程序作业一：切比雪夫插值

陈泽高 PB20000302

2023 年 4 月 29 日

1 实验介绍（摘要）

本次实验要求实现切比雪夫插值，并验证切比雪夫多项式的逼近效果

对下面的函数，在区间 $x \in [-1, 1]$ 进行切比雪夫插值：

$$f_1(x) = |\sin(6x)|^3 - \cos(5e^x) \tag{1}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} - \sin(20x) \tag{2}$$

选择合适的插值节点数，证明插值的逼近效果（验证以下两个定理）

1.1 引理一：对可微函数插值

对于整数 $m > 0$，设 f 的 $(m-1)$ 阶导数存在，$f^{(m-1)}$ 是 $[-1, 1]$ 上的绝对连续函数，且 $f^{(}m)$ 在区间上的全变差为 V，则对于 $k \geq m+1$，n 阶切比雪夫插值函数 p_n 满足：

$$||f - p_n||_\infty \leq \frac{4V}{\pi m(n-m)^m} \tag{3}$$

1.2 引理二：对全纯函数插值

设 f 可以解析延拓到开 Bernstein 椭圆 E_ρ 上，且上界为 M，则 n 阶切比雪夫插值函数 p_n 满足：

$$||f - p_n||_\infty \leq \frac{4M\rho^{-n}}{\rho - 1} \tag{4}$$

2 算法与实现

切比雪夫插值的主要内容为插值系数的计算。设 n 阶切比雪夫插值函数 $P = p_n$：

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x) \tag{5}$$

令 $x_k = \cos(k\frac{\pi}{n},\ \ k = 0, 1, \cdots, n$ 为插值节点，则有

$$y_k = P(x_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos jk\frac{\pi}{n} \tag{6}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2}a_j(e^{jk\frac{\pi}{n}\mathrm{i}} - e^{-jk\frac{\pi}{n}\mathrm{i}}) \tag{7}$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} c_j\omega^{jk} \tag{8}$$

其中 $\omega = e^{\mathrm{i}\pi/n}$，

$$c_j = \begin{cases} \frac{1}{2}a_j, & 0 < j \le n \\ a_0, & j = 0 \\ \frac{1}{2}a_{-j} & -n \le j < 0 \end{cases}$$

至此我们将从 $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ 到 $\{a_j\}_{k=0}^{n}$ 的映射转化为从 $\{y_k\}_{k=-n}^{n}$ 到 $\{c_j\}_{k=-n}^{n}$ 的离散傅里叶变换。只需应用快速傅里叶变换即可完成计算。此外，由于不能使用 matlab 自带的 FFT 函数，笔者自行实现了针对长度为二的次幂的数列的 FFT 算法，插值的阶数也被限定在二的次幂。

2.1 无穷范数的近似

为了快速求解 $||f||_\infty$，采用网格法（在定义域均匀取值，求函数值绝对值最大者）和随机法（在定义域内随机选取大量样点，取最大者）分别对无穷范数进行估算。

3 结果展示

3.1 插值函数作图

如图所示（12），具体的误差会在程序中输出，详见附件。选择对 (1) 式的插值进行验证。选用 mathematica 计算全变差 $V = 37684 + 1296 * 2 * 3 = 45460$，三阶导数的变差等于四阶导数（除去间断点）的绝对值的积分加上间断点的跳跃值。如图所示（3），可以看出在目前可取值 n 的范围内引理一成立。

3.2 引理一验证

3.3 引理二验证

选择对 (2) 式的插值进行验证。选择 $b = 0.1987$ 略小于最大选择 $\frac{1}{5}$、$M = |f(b\mathrm{i})|$ 小于 $|f|$ 在椭圆内的最大值。如图所示（4），可以看出在目前可取值 n 的范围内引理二成立，n 较大的情况下由于误差问题导致估算值（蓝色点）偏高。

4 附件内容

本次作业用 matlab 实现，其中三个 main 文件可以直接在 matlab2022 下运行，

作业附件为：

图 1: 对式 (1) 的插值，插值曲线（红），原函数（蓝）

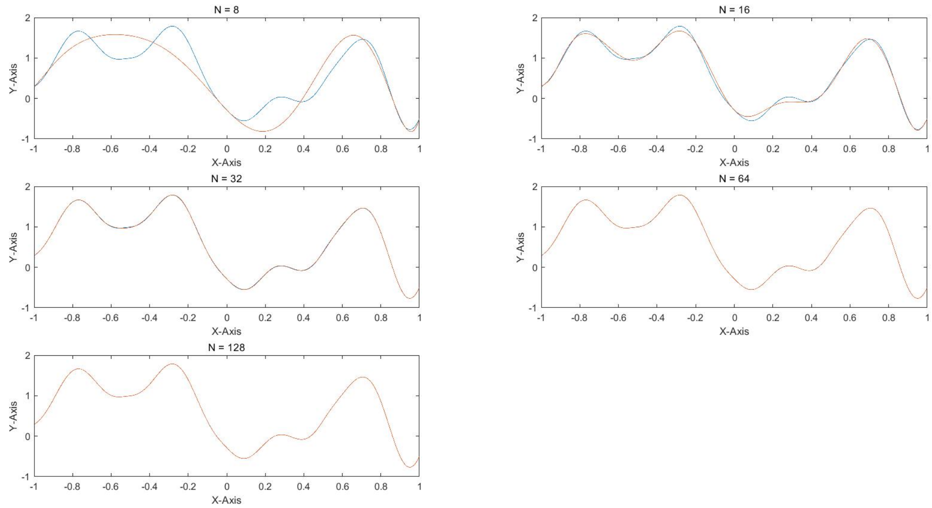
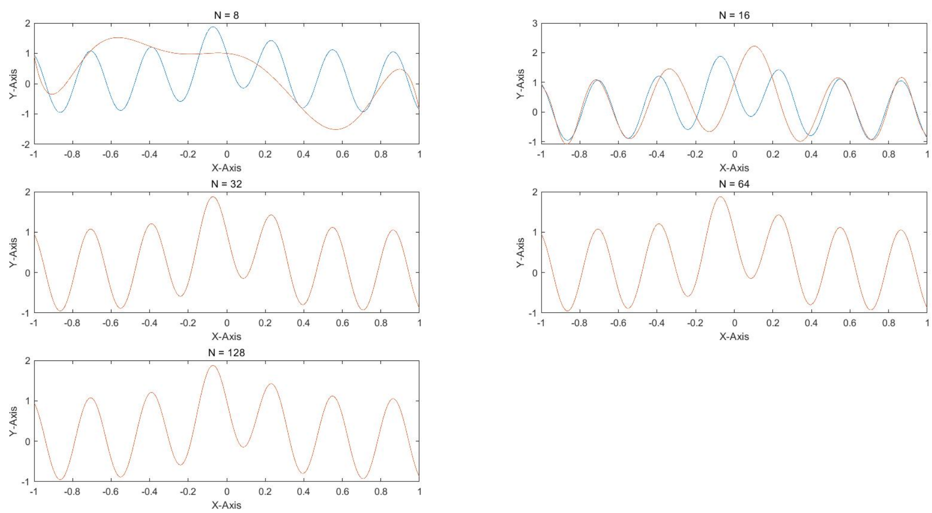


图 2: 对式 (1) 的插值，插值曲线（红），原函数（蓝）




```
'main.m' 执行插值算法并画图
'main2.m' 验证引理一
'main3.m' 验证引理二
'myFFT.m' 针对特定长度数列的快速傅里叶变换算法
' getChebshevArgs.m' 获取切比雪夫插值的系数的算法
'calChebshev.m' 根据插值系数求插值多项式的函数
'TotalVariation.nb' 用mathematica计算全变差
```

图 3: 引理一验证：两条线分别为二次、三次参考线，点为实际值

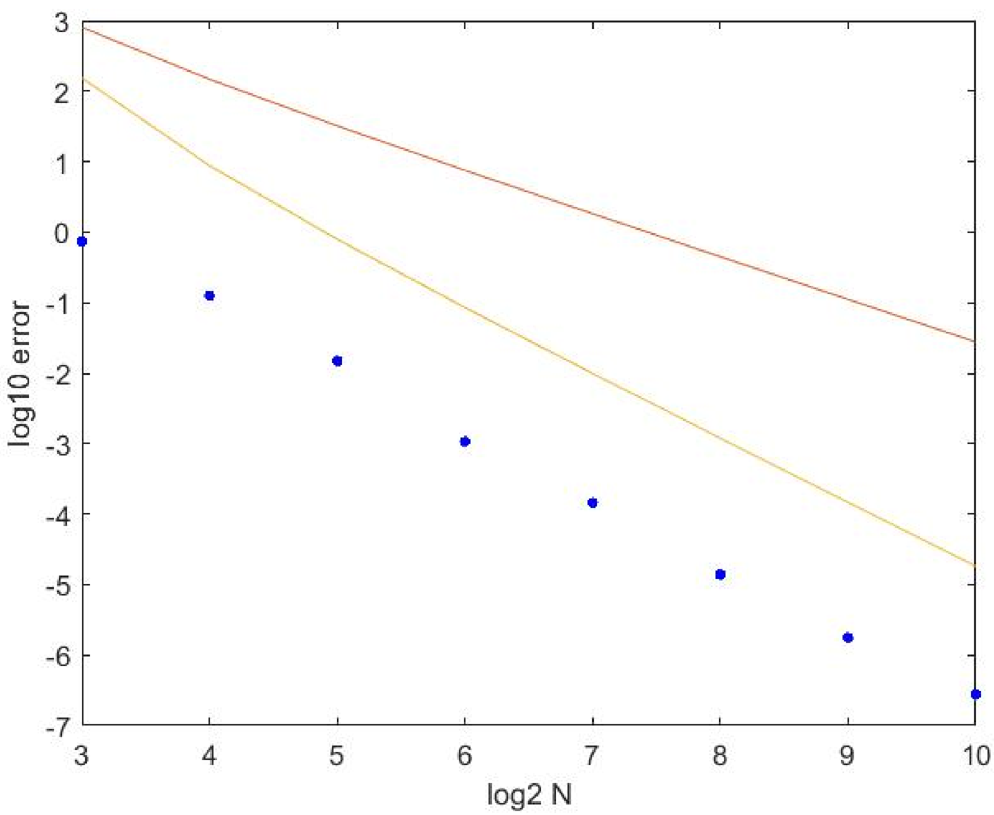


图 4: 引理二验证：绿线为参考线，点为实际值