第 37 卷/第 5 期/ 2013 年 9 月
河北师范大学学报/自然科学版/
JOURNAL OF HEBEI NORMAL UNIVERSITY/Natural Science Edition/
Vol. 37 No. 5 Sep. 2013

小波法求解非线性分数阶偏微分方程

郝　玲[1]，　牛红玲[1]，　成福伟[2]，　尹建华[1]

(1. 河北民族师范学院 数学与计算机系，河北 承德　067000；2. 河北民族师范学院 科研处，河北 承德　067000)

摘　要：考虑一类非线性分数阶偏微分方程的数值解法. Haar 小波具有正交性，区域的有界性以及小波函数的可计算性. 将 Haar 小波与算子矩阵思想进行结合，恰当离散初始方程，使非线性分数阶偏微分方程转换为非线性代数方程组，进而可以编程求解，最后，数值算例验证了方法的有效性.

关键词：非线性；分数阶导数；Haar 小波；算子矩阵；数值解

中图分类号：O 241.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5854(2013)05-0453-05

Wavelet Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations of Fractional Order

HAO Ling[1]，　NIU Hongling[1]，　CHENG Fuwei[2]，　YIN Jianhua[1]

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Hebei Teachers College for Nationalities, Hebei Chengde　067000, China；
2. Department of Scientific Research, Hebei Teachers College for Nationalities, Hebei Chengde　067000, China)

Abstract: In this paper, we consider the numerical method for a class of nonlinear partial differential equations of fractional order. The Haar wavelet is known to have a small bottle, orthogonality, and the computability of the wavelet function. We combine the Haar wavelet with the operational matrix and then discretize these equations. So the original problem is transformed into a nonlinear system of algebraic equations, which is now solvable by using software. Finally, a numerical example shows that this approach is effective.

Key words: nonlinear; fractional derivative; Haar wavelet; operational matrix; numerical solution

最近十几年，分数阶导数在生物学、流体力学、物理学等科学领域有着非常重要的作用，很多实际问题都可转化为分数阶微分积分方程. 分数阶偏微分方程是经典的整数阶偏微分方程的发展. 比起整数阶微分方程，分数阶微分方程的特点是能更精确地描绘自然界的动态系统过程[1-3]. 分数阶方程应用于实践，关键在于分数阶的数值计算，然而分数阶方程的理论分析及其数值分析却往往很难. 因而，求解分数阶积分、微分方程一直是学者们研究的重要内容，一般情况下直接求解分数阶积分微分方程的解析解比较困难，在此之前很多学者对分数阶常微分方程、偏微分方程、积分方程提出了很多数值解法，如 Adomain 分解方法、变分迭代法、微分迭代法等[4-5].

近些年来，小波理论是一门新兴的数学理论. 作为一种新的数学分支，它已经被广泛应用到各种领域，如图像处理、信号分析、小波去噪、数值分析等[6]. 就数值分析而言，小波理论主要研究对给定函数的近似表示，表示给定函数的小波称之为小波基函数. 根据不同函数的性质，有不同的小波基函数. 目前，最简单、最实用

收稿日期：2012-10-25；修回日期：2013-04-06

基金项目：河北省自然科学基金(A2011205092)

作者简介：郝　玲(1974-)，女，河北隆化人，讲师，从事分数阶积分微分方程数值解的研究.

的小波基函数是 Haar 小波. Haar 小波具有相互正交、计算方便、形式简单等特点,可以充分表示函数的局部性质和整体性质[6]. 为此,Haar 小波在实际问题中得到了较为广泛的应用[7].

利用 Haar 小波函数相关性质与算子矩阵思想,考虑下述形式非线性分数阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}=F(u(x,t))\frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}}+f(x,t). \tag{1}$$

其中,$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}$ 表示 Caputo 分数阶导数,$\frac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial t^{\beta}}$ 表示 Riemann-Liouville 分数阶导数[8],$F(u(x,t))$ 是 $u(x,t)$ 的多项式函数,为简单起见,不妨设 $F(u(x,t))=u^{n}(x,t)$,n 为正整数.

1 分数阶微积分定义

1) Riemann-Liouville 定义[9]:

$$\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m},\ \alpha=m\in\mathbf{N};\\ \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_a^t\dfrac{f(T)}{(t-T)^{\alpha-m+1}}\mathrm{d}T,\ 0\leqslant m-1<\alpha<m.\end{cases} \tag{2}$$

Riemann-Liouville 定义的分数阶积分为

$$I_t^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-T)^{-\alpha-1}f(T)\mathrm{d}T,\ \alpha<0. \tag{3}$$

2) Caputo 定义[9]:

$$\mathrm{D}_*^{\alpha} f(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m},\ \alpha=m\in\mathbf{N};\\ \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_a^t\dfrac{f^{(m)}(T)}{(t-T)^{\alpha-m+1}}\mathrm{d}T,\ 0\leqslant m-1<\alpha<m.\end{cases} \tag{4}$$

2 算法的提出

1975 年 Chen 和 Hsiao 提出了算子矩阵思想,文献[8]给出了一般意义下积分算子矩阵. 即矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 积分可近似表示为

$$\int_0^t \boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s\cong \boldsymbol{Q}_{\phi}\boldsymbol{\phi}(t), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{\phi}$ 为 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 的一重积分算子矩阵. 可以推导出 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 的 n 重积分算子矩阵 Q_{ϕ}^{n}. Wu 等[8] 给出了在不同的基下任意矩阵的积分算子矩阵的方法. 如 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的算子矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{Q}_{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Q}_B\boldsymbol{\Phi}^{-1}. \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_B=\frac{1}{2m}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

若 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为正交矩阵,那么 $\boldsymbol{Q}_{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Q}_B\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$.

Haar 小波定义在 $t\in[0,1]$ 可表示为

$$h_0(t)=\frac{1}{\sqrt{m}},$$

$$h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases}2^{\frac{j}{2}},\ \dfrac{k-1}{2^j}\leqslant t<\dfrac{k-1/2}{2^j},\\ -2^{\frac{j}{2}},\ \dfrac{k-1/2}{2^j}\leqslant t<\dfrac{k}{2^j},\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

其中,$i=0,1,2,\cdots,m-1$,$m=2^l$,l 是正整数,j,k 表示 i 的整数分解,即 $i=2^j+k-1$.

对任意函数 $y(x,t)\in L^2(R)$ 可展开为小波积形式

$$y(x,t) \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j} h_i(x) h_j(t). \tag{8}$$

这里 $c_{i,j}$ 为系数，且 $c_{i,j} = \int_0^1 y(x,t)h_i(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y(x,t)h_j(t)\mathrm{d}t$，将 x,t 以相同步长离散

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}. \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{Y}$ 为 $y(x,t)$ 的离散形式

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,m-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{m-1,0} & h_{m-1,1} & \cdots & h_{m-1,m-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,m-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$$

是 $y(x,t)$ 的系数矩阵. 可由公式 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{H}^{-1}$ 求得，由 Haar 小波性质可知 $\boldsymbol{H}$ 为正交矩阵，因此

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

考虑如下分数阶方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = u^n(x,t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + f(x,t), \\ &0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < t \leqslant 1, \\ &u(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x < 1, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这里 $0 < \alpha \leqslant 1,\ 1 < \beta \leqslant 2, f(x,t) \in C(D), D = [0,1] \times [0,1], u(x,t) \in L^2(R)$.

由于 $u(x,t)$ 为平方可积函数，可设

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} c_{i,j} h_i(x) h_j(j), \tag{12}$$

即 $$u(x,t) \approx \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}(t). \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{H}(x) = (h_0(x), h_1(x), \cdots, h_{m-1}(x))^{\mathrm{T}}$.

于是由(5)～(7)可得，

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \approx \frac{\partial^\alpha(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}(t))}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\frac{\partial^\alpha \boldsymbol{H}(t)}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_H^{-\alpha}\boldsymbol{H}(t), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \approx \frac{\partial^\beta(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(x))}{\partial x^\beta} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^\beta \boldsymbol{H}(x)}{\partial x^\beta} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_H^{-\beta}\boldsymbol{H}(x). \tag{15}$$

$f(x,t)$ 为已知函数，经 Haar 小波函数展开

$$f(x,t) \approx \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x) \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{H}(t), \tag{16}$$

将(13)～(16)代入到式(11)得

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_H^{-\alpha}\boldsymbol{H}(t) = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}(t))^n \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_H^{-\beta}\boldsymbol{H}(x) + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}(t). \tag{17}$$

将 x,t 以步长 $\Delta = \dfrac{1}{m}$ 等距离散，得

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_H^{-\alpha}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^n\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_H^{-\beta}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}. \tag{18}$$

整理式(18)得

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_H^{-\alpha} - \boldsymbol{C}^n\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_H^{-\beta} = \boldsymbol{D}. \tag{19}$$

显然式(19)为非线性代数方程组，通过 Matlab 可求解，进而方程可解.

3 数值算例

例：考虑如下非线性分数阶偏微分方程

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = x + xt^2,$$

$$t > 0, 0 < \alpha \leqslant 1,$$

满足边界条件为

$$u(x,0) = 0.$$

结合上述方法利用 MATLAB 软件进行数值计算得到表 1～3. 其中 HPM(同伦映射法)解见文献[10].

表 1　m=16 时 HPM 解与 Haar 小波解的比较

t	x	α=0.50		α=0.75		α=1.00		精确解
		u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	
0.20	0.25	0.104 57	0.113 74	0.078 30	0.084 67	0.049 98	0.050 67	0.050 00
	0.50	0.209 14	0.227 10	0.156 61	0.149 71	0.099 97	0.099 89	0.100 00
	0.75	0.313 72	0.309 45	0.234 91	0.240 81	0.149 96	0.149 54	0.150 00
	1.00	0.418 29	0.427 47	0.313 22	0.327 74	0.199 95	0.199 17	0.200 00
0.40	0.25	0.177 22	0.186 49	0.136 80	0.143 74	0.099 64	0.099 42	0.100 00
	0.50	0.354 45	0.348 47	0.273 61	0.291 57	0.199 29	0.199 14	0.200 00
	0.75	0.531 68	0.547 69	0.410 41	0.408 45	0.298 93	0.301 27	0.300 00
	1.00	0.708 91	0.723 75	0.547 22	0.553 81	0.398 58	0.400 47	0.400 00
0.60	0.25	0.230 50	0.256 71	0.185 14	0.190 74	0.147 15	0.149 19	0.150 00
	0.50	0.461 00	0.452 79	0.370 29	0.382 88	0.294 31	0.298 34	0.300 00
	0.75	0.691 49	0.782 39	0.555 43	0.568 48	0.441 47	0.445 49	0.450 00
	1.00	0.921 99	0.940 46	0.740 58	0.759 67	0.588 63	0.589 27	0.600 00

表 2　m=32 时 HPM 解与 Haar 小波解的比较

t	x	α=0.50		α=0.75		α=1.00		精确解
		u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	
0.20	0.25	0.104 57	0.113 38	0.078 30	0.084 17	0.049 98	0.050 24	0.050 00
	0.50	0.209 14	0.227 41	0.156 61	0.149 36	0.099 97	0.099 78	0.100 00
	0.75	0.313 72	0.309 54	0.234 91	0.240 59	0.149 96	0.149 87	0.150 00
	1.00	0.418 29	0.427 42	0.313 22	0.327 75	0.199 95	0.199 28	0.200 00
0.40	0.25	0.177 22	0.186 48	0.136 80	0.143 15	0.099 64	0.099 86	0.100 00
	0.50	0.354 45	0.348 44	0.273 61	0.291 89	0.199 29	0.199 54	0.200 00
	0.75	0.531 68	0.547 68	0.410 41	0.408 24	0.298 93	0.301 47	0.300 00
	1.00	0.708 91	0.723 39	0.547 22	0.553 63	0.398 58	0.400 59	0.400 00
0.60	0.25	0.230 50	0.256 86	0.185 14	0.190 21	0.147 15	0.149 55	0.150 00
	0.50	0.461 00	0.452 78	0.370 29	0.382 13	0.294 31	0.298 75	0.300 00
	0.75	0.691 49	0.782 94	0.555 43	0.568 57	0.441 47	0.445 66	0.450 00
	1.00	0.921 99	0.940 47	0.740 58	0.759 46	0.588 63	0.589 95	0.600 00

表 3 $m=64$ 时 HPM 解与 Haar 小波解的比较

t	x	$\alpha=0.50$		$\alpha=0.75$		$\alpha=1.00$		精确解
		u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	u_{HPM}	Haar 小波解	
0.20	0.25	0.104 57	0.113 64	0.078 30	0.084 53	0.049 98	0.050 04	0.050 00
	0.50	0.209 14	0.227 65	0.156 61	0.149 98	0.099 97	0.099 98	0.100 00
	0.75	0.313 72	0.309 78	0.234 91	0.240 67	0.149 96	0.150 01	0.150 00
	1.00	0.418 29	0.427 68	0.313 22	0.327 69	0.199 95	0.200 23	0.200 00
0.40	0.25	0.177 22	0.186 57	0.136 80	0.143 87	0.099 64	0.099 98	0.100 00
	0.50	0.354 45	0.348 73	0.273 61	0.291 02	0.199 29	0.199 79	0.200 00
	0.75	0.531 68	0.547 68	0.410 41	0.408 76	0.298 93	0.301 17	0.300 00
	1.00	0.708 91	0.723 16	0.547 22	0.553 32	0.398 58	0.400 23	0.400 00
0.60	0.25	0.230 50	0.256 74	0.185 14	0.190 06	0.147 15	0.149 98	0.150 00
	0.50	0.461 00	0.452 87	0.370 29	0.382 45	0.294 31	0.300 14	0.300 00
	0.75	0.691 49	0.783 00	0.555 43	0.568 34	0.441 47	0.450 05	0.450 00
	1.00	0.921 99	0.940 07	0.740 58	0.759 08	0.588 63	0.601 32	0.600 00

数值结果表明本文所提方法可以求解分数阶非线性偏微分方程，由于 HPM 是通过迭代方法求解方程的数值解，而文中方法只要求解非线性代数方程组即可，这样更加有利于计算机求解. 同时随着 m 的增大，精确解和数值解的逼近度越高，数值算例验证了该方法的有效性和可行性.

4 结 论

本文将 Haar 小波与算子矩阵有效结合，得到了 Haar 小波分数阶积分算子矩阵，利用所得积分算子矩阵将原问题转化为求解非线性代数方程问题，使得问题大大简化. 由于 Haar 小波矩阵具有稀疏性和正交性，因此文中所提出的方法计算量较小，是一种有效的数值方法.

参考文献：

[1] HE J H. Some Applications of Nonlinear Fractional Differential Equations and Their Approximations [J]. Bulletin of Science, Technology & Society, 1999, 15(2): 86-90.

[2] ODIBAT Z, MOMANI S. A Generalized Differential Transform Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21: 194-199.

[3] SHAHER M. Homotopy Perturbation Method for Nonlinear Partial Differential Equations of Fraction Order [J]. Physics Letters A, 2007, 365: 345-350.

[4] EI-KALLA I L. Error Estimate of the Series Solution to a Class of Nonlinear Fractional Differential Equations [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16: 1408-1413.

[5] MOMANI S, ODIBAT Z. Generalized Differential Transform Method for Solving a Space and Time-fractional Diffusion-wave Equation [J]. Physics Letters A, 2007, 370: 379-387.

[6] 李弼程，罗建书. 小波分析及其应用 [M]. 北京：电子工业出版社，2005.

[7] 葛哲学，沙威. 小波分析理论与 Matlab 实现 [M]. 北京：电子工业出版社，2007.

[8] WU L, HAIAO C H. Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed Parameter Systems [J]. IEEE Proceedings—Control Theory and Applications, 1997, 144: 87-94.

[9] PODLUBNY I. Franctional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[10] MOMANI S, ODIBAT Z. Homotopy Perturbation Method for Nonlinear Partial Differential Equations of Fractional Order [J]. Physics Letters A, 2007, 365: 345-350.

（责任编辑 白占立）