.4 \ 4.5 \ 5.1 \ 4.2]$ $[p, S, mu] = \text{polyfit}(x, y, 4)$ $xx = \text{linspace}(x(1), x(\text{end}), 200); yy = \text{polyval}(p, xx, [], mu); \text{plot}(x, y, 'o', xx, yy)$



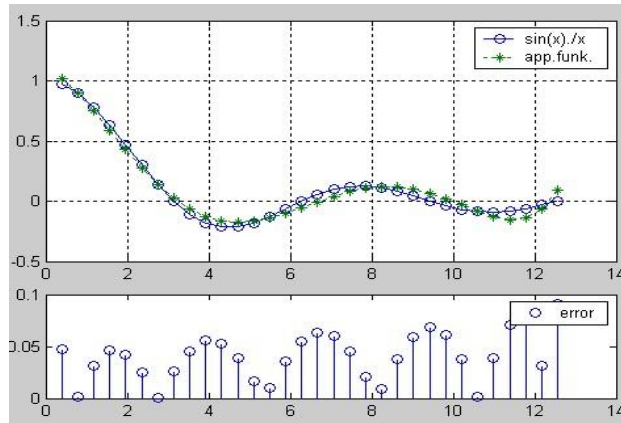
3-rasm. 4 darajali polinom grafigi.

Bundan ko'rinib turibdiki, approksimatsiyalash usullarini signallarni vaqt sohasida qayta ishlash ya'ni implusli shumlarni filtrlashda ayniqsa eng kichik kvadratlar usuli juda yaxshi natijalarni beradi. Bundan tashqari Matlab muhitida bu usullarni hisoblash qulay, oson va tez amalga oshiriladi.

1. Injenerlik amaliyotida odatda tekis va o'rta kvadratik yaqinlashish kriteriysi qo'llaniladi.
2. Matlabda approksimatsiyalovchi funksiya sifatida n – tartibli ko'phad, approksimatsiya kriteriysi sifatida o'rta kvadratik chetlanish ishlatiladi. Approksimatsiyalash funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega: **p=polyfit(x,y,n)**, bu yerda: **x, y** –bir xil yoki typm qadamdagi tugun nuqtalar va shu nuqtadagi berilgan qiymatlar; **n** –approksimatsiyalovchi polinom tartibi; **p** –

approksimatsiyalovchi polinom koeffitsiyentlari vektori. Misol. $y = \sin(x)$
 x funksiyaning bir xil qadamdagi tugun nuqtalardagi qiymatlari asosida 5-tartibli ko'phad bilan approksimatsiya qilish. $x=\pi/8:\pi/8:4*\pi$; $y=\sin(x)./x$;
 $p=\text{polyfit}(x,y,5)$; $fa=\text{polyval}(p,x)$;

```
subplot(3,1,1:2), plot(x,y,'-o',x,fa,':*'), grid, hold on; error=abs(fa-y);
subplot(3,1,3), plot(x,error,'--p')
```



3. $y = \frac{\sin(x)}{x}$ funksiyaning $[0.1; 4.5]$ oraliqda har xil qadam bilan 3-tartibli ko'phad x

bilan approksimatsiyasi. $x=[0.1 \ 0.3$

$0.5 \ 0.75 \ 0.9 \ 1.1 \ 1.3 \ 1.7 \dots \ 2 \ 2.4 \ 3$

$3.1 \ 3.6 \ 4 \ 4.1 \ 4.2 \ 4.3 \ 4.5]$;

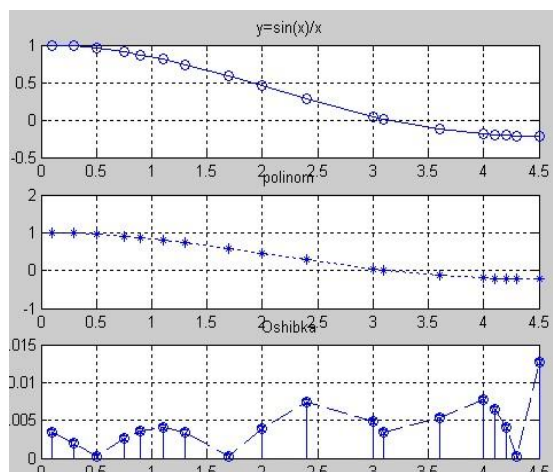
$y=\sin(x)./x$; $p=\text{polyfit}(x,y,3)$;

$fa=\text{polyval}(p,x)$;

$\text{subplot}(3,1,1)$, $\text{plot}(x,y,'-o')$, grid , $\text{title}('y=\sin(x)/x')$, hold on ;

$\text{subplot}(3,1,2)$, $\text{plot}(x,fa,':*')$, grid , $\text{title}('polinom')$, hold on ; $\text{error}=\text{abs}(fa-y)$;

$\text{subplot}(3,1,3)$, $\text{plot}(x,error,'--p')$, grid , $\text{title}('Oshibka')$, hold on ; $\text{stem}(x,error)$



4. Bir o'zgaruvchili funksiyalarni interpolatsiyalash $f_i = \text{int erp1}(x, y, x_i, '<metod>')$ funksiyasi orqali amalga oshiriladi, bu yerda: x – interpolatsiya tugunlari (teng qadamli, tengmas qadamli); y – interpolatsiya qilinuvchi funksiya; x_i – tugun va oraliq nuqtalar; $<metod>$ interpolatsiyalovchi funksiyalar:

- 'nearest' – 0-tartibli ko'phad;
- 'linear' – 1-tartibli ko'phad;
- 'cubic' – 3-tartibli ko'phad;
- 'spline' – kubik splayn; f_i - interpolatsiyalovchi funksiya qiymatlari.

5. $y = \frac{\sin(x)}{x}$ funksiyaning bir xil qadam bilan kubik ko'phad va kubik splayn x asosida interpolatsiyasi.

```
x=pi/8:pi/2:(4*pi+pi/2);
```

```
y=sin(x)./x;
```

```
xi=pi/8:pi/16:(4*pi+pi/16);
```

```
fi1=interp1(x,y,xi,'cubic');
```

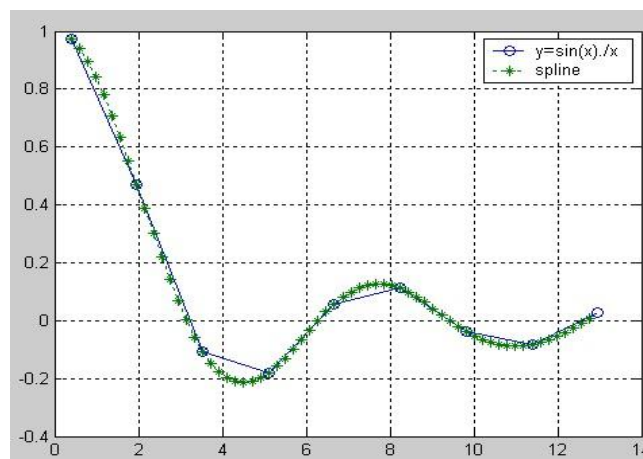
```
plot(x,y,'-o',xi,fi1,':*'), grid, hold on
```

```
legend('y=sin(x)./x','cubic') figure
```

```
fi2=interp1(x,y,xi,'spline');
```

```
plot(x,y,'-o',xi,fi2,':*'),grid, hold on
```

```
legend('y=sin(x)./x','spline')
```



Пример (интерполяция функции косинуса):

```
x=0:10;y=cos(x); xi=0:0.1:10;
yi=interp1(x,y,xi);
plot(x,y,'x',xi,yi,'g'),hold on
yi=interp1(x,y,xi,'spline');
plot(x,y,'o',xi,yi,'m'),grid,hold off
```

Пример:

```
x=0:10; y=3*cos(x); x1=0:0.1:11;
y1=spline(x,y,x1);
plot(x,y,'o',x1,y1,'—') 2-misol.
```

$$2x + y - 5z + t = 8$$

$$X - 3y - 6t = 9$$

$$2y - z + 2t = -5$$

$$X + 4y - 7z + 6t = 0 \text{ Tenglamalar}$$

sistemasini yeching.

Yechish.

Berilgan sistemani eng kichik kvadratlar usuli bilan yechish

```
>> A=[21 -5 1;1 -3 0 -6;0 2 -1 2;1 4 -7 6];
```

```
% sistemaning matrisa
```

```
>> B=[8;9;-5;0]
```

```
%o'ng tomonlarining ustun vektori
```

```
>> x=lsqr(A,B)
```

```
% chiziqli sistemani yechish uchun % biriktirilgan funksiya (eng kichik kvadratlar usuli)
```

```
x =
```

```
3.0000 -4.0000 -1.0000 1.0000 Misol:
```

x – 2

$$2 < \frac{x}{x+3}$$

Tenglikni yeching Yechish:

```
>>maple('solve','{(x-2)/(x+3)>2}',x)
```

ans =

{-8 < x , x < -3 }

Tengsizlikni yechimi -

$8 < x < -3$.

3-misol

$$\sqrt{x} \leq 51, \quad \sqrt{x} - 1 < 10.69 \leq 10x^2 + 4x$$

Tengsizlik sistemasini yeching Yechish:

```
>> maple('solve','{(x-2)/(x+3)<=51, sqrt(x) *(sqrt(x)-1)
<10,10*x^2+4*x>=69}',x)
```

ans =

{-1/5+1/10*694^(1/2)<= x, x < 21/2+1/2*41^(1/2)}

```
>> vpa(ans,4)
```

ans =

{2.434 <= x, x < 13.70 }

Tekshirish uchun savollar:

- 1) Ko'phadlarning Matlabda berilishi?
- 2) Matlabda ko'phadlar ustida amallar?
- 3) Matlabda ko'phadlarning idizlarini topish funksiyasi? 4) Funksiyalarni approksimatsiyasi va interpolatsiyasi?
- 5) Bir o'lchovli funksiyalarni approksimatsiyalash funksiyalari? 6) Bir o'lchovli funksiyalar interpolatsiyasi? 7) Meshgrid funksiyasining vazifasini ayting; 8) Chiziqli algebra masalalarini keltiring?
- 9) Ezplot funksiyasining vazifasi nima?