椭圆型PDE的小波插值近似解

摘　要　Daubechies小波的近似空间可以构造出Galekin方法需要的Sobolev空间的递增的有限维线性子空间序列。充分光滑函数的采样值可以由合适尺度的小波展开，相应的小波插值函数依Sobolev范数收敛到原函数。应用此方法可以求椭圆型PDE的数值解。

关键词　Daubechies小波；椭圆型PDE；Galekin方法

1 Sobolev空间与椭圆型PDE

对于以广义函数论和泛函分析为为基础的现代偏微分方程理论，Sobolev 空间是研究问题的基本工具。下面对需要的PDE技术做一些基本的介绍（[2]）。

1.1 弱导数

假设$u,v\in L^1_{loc}(\Omega)$，$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$为多重指标，称$v\in L^1_{loc}(\Omega)$为$u$的$\alpha$阶偏导数，若对$\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u\,D^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi dx$$

记为

$$D^\alpha u=v$$

1.2 Sobolev空间

定义Sobolev空间（[3]）

$$W^{k,p}(\Omega)$$

为满足条件

$$D^\alpha u\in L^p(\Omega),\quad |\alpha|\le k$$

的本地可积函数$u:\Omega\to\mathrm{R}$全体所构成的集合，并装备以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}:=\begin{cases}\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \max_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},p=\infty\end{cases}$$

特别当$p=2$时，记$W^{k,2}(\Omega)$为$H^k(\Omega)$。这时可引进内积

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

$W^{k,p}(\Omega)$为 Banach 空间，$H^k(\Omega)$为 Hilbert 空间。特别地，$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$。

1.3 椭圆型 PDE 及其弱解

对 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω 为$\mathbb{R}^n$的有界开子集且$u:\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$未知，$u = u(x)$。$f:\Omega \to \mathbb{R}$给定，$L$表示形如

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

的二阶偏微分算子，$a^{ij}, b^i, c\ (i,j = 1, \dots, n)$为给定的系数方程。

此后都假设对称条件

$$a^{ij} = a^{ji}\ (i,j = 1, \dots, n)$$

称偏微分算子 L 为椭圆型的，如果存在常数$\theta > 0$使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

对$a.e.\ x \in \Omega$和$\forall \xi \in \mathrm{R}^n$成立。椭圆型条件意味着对每个点$x \in \Omega$，$n \times n$对称矩阵$\mathbf{A}(x) = \left(\left(a^{ij}(x)\right)\right)$正定，其最小特征值大于等于$\theta$。

椭圆型算子 L 对应的双线性型$B[\,,\,]$定义为

$$B[u\,,v] := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\, u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv\, dx$$

$u, v \in H_0^1(\Omega)$。

称$u \in H_0^1(\Omega)$为上述边值问题的弱解，如果

$$B[u\,,v] = (f, v)$$

对所有$v \in H_0^1(\Omega)$成立，$(\ ,\ )$为$L^2(\Omega)$上的内积。

1.4 Galekin 方法简介

下面简述 Galekin 方法的主要思想。在$H_0^1(\Omega)$中寻求一递增的有限维线性子空间序列$\{E_\nu\}$，使得$H_0^1(\Omega) = \overline{\cup E_\nu}$。由于$H_0^1(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密，故$\cup E_\nu$按$L^2(\Omega)$的范数做闭包即得$L^2(\Omega)$，利用$H_0^1(\Omega)$与$L^2(\Omega)$在$E_\nu$上的投影，我们可以把原来的偏微分方程定解问题

化为一个常微分方程组的初值问题，在得到常微分方程组的解以后，经组合得到原问题的近似解，再证明$\nu \to \infty$时这个近似解收敛到所要求的解。

由小波分析的知识，我们会在 3.1 中由 Dauechies 小波的近似空间构造有限维线性子空间序列。

2 小波插值

2.1 Daubechies 小波

Daubechies 小波是一族连续且紧支集的小波。令ϕ为N阶的 Daubechies 尺度函数，令$\{a_0,\dots,a_{2N-1}\}$为双尺度差分方程相应的系数，$(a_0,\dots,a_{2N-1})$称为尺度向量。小波向量$(b_0,\dots,b_{2N-1})$定义为

$$b_k := (-1)^{k+1}a_{2N-1-k}$$

定义相应的小波函数$\psi(x)$为

$$\psi(x) := \sum_{k=0}^{2N-1} b_k\phi(2x-k)$$

对$j,k\in\mathbb{Z}$, 定义

$$\phi_k^j(x) = 2^{j/2}\phi\left(2^jx-k\right), \psi_k^j(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^jx-k\right), x\in\mathbb{R}$$

其近似空间V^j的性质见[4]。

2.2 小波插值的估计

定理 2.1　假设函数$f\in C^2(\bar{\Omega})$, Ω为$\mathbb{R}^2$上的有界开集。对$j\in\mathbb{Z}$，

$$f^j(x,y) := \frac{1}{2^j}\sum_{p,q\in\Lambda} f\left(\frac{p+c}{2^j},\frac{q+c}{2^j}\right)\phi_p^j(x)\phi_q^j(y),\quad x,y\in\ \Omega,$$

其中指标集$\Lambda = \left\{i\in\mathbb{Z}: supp\left(\phi_i^j(x)\right)\cap\Omega\neq\emptyset\right\}$, 则

$$\left\|f-f^j\right\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{(2^j)^2}$$

且

$$\left\|f-f^j\right\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{C}{2^j}$$

C为与Ω的直径，N，和$f|_{\bar{\Omega}}$的一阶二阶导数的最大模有关的常数。

证明：

不失一般性，假设Ω为边长为L的正方形区域，则p（或q）不超过$2^j L+(2N-1)$。

首先证明

$$\left\|f-f^j\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{2^j}$$

对每个$p,q\in\Lambda$，在点$(x,y)\in\ \Omega$处对f做 Taylor 展开，得

$$f\left(\frac{p+c}{2^j},\frac{q+c}{2^j}\right)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\xi_p,\xi_q\right)\left(\frac{p+c}{2^j}-x\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\xi_p,\xi_q\right)\left(\frac{q+c}{2^j}-y\right)$$

代入 Taylor 展开式,得

$$2^j\left(f-f^j\right)(x,y)=\sum_{p,q\in\Lambda}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\xi_p,\xi_q\right)\left(\frac{p+c}{2^j}-x\right)\phi_p^j(x)\phi_q^j(y)$$

$$+\sum_{p,q\in\Lambda}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\xi_p,\xi_q\right)\left(\frac{q+c}{2^j}-y\right)\phi_p^j(x)\phi_q^j(y)$$

对上式两边平方，

$$2^{2j}\left|f-f^j\right|^2(x,y)\leq C2^j\left\{\left(\sum_{p\in\Lambda}\left|\phi_p^j\left(\frac{p+c}{2^j}-x\right)\right|\right)^2+\left(\sum_{q\in\Lambda}\left|\phi_q^j\left(\frac{q+c}{2^j}-y\right)\right|\right)^2\right\}$$

$$=C2^j\left(\sum_{p,p'\in\Lambda}\left|\phi_p^j\phi_{p'}^j\right|\left|\left(\frac{p+c}{2^j}-x\right)\left(\frac{p'+c}{2^j}-x\right)\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{q,q'\in\Lambda}\left|\phi_q^j\phi_{q'}^j\right|\left|\left(\frac{q+c}{2^j}-y\right)\left(\frac{q'+c}{2^j}-y\right)\right|\right)$$

C为与$f|_{\overline{\Omega}}$的一阶二阶导数的最大模有关的常数。由 Hölder 不等式，有

$$2^{2j}\left\|f-f^j\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\frac{C2^j}{2^{2j}}\left\{\sum_{p\in\Lambda}\sum_{|p-p'|\leq 2N-2}\int\left|\phi_p^j\phi_{p'}^j\right|dx+\sum_{q\in\Lambda}\sum_{|q-q'|\leq 2N-2}\int\left|\phi_q^j\phi_{q'}^j\right|dx\right\}$$

$$\leq C,$$

C为与Ω的直径，N，和$f|_{\overline{\Omega}}$的一阶二阶导数的最大模有关的常数。

相似地，可得$\left\|f-f^j\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{C}{\left(2^j\right)^2}$和$\left\|f-f^j\right\|_{H^1(\Omega)}\leq\frac{C}{2^j}$，见[1]。□

3 椭圆型 PDE 的估计

假设 Ω 为$\mathbb{R}^2$上的 Lipschitz 边界（[2]）的有界开集。令

$$W^j := \left\{f \in V^j : \operatorname{supp} f \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset\right\}$$

Ω 有界，W^j为V^j的有限维子空间，有

$$W^j \subset H^1(\Omega)$$

因此，我们可以使用W^j中的元素代表微分方程在$H^1(\Omega)$中的解。

考虑 Neumann 边界条件的椭圆型偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中n为$\partial\Omega$的外法向量。若u为该方程的弱解，则对所有测试函数$v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy + \int_\Omega uvdxdy = \int_\Omega fvdxdy + \int_{\partial\Omega} gvdS$$

定理 3.1 令u^j为对所有测试函数$v \in W^j$满足上式的解，$u^j \in W^j$。假设小波参数$N \geq 2$。有

$$\left\|u - u^j\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{2^j}$$

其中C为与Ω的直径，N，和u的一阶二阶导数的最大模有关的常数。

证明：

首先证明如果$v \in W^j$，有

$$\left\|u - u^j\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

对$v \in V^j$，令$w = u^j - v$。对$\forall v \in W^j$，$w \in W^j$，u和 u^j均满足弱解，有

$$\int_\Omega \left(\nabla u - \nabla u^j\right) \cdot \nabla w dxdy + \int_\Omega \left(u - u^j\right) w dxdy = 0$$

因此，由 Schwarz 不等式，

$$\left\|u - u^j\right\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left(\nabla u - \nabla u^j\right)^2 dxdy + \int_\Omega \left(u - u^j\right)^2 dxdy$$

$$= \int_\Omega \left(\nabla u - \nabla u^j\right) \cdot (\nabla u - \nabla v - \nabla w) dxdy$$

$$+ \int_\Omega \left(u - u^j\right)(u - v - w) dxdy$$

$$= \int_{\Omega} \left(\nabla u - \nabla u^j\right) \cdot (\nabla u - \nabla v) dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \left(u - u^j\right)(u - v) dxdy$$

$$\leq \left\| u - u^j \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \| u - v \|_{H^1(\Omega)}^2$$

再由定理 3.1 中的估计，命题得证。□

进一步地，称u^j为该方程的 Wavelet-Galekin 解，若对所有测试函数$v \in W^j$

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dxdy + \int_{\Omega} uvdxdy = \int_{\Omega} f^j vdxdy + \int_{\partial\Omega} g^j vdS$$

其中f^j和g^j为定理 2.1 中f和g的j阶小波插值。

定理 3.2　令u^j为该方程的 Wavelet-Galekin 解，有

$$\left\| u - u^j \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{2^j}$$

其中C为与Ω的直径，N，和u的一阶二阶导数的最大模有关的常数。

注意到边界的 Lipschitz 条件，有不等式

$$\int_{\partial\Omega} |f| dS \leq C \, \| f \|_{H^1(\Omega)}$$

再由定理 3.1，可以得到 3.2 是 3.1 的推论。

参考文献

[1]Raymond O.Wells&Jr.Xiaodong Zhou.Wavelet Interpolation and Approximate Solutions of Elliptic Partial Diferential Equations[J].Computational Mathematics Laboratory,1993:14-16

[2]Lawrence C.Evans.*Partial Diferential Equations,Second Edition*[M]. America:American Mathematical Society,2010:257-316

[3]陈恕行.现代偏微分方程导论[M].北京:科学出版社，2005:39-40

[4]Boggess.A&Narcowich.F.J.小波与傅里叶分析基础：第二版[M].北京:电子工业出版社,2010:173-181