8-Mavzu: Matlabda chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini tadqiq etish va yechish Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi;
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini echish usullari;
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini echishda Matlab usullari;
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini echishga doir misollar.

1.Chiziqli tenglamalar sistemasi(CHTS). Juda ko'p masalalarni hal qilishda CHTS ga duch kelamiz. Umumiy holda CHTS ning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$
\begin{array}{l}
+ \quad + \cdots + \quad = \\
+ \quad + \cdots + \quad = \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
+ \quad + \cdots + \quad =
\end{array} \qquad (1)
$$

Bu yerda x_1, x_2, …, x_n- noma'lum o'zgaruvchilar, a_{11}, a_{12}, …, a_{nn}, va b_1, b_2,…, b_n lar haqiqiy sonlar.

(1) Tizimining yechimi deb uni tenglamalarni ayniyatlarga aylantiruvchi x_1 ,x_2 ,…, x_n sonlarga aytiladi.

CHTS ni vektor ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$Ax=b \quad (2)$$

Bu yerda

$$
A= \begin{array}{l}
a11, a12, \ldots, a1n \\
a11, a12, \ldots, a2n \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
a11, a12, \ldots, ann
\end{array}
$$

(nxn) o'lchovli matritsa,

$$X= \ldots$$

(nx1) o'lchovli noma'lum vector ustun,

b=

...

(nx1) o'lchovli ozod had deb ataluvchi vector ustun.

A*=[A,b]-kengaytirilgan matritsani kiritamiz. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki (Kronel-Kapelli teoremasi) A va A* matritsalarning ranglari teng bo'lsa (1) yoki (2) sistemaning yechimi mavjud bo'ladi.

2.CHTS ni yechish usullari. ChTS ni yechishning aniq usullaridan keng qo'llaniladiganlari Gauss, Kramer va teskari matritsa usullaridir, taqribiy usullarga esa itiratsiyalar, Zeydel va kichik kvadratlar usullarni keltirish mumkin.

Aniq usullardan Kramer usulini ko'rib chiqamiz:

Buning uchun det(A)≠0 bo'lishi kerak. Usulni to'liq keltirish uchun asosiy A matritsani k-ustun elementlari ozod had b bilan almashtirib A_k, $\overline{}$ k=1, matritsalar hosil qilamiz. U holda det(A)≠0 shart asosida yechimni topish uchun

$$x_k=\frac{(\quad)}{(\quad)}\ , k=1,2,\ldots,n$$

tengliklardan foydalanish mumkin. Taqribiy usullardan iteratsiya usulini keltiramiz. Buning uchun (1) sistemani quyidagicha ko'rinishga keltiramiz:

$\lceil$ 1 = $_1$+ 12 2 + 13 3 + ⋯+ 1 , | = 1+ 21 1 + 23 3 +

⋯+ 2 , (3)

2

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

= + 1 1 + 2 2 + ⋯+ −1 −1

Bu yerda

= —, = − — , i≠j,

= 0, = , , = 1,2, … , .

U holda

… …

= … … … … … … …

…

, β= | β | β … β

belgilashlar kiritib (3) ni quyidagicha yozib olamiz.

x= β+ x (4)

(4) sistemani ketma-ket yaqinlashish (iteratsiya) usuli bilan yechamiz. Boshlang'ich yaqinlashish uchun $x^{(0)}$= β ozod hadni olamiz va ketma-ket keyingi yaqinlashishlarni hosil qilamiz:

$x_{(1)}$= β+ $x_{(0)}$; $x_{(2)}$=

β+ $x_{(1)}$;

……………………

$x_{(k+1)}$= β+ $x_{(k)}$;

Agar $x^{(0)}$, $x^{(1)}$,…, $x^{(k)}$,… sonlar ketma-ketligi limitga ega bo'lsa, u holda bu limit (3) yoki (4) sistemaning yechimi bo'ladi. Yaqinlashishlarni ochiq holda quyidagicha yozish mumkin:

( )

= β ,

( ) ( )

= β + ∑ , i=1, , k=0,1,2,… (5)

Yechimni taqribiy hisoblashning ana shunday usuli iteratsiya usuli deyiladi. Iteratsiya protsessining yaqinlashuvchi bo'lishini yetarli shartini quyidagicha teoremada keltiramiz:

Teorema: Agar o'zgartirilgan (3) sistema quyidagi shartlardan

1) $\sum |\quad| < 1$, i=1,2,…,n.

2) $\sum |\quad| < 1$, i=1,2,…,n.

biri bajarilsa, u holda bu sistema uchun hosil qilingan (5) iteratsiya jarayoni yagona yechimga yaqinlashuvchi bo'ladi, ixtiyoriy boshlang'ich nuqta $x^{(0)}$ uchun.

Vektor ko'rinishidagi (2) sistemani det$A \neq 0$ bo'lgan holda teorema shartini qanoatlantiradigan sistemaga keltirish mumkin:

$$(A^{-1}-\varepsilon)Ax=Db,\ D=A^{-1}-\varepsilon;\ \ (6)$$

=[ ]-yetarli kichik sonlardan iborat bo'lgan matritsa (6)dan quyidagini olamiz.

$$x=\beta+\alpha x,\ (7)$$

bu yerda $\alpha=A$, $\beta=Db$, bo'lib Σ_{ij} lar yetarli kichik qilib olinsa teorema shartlari bajariladi.

3.CHTS ni yechishda Matlab usullari. CHTS ni yechish uchun Matlab funksiyalari (usullari) juda ko'p bo'lib, biz ulardan bir nechtasini keltiramiz. Birinchi usul "chapdan bo'lish" usulidir:

1) x=A\B

2) x=isqnonneg(A,B)-Ax=B chiziqli tenglamalar sistemasini kichik kvadratlar usuli bilan yechadi. Bunda A-(nxn) o'lchovli, B-(nx1) o'lchovli, $x_i \geq 0$, i=1,2,…,n. Minimallashtirish kriteriyasi: B-Ax ning ikkinchi normasini minimallashtirish;

3) x=isqnonneg(A,B,x0)-Iteratsiyalar uchun chiziqli tenglamalar sistemasining aniq berilgan nomanfiy boshlang'ich qiymatlarda yechib beradi;

4) [x,w]=isqnonneg(…)-yechim bilan birga qoldiqlar vektori kvadratiikkinchi normasini qaytaradi;

5) [x,w,w1]=isqnonneg(…)-xuddi avvalgi buyruq kabi, yana qoldiqlarvektori w1 ni qaytaradi;

6) bicg(A,B)-Ax=B ning x yechimini qaytaradi; A(nxn), B(nx1). Bundahisoblash iteratsiyalar yaqinlashguncha yoki min{20,n} gacha bajariladi;

7) bisc(A,B,tol)-yechimni tol xatolik bilan qaytaradi;

8) bisc(A,B,tol,maxit)-avvalgi buyruq kabi, yechimni undan tashqari maxitmaksimal iteratsiyalar soni bilan qaytaradi.

4.CHTS ga doir misollar.

1.Tenglamalar sistemasini chapdan bo'lish va 2), 3) buyruqlar yordamida yeching va Kramer usulida yechilgan bilan solishtiring.

$$2\quad+\quad+\quad+\quad=8$$

$$3 \quad - \quad -2 \quad + \quad = 2$$
$$+2 \quad -3 \quad +2 \quad = 8$$
$$5 \quad -2 \quad +3 \quad - \quad = 1$$

A=[2 1 1 1; 3 -1 -2 1; 1 2 -3 2; 5 -2 3 -1], B=[8;2;8;1]

Nazorat savollari:

1. CHTS va uning yechimi haqida.
2. CHTS ni yechish usullari.
3. CHTS ni yechishni taqribiy usullari.
4. CHTS ni yechish uchun iteratsiyalar usullari.
5. CHTS ni yechish uchun Matlab usullari.
6. CHTS ni yechish uchun Kramer usulari.