

## 第十一章 基于小波求解偏微分方程

我们知道,小波是一种满足特定性质的函数,其伸缩和平移可以生成平方可积空间  $L^2(R^d)$  的一组基。由于多分辨分析使小波比传统的Fourier分析具有更为细致的时频分析能力,目前已在以图像处理为代表的信号处理各领域得到了广泛应用。前述章节已就小波在数字图像处理中最有代表性的几类应用作了详细介绍,从本章起我们将进一步介绍小波在另一类重要问题——数值计算中的应用。

小波的优势本质上源于它兼具光滑性和局部紧支撑性质,从而能够比传统方法更好的处理局部存在奇异性的问题。一维信号的阶跃点和二维图像的边缘处都是这种奇异性的体现。同样的,在数值计算中,解的不连续性或奇异性也普遍存在,奇异位置的处理通常会给问题求解带来很大困难。差不多自小波理论建立那时起就有研究者将小波用于这类数值求解问题,充分利用小波的局部分析能力来缓解由奇异性带来的复杂处理。这里我们将主要介绍两类问题:(偏)微分方程和大型病态线性系统求解。这两类问题也是科学计算中最有代表性、在实际应用中最常遇到的。

本章首先介绍小波在微分方程求解中的应用,考虑到微分方程求解本身是一个非常庞杂的学科,其中涉及的理论和技术细节也很复杂,而我们的目的只是介绍小波与方程求解的切合点以及主要实现途径,所以这里只以最简单问题的求解为例着重展示在微分方程求解中如何应用小波的思想。

小波用于微分方程求解已有近10年时间,经过众多研究者的努力目前已经发展为一种系统而完善的方法,其中代表性的工作主要有:

- Beylkin (1993): 小波对微分算子的压缩表示(系数为稀疏矩阵);
- Vasilyev, Yuen, Pao (1997): Wavelet Collocation Method
- Monasse and Perrier (1998)
- Prosser and Cant (1999, 2000)
- Dahmen *et al* (1999)
- Cohen *et al* (2000)

### 11.1 引言

自然界中大量的物理现象都可以用偏微分方程(组)(PDE & PDEs)来描述,如流体力学和大气科学中流体和大气的运动总是用一系列偏微分方程来表示的,但是这些方程通常没有解析解,所以研究其数值近似解法就成为其中关键性的问题。传统的求解PDE的数值方法主要有以下三种:

1.有限差分法(Finite Difference Method):在离散网格点上定义未知函数的取值,然后用邻近点之间的差分来近似表示原方程中的微分算子,进而将问题转化为求解一个线性系统;

2.有限元方法(Finite Element Method):对求解区域按一定规则作单位剖分,并在剖分集上构造一个具有紧支撑的线性无关测试函数集,再将微分方程在该函数集上积分,最后微分方程的解就可以表示为这些测试函数的某种线性组合;

3.谱方法(Spectral Method):首先选取具有全支撑和一定光滑性质的基函数集,待求函数就可以用这些基函数线性表示,然后再将其截断至有限项就得到方程的近似解。

前两种方法的优势在于能够在复杂的几何形状上简洁求解原问题；而谱方法则具有更高的求解精度。

如果 PDE 的解是规则的(regular)，那么上述三种方法都很有效。然而描述很多物理现象的 PDE 的解都存在奇异点和变化剧烈的部分，如可压缩气体流中的冲击波，**湍流边界层处的突发作用**等。这类现象通常表现为在很小的区域内发生了非常复杂的变化，而且往往不具备时间上的连续性。这样一来用以上方法求数值解都存在困难。由于解的非规则性直接影响了谱方法表示的精度，所以谱方法很难实现；此外，基函数的全支撑特点还会引入著名的 Gibbs 现象，使解的精度进一步下降。对于解存在局部剧烈变化的问题，必须通过自适应有限差分或有限元法才能得到高精度表示。自适应方法可以自动估计当前解的局部误差大小，并根据误差判断是否需要进一步加细网格以及确定对何处的网格作加细，这种策略的难点在于当网格尺度变化时如何稳定、准确的表示差分算子。

借助小波分析的方法可以将待求函数用一系列小波基函数来表示，这些基函数在位置和尺度上都具有局部性质。我们知道，谱方法中的基函数无限可微，但它们的支撑集为全空间，不利于表示解的局部特性；有限差分或有限元方法中的基函数有局部紧支撑，但连续性不好。这样的结果就是，谱方法有较好的局部谱分析能力，但空域局部性不好；有限差分和有限元方法则恰好相反。而小波方法可以同时具备较强的空间和频谱分析能力，有利于高效的得到高精度解。

从具体的计算实现过程来说，由于微分方程的解通常依赖整个计算域上的信息，所以其离散解算子在经典方法下总是表示成稠密矩阵的形式。而小波基具有很好的数据压缩表示能力，用几个恰当的小波基就可以将其表示成较简单的稀疏形式，这样算子计算中的稠密矩阵的乘法就转化为稀疏矩阵相乘，不但有效减少了计算量，节省了存储空间，而且可以提高算法的收敛速度和性能。

由于小波求解微分方程的实质就是将方程由原来的坐标系转化到小波系下求解，充分利用方程在小波系下的稀疏特性来简化计算，提高算法实现效率，所以这一章里首先简要介绍微分方程中常见算子在小波系下的矩阵表示，然后考虑小波系下稀疏方程的求解。由于微分方程种类繁多，其中涉及的问题也十分繁杂，为了表述的方便，这里只以最简单而典型的两个例子说明这种方法的主要思想。

## 11.2 算子 T 的小波表示

有很大一类算子可以在小波基下以稀疏形式表示，从而为快速算法求算子对函数的作用提供方便，其中最典型的例子是 Calderon-Zygmund 算子和拟微分算子。这一节我们将介绍几种最基本的算子在紧支撑正交小波基下的精确显式表示。它们在基于小波求解微分方程中是最基本也是最重要的。

这里只考虑正交小波的情形，并且以  $L^2(R^d)$ ,  $d = 1$  空间为例。

设尺度方程为  $\mathbf{j}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \mathbf{j}(2x-k)$ ，小波函数就可以表示为

$$\mathbf{y}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \mathbf{j}(2x-k), \text{ 其中 } g_k = (-1)^k h_{L-1-k}, k = 0, 1, \dots, L-1, \text{ 且 } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(x) dx = 1.$$

此外小波函数  $\mathbf{y}(x)$  有  $M$  阶消失矩：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mathbf{y}(x) dx = 0, m = 0, 1, \dots, M-1.$$

又对任意尺度  $j$  , 记  $\mathbf{j}_{j,k}(x) \triangleq 2^{-j/2} \mathbf{j}(2^{-j}x - k)$  ,  $\mathbf{y}_{j,k}(x) \triangleq 2^{-j/2} \mathbf{y}(2^{-j}x - k)$  ;

$V_j \triangleq \text{span}\{\mathbf{j}_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  ,  $W_j \triangleq \text{span}\{\mathbf{y}_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  , 则  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  可生成  $L^2(R)$  的正交多分辨率分析 :

$$\dots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \dots$$

其中  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  ,  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(R)$  , 且  $W_j = V_{j-1} - V_j$  , 进而  $L^2(R) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$  .

与前述章节一致的 , 这里  $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{w}) = \int \mathbf{j}(x) e^{-j\mathbf{w}x} dx$  ,  $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) = \int \mathbf{y}(x) e^{-j\mathbf{w}x} dx$  ;

$$H(\mathbf{w}) = \sum_n h_n e^{-j\mathbf{w}n}.$$

### 11.2.1 非标准形式

设最粗和最细尺度对应的空间分别为  $V_J$  和  $V_0$  , 则  $V_0 = \bigoplus_{j=0}^J W_j + V_J$  . 又记  $P_j$  和  $Q_j = P_{j-1} - P_j$  分别为从  $L^2(R)$  到  $V_j$  和  $W_j$  的投影算子 , 那么对于任何给定的算子  $T : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$  有

$$\begin{aligned} P_0 T P_0 &= \sum_{j=0}^J (P_{j-1} T P_{j-1} - P_j T P_j) + P_J T P_J \\ &= \sum_{j=0}^J [(P_{j-1} - P_j) T (P_{j-1} - P_j) + (P_{j-1} - P_j) T P_j + P_j T (P_{j-1} - P_j)] + P_J T P_J \\ &= \sum_{j=0}^J [Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j] + P_J T P_J \triangleq \sum_{j=0}^J [A_j + B_j + G_j] + T_J \end{aligned} \quad (11.1)$$

这样算子  $T$  就可以表示为以下三元组的集合 :

$$T = \{A_j, B_j, G_j\}_{j \in \mathbb{Z}} ,$$

其中  $A_j = Q_j T Q_j : W_j \rightarrow W_j$  ;  $B_j = Q_j T P_j : V_j \rightarrow W_j$  ;  $G_j = P_j T Q_j : W_j \rightarrow V_j$  .

$\{A_j, B_j, G_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  就是算子  $T$  的非标准形式表示。  $A_j, B_j, G_j$  分别对应的基函数为

$$\{\mathbf{y}_{j,k}(x) \mathbf{y}_{j,k'}(x), \mathbf{y}_{j,k}(x) \mathbf{j}_{j,k'}(x), \mathbf{j}_{j,k}(x) \mathbf{y}_{j,k'}(x)\}_{k,k' \in \mathbb{Z}}.$$

若  $T_0 \triangleq P_0 T P_0$  是  $T$  在最细尺度上的离散表示 , 且最粗尺度为  $J$  , 定义

$T_j = P_j T P_j = \begin{bmatrix} A_{j+1} & B_{j+1} \\ G_{j+1} & T_{j+1} \end{bmatrix}$  , 那么  $T_j:V_j \rightarrow V_j$  , 算子  $T$  的非标准形式为

$T = \{\{A_j, B_j, G_j\}_{0 \leq j \leq J}, T_J\}$  , 这样算子  $T$  就可以表示成如图 11.1 所示的分块矩阵的形式 :

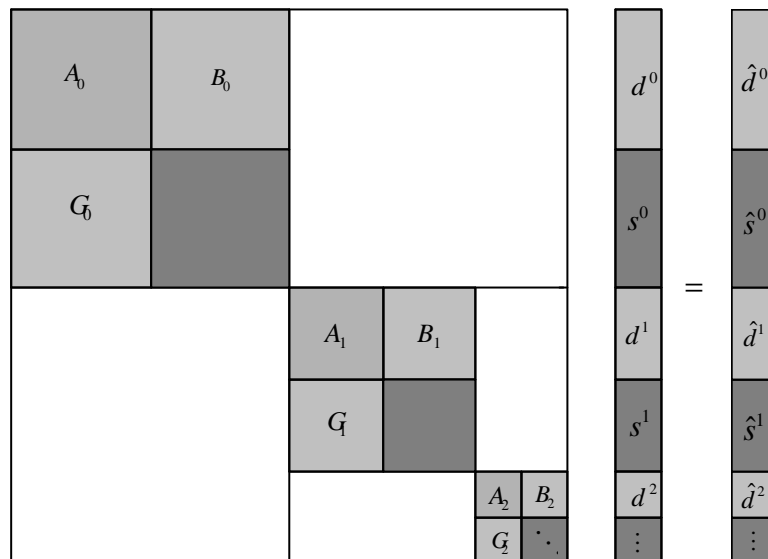


图 11.1. 算子  $T$  在小波系下的非标准形式表示

以矩阵  $A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i-j}, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$  为例 , 它在具有 6 阶消失矩的  $D_6$  小波系下的非标准形式表示

如图 11.2 所示。其中矩阵  $A$  的规模为  $256 \times 256$  , 变换后的矩阵元素中绝对值大于  $10^{-7}$  者以黑色标示。很显然 , 原来稠密的矩阵经过变换以后变得非常稀疏 , 这对于后续的计算及相关处理是非常有利的。

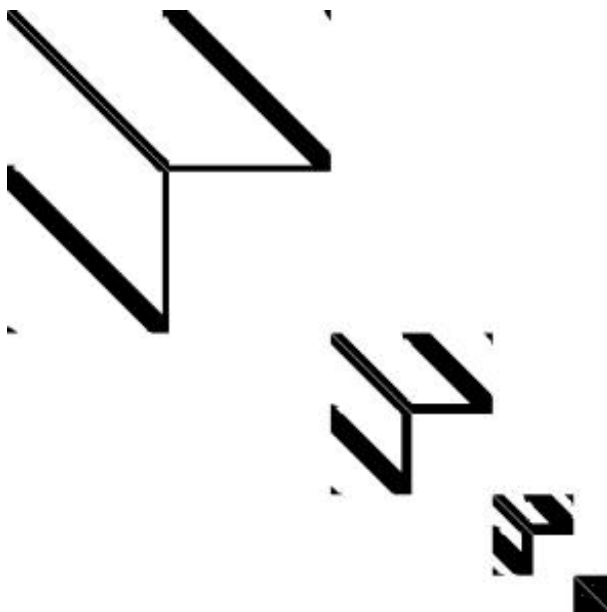


图 11.2 矩阵  $A$  在小波系下对应的非标准形式矩阵

设算子  $T$  的核函数为  $K(x, y)$  , 记  $A_j$  ,  $B_j$  ,  $G_j$  和  $T_j$  对应的分块矩阵分别为  $\mathbf{a}^j$  ,  $\mathbf{b}^j$  ,  $\mathbf{g}^j$  ,  $\mathbf{r}^j$  , 那么这些矩阵的元素分别为 :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{il}^j &= \iint K(x, y) \mathbf{y}_{j,i}(x) \mathbf{y}_{j,l}(y) dx dy & \mathbf{b}_{il}^j &= \iint K(x, y) \mathbf{y}_{j,i}(x) \mathbf{j}_{j,l}(y) dx dy \\ & ; & & ; \\ \mathbf{g}_{il}^j &= \iint K(x, y) \mathbf{j}_{j,i}(x) \mathbf{y}_{j,l}(y) dx dy & \mathbf{r}_{il}^j &= \iint K(x, y) \mathbf{j}_{j,i}(x) \mathbf{j}_{j,l}(y) dx dy \\ & ; & & ; \end{aligned}$$

(1) 算子  $d/dx$  的小波基表示

记算子  $d/dx$  的离散表示为矩阵  $T$  ,  $\mathbf{j}'(x) \triangleq \frac{d}{dx} \mathbf{j}(x)$  ,  $\mathbf{y}'(x) \triangleq \frac{d}{dx} \mathbf{y}(x)$  , 则

$A_j : W_j \rightarrow W_j$  的元素为

$$\mathbf{a}_{i,l}^j = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(2^{-j}x - i) \mathbf{y}'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \mathbf{a}_{i-l} ; \quad (11.2)$$

$B_j : V_j \rightarrow W_j$  的元素为

$$\mathbf{b}_{i,l}^j = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(2^{-j}x - i) \mathbf{j}'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \mathbf{b}_{i-l} ; \quad (11.3)$$

$\Gamma_j : W_j \rightarrow V_j$  的元素为

$$\mathbf{g}_{i,l}^j = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(2^{-j}x - i) \mathbf{y}'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \mathbf{g}_{i-l} ; \quad (11.4)$$

$T_j : V_j \rightarrow V_j$  的元素为

$$\mathbf{r}_{i,l}^j = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(2^{-j}x - i) \mathbf{j}'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \mathbf{r}_{i-l} ; \quad (11.5)$$

其中

$$\mathbf{a}_l = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(x-l) \mathbf{y}'(x) dx \quad (11.6) ; \quad \mathbf{b}_l = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(x-l) \mathbf{j}'(x) dx \quad (11.7)$$

$$\mathbf{g}_l = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(x-l) \mathbf{y}'(x) dx \quad (11.8) ; \quad \mathbf{r}_l = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(x-l) \mathbf{j}'(x) dx . \quad (11.9)$$

根据尺度方程和小波方程得到

$$\mathbf{a}_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad \mathbf{b}_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad \mathbf{g}_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad (11.10)$$

因此算子  $d/dx$  的小波基表示完全取决于  $r_l$ ，换句话说，也就是取决于该算子在  $V_0$  空间的表示，下面考虑如何求  $r_l$ 。

在 (11.9) 中将  $\mathbf{j}(x)$  和  $\mathbf{j}'(x)$  分别用尺度方程代替就得到

$$r_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} h_k h_m \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbf{j}(2x-2l-k)\mathbf{j}'(2x-m)dx = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} h_k h_m r_{2l+k-m}; \quad (11.11)$$

又  $\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1$ ，(11.11) 可以改写为

$$r_l = 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L-1} a_k (r_{2l-k} + r_{2l+k}), \quad l \in Z, \quad \text{其中 } a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-k} h_n h_{n+k}。$$

根据小波滤波器的正交性质， $a_{2m} = 0, m \in Z$ ，上式可以进一步写为

$$r_l = 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1})。 \quad (11.12)$$

记  $M_l^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l \mathbf{j}(x) dx$ ， $l = 0, 1, \dots, M-1$ ，由于  $\mathbf{y}(x)$  有  $M$  阶消失矩，利用

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l^M \mathbf{j}(x-l) = x^M + \sum_{l=1}^M (-1)^l \binom{M}{l} M_l^j x^{M-l} \quad (11.13)$$

和(11.9)，就得到

$$\sum_l l r_l = -1。 \quad (11.14)$$

一般的，我们有以下定理：

**定理 11.1.** 若积分 (11.9) 存在，那么 (11.9) 中的系数  $r_l$  满足线性方程组 (11.12) 和 (11.14)，

其中系数由  $a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-k} h_n h_{n+k}$  给定。若  $M \geq 2$ ，那么方程 (11.12) 和 (11.14) 有有限长的

唯一解  $r_l$ ，也即  $r_l \neq 0, -L+2 \leq l \leq L-2$  且  $r_l = -r_{-l}$ 。

[注] 若  $M=1$ ，那么方程 (11.12) 和 (11.14) 有唯一解，但是积分 (11.9) 未必绝对收敛。

例如，考虑  $L=4$  的 Daubechies 正交小波：

$$h_0 = 2^{-1/2} \frac{x(x-1)}{x^2+1}, h_1 = 2^{-1/2} \frac{1-x}{x^2+1}, h_2 = 2^{-1/2} \frac{x+1}{x^2+1}, h_3 = 2^{-1/2} \frac{x(x+1)}{x^2+1},$$

其中  $x$  为实参数，这时

$$a_1 = \frac{1+3x^2}{(x^2+1)^2}, a_3 = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^2},$$

进一步计算得到

$$r_1 = -\frac{(1+x^2)^2}{2(3x^4+1)}, r_2 = \frac{(1-x^2)x^2}{2(3x^4+1)}.$$

特别的，对 Haar 小波基： $h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  有  $a_1 = 1$  以及  $r_1 = -1/2$ ，从而得到最简单的有

限差分算子  $(1/2, 0, -1/2)$ 。这时尺度函数  $j$  不连续， $\hat{j}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin(\frac{1}{2}\mathbf{v}) e^{j\frac{1}{2}\mathbf{v}} / \mathbf{v}$ ，所以积

分 (11.9) 不绝对收敛。

下面特别的考虑 Daubechies 正交小波族，其中消失矩阶数为  $M$ ，滤波器长度  $L=2M$ 。记

$$H_0(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{jk\mathbf{v}},$$

利用

$$|H_0(\mathbf{v})|^2 = 1 - \frac{(2M-1)!}{[(M-1)!]^2 2^{2M-1}} \int_0^{\mathbf{v}} \sin^{2M-1} x dx,$$

并计算  $\int_0^{\mathbf{v}} \sin^{2M-1} x dx$  得

$$|H_0(\mathbf{v})|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(2M-1)!}{(M-1)! 4^{M-1}} \right]^2 \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} \cos(2m-1)\mathbf{v}}{(M-m)!(M+m-1)!(2m-1)}. \quad (11.15)$$

根据正交小波滤波器组完全重构条件  $|H_0(\mathbf{v})|^2 + |H_0(\mathbf{v}+\mathbf{p})|^2 = 1$  知，低通滤波器

$H_0(\mathbf{v})$  必须满足

$$|H_0(\mathbf{v})|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_{2m-1} \cos(2m-1)\mathbf{v}.$$

对照(11.15)知

$$a_{2m-1} = \frac{(-1)^{m-1} \left[ \frac{(2M-1)!}{(M-1)! 4^{M-1}} \right]^2}{(M-m)!(M+m-1)!(2m-1)}, \quad m=1, 2, \dots, M. \quad (11.16)$$

这样，对于给定的消失矩  $M$ ，根据定理 11.1 就可以求得相应的系数  $r_l$ ，下面列出了  $M=2, 3, 4$  时的计算结果：

1.  $M=2$

$$a_1 = \frac{9}{8}, a_3 = -\frac{1}{8}; r_1 = -\frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{12}.$$

2.  $M = 3$

$$a_1 = \frac{75}{64}, a_3 = -\frac{25}{128}, a_5 = \frac{3}{128};$$

$$r_1 = -\frac{272}{365}, r_2 = \frac{53}{365}, r_3 = -\frac{16}{1095}, r_4 = -\frac{1}{2920}.$$

3.  $M = 4$

$$a_1 = \frac{1225}{1024}, a_3 = -\frac{245}{1024}, a_5 = \frac{49}{1024}, a_7 = -\frac{5}{1024};$$

$$r_1 = -\frac{39296}{49553}, r_2 = \frac{76113}{396424}, r_3 = -\frac{1664}{49553}, r_4 = \frac{2645}{1189272},$$

$$r_5 = \frac{128}{743295}, r_6 = -\frac{1}{1189272}.$$



图11.3 算子 $d/dx$ 的非标准形式

图11.3即为 $d/dx$ 在小波系下的非标准形式矩阵表示，显然这是一个稀疏性质很好的带宽矩阵，且正交小波滤波器长为 $L$ 时，矩阵带宽为 $2L-3$ ，只与小波基的选择有关。

## (2) 算子 $d^n/dx^n$ 的小波基表示

与算子  $d/dx$  类似的， $d^n/dx^n$  的非标准形式完全取决于它在空间  $V_0$  上的表示，也即取决于系数

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} j(x-l) \frac{d^n}{dx^n} j(x) dx, \quad (11.17)$$



或者等价的

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-j\mathbf{v})^n |\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v})|^2 e^{j\mathbf{l}\mathbf{v}} d\mathbf{v} . \quad (11.18)$$

这时有以下定理：

**定理 11.2** (1) 若积分 (11.17) 或 (11.18) 存在，那么 (11.17) 中的系数  $r_l^{(n)}$  满足线性方程组

$$r_l^{(n)} = 2^n \left[ r_{2l}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1}^{(n)} + r_{2l+2k-1}^{(n)}) \right] \quad (11.19)$$

和

$$\sum_l l^n r_l^{(n)} = (-1)^n n! , \quad (11.20)$$

其中系数由  $a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-n} h_n h_{n+k}$  给定。

(2) 若消失矩  $M \geq (n+1)/2$ ，那么方程 (11.19) 和 (11.20) 有有限长的唯一解  $r_l^{(n)}$ ，也

即  $r_l^{(n)} \neq 0, -L+2 \leq l \leq L-2$ 。进一步的，

当  $n$  为偶数时：

$$r_l^{(n)} = r_{-l}^{(n)} ; \sum_l l^{2m} r_l^{(n)} = 0, m=1,2,\dots,n/2-1 ; \sum_l r_l^{(n)} = 0 ;$$

当  $n$  为奇数时：

$$r_l^{(n)} = -r_{-l}^{(n)} ; \sum_l l^{2m-1} r_l^{(n)} = 0, m=1,2,\dots,(n-1)/2 .$$

[注] (11.18) 可以改写为

$$r_l^{(n)} = \int_0^{2p} \sum_k |\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v} + 2k\mathbf{p})|^2 (-j)^n (\mathbf{v} + 2k\mathbf{p})^n e^{j\mathbf{l}\mathbf{v}} d\mathbf{v} ,$$

记  $\hat{r}^{(n)}(\mathbf{v}) = \sum_k r_k^{(n)} e^{-jk\mathbf{v}}$ ，则

$$\hat{r}^{(n)}(\mathbf{v}) = \sum_k |\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v} + 2k\mathbf{p})|^2 (-j)^n (\mathbf{v} + 2k\mathbf{p})^n .$$

又  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = H_0(\mathbf{v}/2) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}/2)$ ，所以

$$\hat{r}^{(n)}(\mathbf{v}) = 2^n (|H_0(\mathbf{v}/2)|^2 \hat{r}^{(n)}(\mathbf{v}/2) + |H_0(\mathbf{v}/2 + \mathbf{p})|^2 \hat{r}^{(n)}(\mathbf{v}/2 + \mathbf{p})) ,$$

记

$$(M_0 f)(\mathbf{v}) \triangleq (|H_0(\mathbf{v}/2)|^2 f(\mathbf{v}/2) + |H_0(\mathbf{v}/2 + \mathbf{p})|^2 f(\mathbf{v}/2 + \mathbf{p})) ,$$

则

$$M_0 \hat{r}^{(n)} = 2^{-n} \hat{r}^{(n)}. \quad (11.21)$$

也就是说,  $\hat{r}^{(n)}$  是算子  $M_0$  对应于特征值  $2^{-n}$  的特征矢量。这样求微分算子的小波基表示就等价于求 (11.21) 的三角多项式解。

### (3) 卷积算子的小波表示

当  $T$  为卷积算子时, 计算它的非标准形式矩阵将比一般情况简单得多, 这是因为尺度函数的自相关函数具有消失矩性质。具体来说, 设  $T$  为卷积算子,  $t_{m-l}^{(j-1)}$  表示到子空间  $V_{j-1}$  内

的投影算子  $P_{j-1}TP_{j-1}$  对应的矩阵, 要得到  $P_jTP_j$  的表示, 我们有  $t_l^{(j)} = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} h_k h_m t_{2l+k-m}^{(j-1)}$ ,

进一步化简得

$$t_l^{(j)} = t_{2l}^{(j-1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L/2} a_{2k-1} (t_{2l-2k+1}^{(j-1)} + t_{2l+2k-1}^{(j-1)}), \quad (11.22)$$

其中系数  $a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-n} h_n h_{n+k}$ .

此外

$$t_l^{(j)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \mathbf{j}_{j,0}(y) \mathbf{j}_{j,l}(x) dx dy \triangleq 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} K(2^j(l-y)) \Phi(y) dy, \quad (11.23)$$

其中  $K$  是算子  $T$  的核函数,  $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x) \mathbf{j}(x-y) dx$ . 根据  $\Phi$  的定义, 可以证明:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) dy = 1; \quad (11.24)$$

$$(b) \begin{aligned} M_\Phi^m &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^m \Phi(y) dy = \left[ \left( \frac{1}{j} \partial_v \right)^m |\hat{f}(\mathbf{v})|^2 \right]_{\mathbf{v}=0} \\ &= \left[ \left( \frac{1}{j} \partial_v \right)^m |H_0(\mathbf{v}/2) \hat{f}(\mathbf{v}/2)|^2 \right]_{\mathbf{v}=0} = 0, m=1, \dots, 2M-1 \end{aligned} \quad (11.25)$$

也就是说, 尺度函数  $\mathbf{j}$  的自相关函数  $\Phi$  有消失矩性质, 这样直接计算(11.23)就相当方便。

事实上我们还可以根据算子对应的小波系数的渐进性质来求线性系统(11.22)。这种方法在算子具有一定的 homogeneous 性质时显得特别简单, 因为这时算子可以由它在  $V_0$  空间的表示完全决定。下面就来考虑这种算子的两个例子: Hilbert 算子和分数阶微分(fractional differentiation)。

#### · Hilbert 变换

我们用这种方法来计算如下定义的 Hilbert 变换算子  $H$  的非标准形式:

$$g(x) = (Hf)(y) = \frac{1}{p} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds, \quad (11.26)$$

其中 p.v.表示在  $s = x$  处的值。那么  $H$  在  $V_0$  上对应的矩阵系数就由下式决定：

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-l)(Hj)(x)dx, l \in Z.$$

与前述算子表示同样的，非标准形式可以写为  $H = \{A_j, B_j, G_j\}_{j \in Z}$ ，其中  $A_j = A_0$ ，

$B_j = B_0$ ， $G_j = G_0$ ，其中  $A_0$ ， $B_0$  和  $G_0$  的矩阵元素  $a$ ， $b$  和  $g$  都由  $r$  决定：

$$a_i = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad b_i = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad g_i = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'}.$$

其中  $r$  满足线性方程

$$r_l = r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}), \quad a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-n} h_n h_{n+k}. \quad (11.27)$$

由(11.23) (11.24)和 (11.25)得到对于较大的  $l$  有

$$r_l = -\frac{1}{pl} + O\left(\frac{1}{l^{2M}}\right), \quad (11.28)$$

又(11.26)可以在 Fourier 变换域上改写为  $r_l = -2 \int_0^{+\infty} |\hat{f}(\mathbf{v})|^2 \sin(l\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ ，所以  $r_l = -r_{-l}$ ，

$r_0 = 0$ 。根据渐进条件(11.28)就可以按任意指定精度求解(11.27)得到  $r_l$ 。

作为例子，我们取具有 6 阶消失矩的 Daubechies 正交小波计算 Hilbert 变换算子对应的系数  $r_l$ ，当精度要求为  $10^{-7}$  时，根据(11.28)，得到表 11.1 所示的系数 ( $r_l = -r_{-l}$ ， $r_0 = 0$ )。

表 11.1 Hilbert 变换算子在消失矩  $M=6$  的 Daubechies 正交小波系下的系数  $r_l$

| $l$ | $r_l$        | $l$ | $r_l$        |
|-----|--------------|-----|--------------|
| 1   | -0.588303698 | 9   | -0.035367761 |
| 2   | -0.077576414 | 10  | -0.031830988 |
| 3   | -0.128743695 | 11  | -0.028937262 |
| 4   | -0.075063628 | 12  | -0.026525823 |
| 5   | -0.064168018 | 13  | -0.024485376 |
| 6   | -0.053041366 | 14  | -0.022736420 |
| 7   | -0.045470650 | 15  | -0.021220659 |
| 8   | -0.039788641 | 16  | -0.019894368 |

## 分数阶微分

考虑按下式定义的分数阶微分算子

$$(\partial_x^a f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)_+^{-a-1}}{\Gamma(-a)} f(y) dy, \quad (11.29)$$

其中  $\mathbf{a} \neq 1, 2, \dots$  , 当  $\mathbf{a} < 0$  时 , (11.29) 定义的就是分数阶反微商算子 (fractional anti-derivatives)。

$\partial_x^a$  在  $V_0$  上的表示由系数  $r_l$  决定(当下式的积分存在时) :

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(x-l)(\partial_x^a \mathbf{j})(x) dx, l \in Z.$$

$\partial_x^a$  的非标准形式为  $\partial_x^a = \{A_j, B_j, G_j\}_{j \in Z}$  , 其中  $A_j = 2^{-aj} A_0, B_j = 2^{-aj} B_0, G_j = 2^{-aj} G_0$  ,

$A_0, B_0$  和  $G_0$  的矩阵元素  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  和  $\mathbf{g}$  都可由  $r$  决定 :

$$\mathbf{a}_i = 2^a \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad \mathbf{b}_i = 2^a \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad \mathbf{g}_i = 2^a \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'}.$$

可以验证系数  $r_l$  满足下列方程

$$r_l = 2^a \left[ r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right], \quad a_k = 2 \sum_{n=0}^{L-1-n} h_n h_{n+k}.$$

由(11.23) (11.24)和 (11.25)得到对于较大的  $l$  有

$$r_l = \frac{1}{\Gamma(-\mathbf{a})} \frac{1}{l^{1+\mathbf{a}}} + O\left(\frac{1}{l^{1+\mathbf{a}+2M}}\right), l > 0, \quad (11.30)$$

$$r_l = 0, l < 0$$

作为例子 , 我们取具有 6 阶消失矩的 Daubechies 正交小波计算  $\partial_x^{0.5}$  对应的系数  $r_l$  , 当精度要求为  $10^{-7}$  时 , 根据(11.30) , 得到

$$r_l = -\frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{1}{l^{1+\mathbf{a}}} + O\left(\frac{1}{l^{13+1/2}}\right), l > 0,$$

$$r_l = 0, l < 0$$

进而求得表 11.2 所示的系数。

表 11.2  $\partial_x^{0.5}$  在消失矩 M=6 的 Daubechies 正交小波系下的系数  $r_l$

| $l$ | $r_l$           | $l$ | $r_l$           |
|-----|-----------------|-----|-----------------|
| -7  | -2.82831017e-06 | 4   | -2.77955293e-02 |
| -6  | -1.68623867e-06 | 5   | -2.61324170e-02 |
| -5  | 4.45847796e-04  | 6   | -1.91718816e-02 |
| -4  | -4.34633415e-03 | 7   | -1.52272841e-02 |
| -3  | 2.28821728e-02  | 8   | -1.24667403e-02 |
| -2  | -8.49883759e-02 | 9   | -1.04479500e-02 |
| -1  | 0.27799963      | 10  | -8.92061945e-03 |
| 0   | 0.84681966      | 11  | -7.73225246e-03 |

|   |                 |    |                 |
|---|-----------------|----|-----------------|
| 1 | -0.69847577     | 12 | -6.78614593e-03 |
| 2 | 2.36400139e-02  | 13 | -6.01838599e-03 |
| 3 | -8.97463780e-02 | 14 | -5.38521459e-03 |

### 11.2.2 标准形式

在非标准形式中，三元算子序列中的各个算子都表示在同一尺度  $j$  上的作用，其中  $A_j: W_j \rightarrow W_j$ ， $B_j: V_j \rightarrow W_j$ ， $G_j: W_j \rightarrow V_j$ ，并未考虑不同尺度子空间之间的相互作用。这一节我们将其拓展到与之相关的子空间序列上，进而得到算子矩阵的所谓标准形式表示。这里着重介绍标准形式和非标准形式之间的联系。

根据小波多分辨分析， $V_j$  可以表示为  $V_j = \bigoplus_{j'>j} W_{j'}$ ，在尺度  $j$  上  $\{B_j, G_j\}$  就可以表示为算子序列  $\{B_j^{j'}, G_j^{j'}\}_{j'>j}$ ，其中  $B_j^{j'}: W_{j'} \rightarrow W_j$ ， $G_j^{j'}: W_j \rightarrow W_{j'}$ ，这样就得到与非标准形式  $T = \{A_j, B_j, G_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  相应的标准形式

$$T = \{A_j, \{B_j^{j'}\}_{j'>j}, \{G_j^{j'}\}_{j'>j}\}_{j \in \mathbb{Z}}. \quad (11.31)$$

设最粗和最细尺度分别为  $j = n$  和  $j = 0$ ，那么  $\forall j \in [0, n]$ ， $V_j = V_n \bigoplus_{j'=j+1}^n W_{j'}$ ，所以算子的标准形式中除了  $\{B_j^{j'}, G_j^{j'}\}_{j'=j+1, \dots, n}$  之外还要增加算子序列  $\{B_j^{n+1}\}$  和  $\{G_j^{n+1}\}$ ，其中  $B_j^{n+1}: V_n \rightarrow W_j$ ， $G_j^{n+1}: W_j \rightarrow V_n$ 。特别的， $B_n^{n+1}$  和  $G_n^{n+1}$  就是非标准形式中的  $B_n$  和  $G_n$ 。

综上所述，最细尺度上的算子  $T_0 = P_0 T P_0$  可以表示为如下的标准形式：

$$T_0 = \{A_j, \{B_j^{j'}\}_{j'>j}, \{G_j^{j'}\}_{j'>j}, B_j^{n+1}, G_j^{n+1}, T_n\}_{j=1, 2, \dots, n}. \quad (11.32)$$

(11.32) 可以用如图 11.4 所示的分块矩阵形式表示：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & B_1^2 & B_1^3 & B_1^4 \\ \hline G_1^2 & A_2 & B_2^3 & B_2^4 \\ \hline G_1^3 & & A_3 & B_3^4 \\ \hline G_1^4 & & G_3^4 & T_3 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline d^1 \\ \hline d^2 \\ \hline d^3 \\ \hline s^3 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{d}^1 \\ \hline \hat{d}^2 \\ \hline \hat{d}^3 \\ \hline \hat{s}^3 \\ \hline \end{array}$$

图 11.4 算子  $T$  在小波系下的标准形式

同样的以矩阵

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i-j}, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$$

为例，它在具有 6 阶消失矩的  $D_6$  小波系下的标准形式如图 11.5 所示。其中矩阵规模为  $256 \times 256$ ，变换后的矩阵元素中绝对值大于  $10^{-7}$  者以黑色标示。

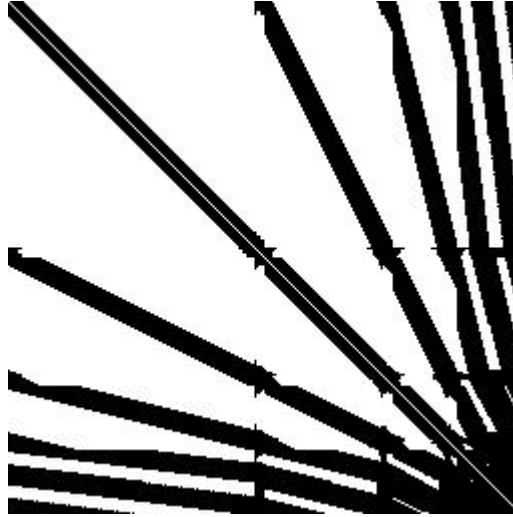


图 11.5 矩阵  $A$  在小波系下对应的标准形式矩阵

若  $T$  是 Calderón-Zygmund 算子或拟微分算子(pseudo-differential operator)，那么在给定的精度下，(11.32)中的各个子算子除  $T_n$  外对应的矩阵都是带宽的，且宽度与尺度  $j$  的大小密切相关。对一大类算子（如拟微分算子）而言，不同尺度  $j$  和  $j'$  的矩阵元素间的相关性随  $|j - j'|$  的增加而迅速减弱。因此，若  $j$  和  $j'$  相距甚远，那么在一定精度允许范围内， $B_j^{j'}, G_j^{j'}$  可以忽略。

有两种方法可以计算算子矩阵表示的标准形式。一种方法是先对矩阵的各行作一维小波变换，然后对变换后矩阵的各列再作一次一维小波变换；另一种方法就是首先计算得到非标准形式，再对其中的子算子  $B_j$  的各行和  $G_j$  的各列分别作一维小波变换。

### 11.2.3 小波表示对算子的压缩作用

由图 11.3~11.5 可以看出，具有某些特定性质的稠密算子在小波基下可以用非常稀疏的形式来表示，这对与算子相关的一系列运算都非常方便。下面我们就来讨论小波基对算子的压缩表示能力。

若  $T$  是 Calderon-Zygmund 算子或拟微分算子，且采用的小波函数有  $M$  阶消失矩，那么在非标准形式中三元素组  $\{A_j, B_j, G_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  对应的矩阵元素以大约  $1/d^{M+1}$  的速度下降，其中  $d$  是矩阵元素到对角线的距离。如果在一定精度范围内将所有足够小的元素都视为零，那么算

子的非标准形式矩阵表示就是带宽的，也即稀疏的。具体的说，若算子  $T$  的核函数  $K(x, y)$  满足

$$|K(x, y)| \leq \frac{1}{|x - y|} ;$$

$$\left| \frac{\partial^M}{\partial x^M} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) \right| \leq \frac{C_0}{|x - y|^{1+M}} , \quad (11.33)$$

且选取消失矩为  $M$  的小波对算子  $T$  作变换，那么就存在常数  $C_M$ ，使得  $T$  的非标准形式中的矩阵元素  $\mathbf{a}_{i,l}^j, \mathbf{b}_{i,l}^j, \mathbf{g}_{i,l}^j$  满足： $\forall |i - l| \geq 2M$ ，

$$|\mathbf{a}_{i,l}^j| + |\mathbf{b}_{i,l}^j| + |\mathbf{g}_{i,l}^j| \leq \frac{C_M}{|x + y|^{1+M}} . \quad (11.34)$$

若核函数  $K(x, y)$  还满足  $\forall I, \int_{I \times I} K(x, y) dx dy \leq C|I|$ ，那么(11.34)对任意  $i, l$  均成立。

由上可知，小波系下算子矩阵的元素主要集中在对角线附近，离对角线越远处的元素绝对值越小。为此我们令  $T_0$  对应的非标准形式的矩阵中所有距离对角线  $B/2$  以外的元素均为零 ( $B \geq 2M$ )，这样就得到  $T_0$  的近似  $\tilde{T}_0$ 。 $\tilde{T}_0$  是带宽矩阵(带宽为  $B$ )，且  $\|\tilde{T}_0 - T_0\| \leq \frac{C_K}{B^M} \cdot S$ ，其中  $C_K$  是只与核函数  $K$  有关的常数， $S$  是矩阵表示中的尺度数目。这里的带宽矩阵  $\tilde{T}_0$  是对  $T$  作截断近似得到的，在实际的数值计算中，若  $M$  给定，根据(11.34)，只要选择带宽  $B$  满足  $B \geq (C_K \cdot S / \epsilon)^{1/M}$  就可以使算法精度控制在  $\epsilon$  以内。

### 11.3 基于小波变换求解微分方程

在上一节中我们知道，以 Caldrón-Zygmund 算子和拟微分算子为代表的一大类算子都可以在小波基下用稀疏矩阵(带宽矩阵)表示。例如考虑积分算子  $T(f)(x) = \int K(x, y)f(y)dy$  并构造它在二维小波基下的矩阵表达式。可以发现该矩阵的各子块中元素值(作为关于它到对角线距离的函数)的下降速度要比原始核形式下大得多，且小波的消失矩越大，下降得越快。这样一来，在给定精度要求下，可以对矩阵元素作带宽近似，进而构造快速算法，减少计算量提高算法效率。

需要指出的是，就对算子的要求来说，小波既可以用来结合求解积分方程，也可以求解微分方程边界问题，但是小波在各种情形下的作用是有差别的。一般说来，微分方程离散化后得到的是一个稀疏线性系统，其系数矩阵的条件数一般很大；而积分方程离散化后得到的则是小条件数的稠密线性系统。进一步的，微分算子对应的矩阵的条件数随系统规模的增大以多项式速度增长。例如，二阶微分算子的离散化矩阵的条件数以  $1/h^2$  (或  $N^2$ ) 的速度

增长，其中  $h$  为步长， $N$  是离散后的点数；而二阶积分算子的离散化矩阵的条件数不随步长的减小而增加，但它是稠密的。在微分方程求解中，小波可以有效减小系数矩阵的条件数，改善方程的病态程度，提高算法性能；对积分方程来说，小波则可以将原来稠密的系数矩阵用稀疏阵表示，这样就大大减少的计算代价，加快了问题求解的速度。为简要起见，下面我们主要介绍小波在微分方程求解中的应用，至于积分方程求解，其本质思想是一致的，这里不一一赘述。

### 11.3.1 一个典型的例子

下面我们以椭圆方程边值问题为例说明如何基于小波方法求解偏微分方程。在如多重网格方法之类的经典方法中，Green 函数的矩阵形式中一般有  $O(N^2)$  个不同元素，很难得到构造该矩阵的快速算法，但是 Green 函数的小波基表示的矩阵中只有  $O(N)$  个非零元素，只需要  $O(N)$  的计算就可以构造得到。一旦 Green 函数确定以后，原问题的求解就化为矩阵和矢量相乘，在小波系下所需的计算下降为  $O(N)$ 。基于以上事实，这里主要描述如何用快速算法构造 Green 函数。

对于这类有边界值的微分方程，在小波系下总存在对角预条件子，所以算法中有关的代数运算都可以通过与条件数为  $O(1)$  的矩阵的乘法实现，求解整个线性系统的计算量为  $O(N)$ ，其中  $N$  是离散化的线性方程组的规模。下述椭圆方程的求解中将使用预条件方法。

考虑两点边界值问题

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (11.35)$$

其中  $a(x)$  足够光滑且  $a(x) > 0, x \in (0,1)$  (显然  $L$  是椭圆型微分算子，事实上对于更一般的

椭圆型微分算子： $Lu \equiv \frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du}{dx} \right) - b(x)u$ ，下面的方法同样适用)。

将区间  $[0,1]$  划分为间隔为  $h$  的交错网格并离散化 (11.35) 得到如下线性方程组：

$$a_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} - (a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}}) u_i + a_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i=1, \dots, N, \quad (11.36)$$

其中  $u_i = u(x_i)$ ， $a_{i+\frac{1}{2}} = a(x_{i+\frac{1}{2}})$ ， $f_i = f(x_i)$ ， $x_i = ih$ ， $x_{i+\frac{1}{2}} = (i+\frac{1}{2})h$ ，且令

$$u_0 = u_{N+1} = 0。$$

这样(11.36)就可以写为

$$Lu = f \quad (11.37),$$

其中  $L$  为  $N \times N$  的矩阵：



$$L = \begin{bmatrix} -(a_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{3}{2}}) & a_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{\frac{3}{2}} & -(a_{\frac{3}{2}} + a_{\frac{5}{2}}) & a_{\frac{5}{2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-\frac{3}{2}} & -(a_{N-\frac{3}{2}} + a_{N-\frac{1}{2}}) & a_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-\frac{1}{2}} & -(a_{N-\frac{1}{2}} + a_{N+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}. \quad (11.38)$$

注意到  $L$  是带宽的稀疏矩阵，但是其条件数通常很大。事实上，若 (11.35) 中  $a(x)=1$ ，那么  $L$  就是二阶微分算子  $d^2/dx^2$  对应的差分矩阵，它的条件数为  $O(N^2)$ ；一般的，当  $a(x)$  在区间  $(0,1)$  上不是常值函数时，系数矩阵的条件数还要再乘以  $a(x)$  的离散化后的矩阵的条件数，因而可以任意大。 $L$  的条件数很大就意味着直接求解线性系统 (11.37) 非常困难，有必要寻求更为有效的途径来构造  $L$  的逆算子  $L^{-1}$ 。注意到  $L^{-1}$  在通常的表示下是稠密的，但是问题 (11.35) 的逆算子  $L^{-1}$  的核函数满足条件 (11.33)，因而在小波系下有稀疏表示，这提示我们可以考虑由  $L$  出发在小波系下构造  $L^{-1}$ 。

### 11.3.2 原问题的周期化

下面首先将原问题周期化，也就是系数矩阵转化为循环矩阵的形式。这是因为周期化微分算子在小波基下的预条件子是对角矩阵，从而能给系统求解带来极大方便。小波在这里的作用主要体现在可以提供一个有效的坐标系（或基函数），使得原本条件数很大的系数矩阵在该坐标系下可以通过一个对角预条件子控制条件数至  $O(1)$  大小，这种小波结合预条件的方法不但实现简单而且非常有效。

为了利用周期微分算子的优良性质，这里通过如下变换将  $L$  转化为一个循环矩阵和两个小扰动矩阵之和的形式：

$$L = A - a_{\frac{1}{2}} e_1 e_N^T - a_{N+\frac{1}{2}} e_N e_1^T \quad (11.39),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -(a_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{3}{2}}) & a_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{\frac{1}{2}} \\ a_{\frac{3}{2}} & -(a_{\frac{3}{2}} + a_{\frac{5}{2}}) & a_{\frac{5}{2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-\frac{3}{2}} & -(a_{N-\frac{3}{2}} + a_{N-\frac{1}{2}}) & a_{N-\frac{1}{2}} \\ a_{N+\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-\frac{1}{2}} & -(a_{N-\frac{1}{2}} + a_{N+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix},$$

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T, e_N = (0, \cdots, 0, 1)^T.$$

假设  $a$  在  $[0,1]$  上变化不剧烈，为了说明在小波坐标系下对角预条件子的作用，不妨令  $a=1$ ，则有  $A=D$ ，其中

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

记  $D_v^P = PD_vP$  , 其中  $D_v$  是  $D$  在小波系下标准形式的矩阵表示 , 对角预条件子  $P$  的元素为  $P_{i,l} = \mathbf{d}_{i,l} 2^j, 1 \leq j \leq n$  , 矩阵规模  $N = 2^n$  , 下表列出了矩阵  $D$  的条件数  $k$  和  $D_v^P$  的条件数  $k_p$  。

表 11.3 二阶周期化微分算子在小波系下对应的系数矩阵的条件数 , 其中小波为具有  $M$  阶消失矩的

| Daubechies 小波 |                      |               |               |
|---------------|----------------------|---------------|---------------|
| $N$           | $k$                  | $k_p (M = 3)$ | $k_p (M = 6)$ |
| 32            | $0.10409 \cdot 10^3$ | 8.021         | 5.2002        |
| 64            | $0.41535 \cdot 10^3$ | 9.086         | 5.2610        |
| 128           | $0.16605 \cdot 10^4$ | 10.019        | 5.2897        |
| 256           | $0.66405 \cdot 10^4$ | 10.841        | 5.3035        |
| 512           | $0.26562 \cdot 10^5$ | 11.562        | 5.3103        |
| 1024          | $0.10625 \cdot 10^6$ | 12.197        | 5.3137        |

由表 11.3 容易看出 , 小波结合对角预条件子的方法可以非常有效的改善原系统的病态 ( 条件数很大 ) 特点 , 使得系统求解变得简单可行 , 且小波的消失矩越高 , 变换后系统的性质越好 ( 条件数越小 ) 。

下面就来介绍如何在小波系下求两点边界值问题的算子矩阵。记离散小波变换的变换阵为  $W$  , 当选择正交小波时 ,  $W$  是正交矩阵。在小波系下(11.37)和 ( 11.39 ) 可以改写为 :

$$(A_w - a_{\frac{1}{2}} \hat{e}_1 \hat{e}_N^T - a_{N+\frac{1}{2}} \hat{e}_N \hat{e}_1^T) \hat{u} = \hat{f} , \quad (11.40)$$

其中  $A_w = WAW^*$  ,  $\hat{u} = Wu$  ,  $\hat{f} = Wf$  ,  $\hat{e}_l = We_l, l = 1, N$  .

在计算  $N = 2^n$  阶矢量的离散小波变换时 , 最终将在最粗尺度上得到两个系数 : 一个表示元素间的差异的高频系数 , 一个表示总体均值低频系数。注意到矢量的总体均值正比于矢量各元素之和 , 而  $A$  的各行元素的和为 0 , 因此  $A_w$  有以下形式 :

$$A_w = \begin{bmatrix} B & 0 \\ c^T & 0 \end{bmatrix} ,$$

其中  $B$  是  $(N-1) \times (N-1)$  的满秩矩阵 , 其条件数正比于  $N^2$  , 下面考虑如何确定矢量  $c^T$  。如果在求  $A_w$  时首先对矩阵  $A$  的各列作小波变换 , 那么变换矩阵的最后一行为

$$\mathbf{r}(a_{N+\frac{1}{2}} - a_{\frac{1}{2}})(e_1^T - e_N^T) ,$$

其中参数  $\mathbf{r}$  依赖于矩阵  $A$  的规模  $N$  。要得到矩阵  $A_w$  , 还要接着对中间矩阵的各行再作小波变换 , 从而得到  $(c^T, 0) = \mathbf{r}(a_{N+\frac{1}{2}} - a_{\frac{1}{2}})(\hat{e}_1^T - \hat{e}_N^T)$  。

进一步引入记号

$$\hat{e}_l = \begin{pmatrix} r_l \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, l=1, N ,$$

其中  $r_l$  是  $N-1$  阶矢量,  $\mathbf{r}$  是尺度因子,

$$\hat{u}_l = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \hat{f} = \begin{pmatrix} f^d \\ f^s \end{pmatrix}, \text{又记 } 2a = a_{\frac{1}{2}} + a_{N+\frac{1}{2}}, \mathbf{a} = a_{\frac{1}{2}}/(2a), \mathbf{b} = a_{N+\frac{1}{2}}/(2a), \text{则 (11.40)}$$

可以改写为

$$\left[ \begin{pmatrix} B & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} - 2a \begin{pmatrix} \mathbf{a}r_1^T + \mathbf{b}r_N^T & \mathbf{r}(\mathbf{a}r_1 + \mathbf{b}r_N) \\ \mathbf{r}(\mathbf{a}r_N^T + \mathbf{b}r_1^T) & \mathbf{r}^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^d \\ f^s \end{pmatrix}, \quad (11.41)$$

其中  $c^T = 2a\mathbf{r}(\mathbf{b} - \mathbf{a})(r_1^T + r_N^T)$ 。将

$$s = -\frac{(\mathbf{a}r_1^T + \mathbf{b}r_N^T)d}{\mathbf{r}} - \frac{f^s}{2a\mathbf{r}^2}$$

带入 (11.41) 得到关于  $d$  的  $(N-1)$  阶线性方程组:

$$\left[ B + 2a(\mathbf{a}^2 r_1 - \mathbf{b}^2 r_N)(r_1^T - r_N^T) \right] d = f^d - \frac{f^s}{\mathbf{r}}(\mathbf{a}r_1 + \mathbf{b}r_N). \quad (11.42)$$

基于小波求解两点边界值问题(11.35)的主要依据就是这里的矩阵  $B^{-1}$  是稀疏的, 只需要

$O(N)$  计算就可以得到。下面就来构造矩阵  $B^{-1}$ , 对 (11.42) 用 Sherman-Morrison 公式得

$$d = \left[ B^{-1} - \mathbf{s}B^{-1}(\mathbf{a}^2 r_1 - \mathbf{b}^2 r_N)(r_1 - r_N)^T B^{-1} \right] \cdot \left[ f^d - \frac{f^s}{\mathbf{r}}(\mathbf{a}r_1 + \mathbf{b}r_N) \right], \quad (11.43)$$

$$\text{其中 } \mathbf{s} = \frac{2a}{1 + 2a(r_1 - r_N)^T B^{-1}(\mathbf{a}^2 r_1 - \mathbf{b}^2 r_N)}.$$

进一步将逆算子  $L^{-1}$  表示成形如

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma & P \\ q^T & \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (11.44)$$

可以得到

$$\Gamma = B^{-1} - \mathbf{s}B^{-1}(\mathbf{a}^2 r_1 - \mathbf{b}^2 r_N)(r_1 - r_N)^T B^{-1}, \quad (11.45)$$

$$P = -\frac{1}{\mathbf{r}} \left[ B^{-1}(\mathbf{a}r_1 + \mathbf{b}r_N) - \mathbf{s}k_1 B^{-1}(\mathbf{a}^2 r_1 - \mathbf{b}^2 r_N) \right], \quad (11.46)$$

$$q^T = -\frac{1}{\mathbf{r}} \left[ (\mathbf{a}r_1^T + \mathbf{b}r_N^T)B^{-1} - \mathbf{s}k_2(r_1 - r_N)^T B^{-1} \right], \quad (11.47)$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\mathbf{r}^2} \left( \mathbf{k}_3 - \mathbf{s}k_2 k_1 - \frac{1}{2a} \right), \quad (11.49)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} \mathbf{k}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_N)^T B^{-1} (\mathbf{a}\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\mathbf{r}_N) \\ \mathbf{k}_2 = (\mathbf{a}\mathbf{r}_1^T + \mathbf{b}\mathbf{r}_N^T) B^{-1} (\mathbf{a}^2 \mathbf{r}_1 - \mathbf{b}^2 \mathbf{r}_N) \\ \mathbf{k}_3 = (\mathbf{a}\mathbf{r}_1^T + \mathbf{b}\mathbf{r}_N^T) B^{-1} (\mathbf{a}\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\mathbf{r}_N) \end{cases} \quad (11.50)$$

(11.45)到(11.50)中所有的矩阵和矢量的乘法都包括稀疏矩阵  $B^{-1}$  和稀疏矢量  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_N$  ,

因此构造逆算子  $L^{-1}$  就转化为计算  $B^{-1}$ 。

### 11.3.3 构造周期化微分算子的逆

首先对  $(N-1) \times (N-1)$  的矩阵  $B$  作如下变换： $B_p = PBP$  , 其中  $P$  为对角矩阵 ,

$P_{i,l} = \mathbf{d}_{i,l} 2^j, 1 \leq j \leq n, N - N/2^{j-1} + 1 \leq i, l \leq N - N/2^j$  . 这样  $B_p$  的条件数为  $O(1)$  。矩阵

$B, B_p$  均为满秩稀疏阵。我们用以下算法来求  $B_p^{-1}$  :

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathbf{a} B_p^* \\ X_{l+1} &= 2X_l - X_l B_p X_l \end{aligned} \quad (11.51)$$

其中  $0 < \mathbf{a} < 2/\mathbf{s}_1$  ,  $\mathbf{s}_1$  是  $B_p$  的**最大奇异值**。

对于满秩矩阵  $B_p$  , 迭代算法 (11.51) 收敛到  $B_p^{-1}$  , 迭代步数与  $B_p$  的条件数成正比 , 也即  $O(1)$ 。

如果矩阵  $B_p$ 、 $B_p^{-1}$  和所有中间矩阵  $X_l$  在小波基下均有稀疏表示 , 那么用 (11.51) 计算逆矩阵所需的运算量为  $O(1)$ 。我们已经知道  $B^{-1}$  在小波基下的表示是稀疏的 , 所以只要在迭代计算中保证中间矩阵  $X_l$  的稀疏性。在算法 (11.51) 的执行过程中 , 我们首先对每步迭代得到的矩阵中所有小于给定阈值的元素置零来求得低精度的近似逆矩阵 , 随着迭代步数的增加逐步降低阈值来提高近似解的精度。在给定精度要求下求得  $B_p^{-1}$  以后 , 就可以按(11.52)很方便的得到  $B^{-1}$  :

$$B^{-1} = P B_p^{-1} P \quad (11.52) .$$

由于  $P$  是对角矩阵 , 所以在计算  $B_p = PBP$  和 (11.52) 的过程中只有乘法运算 , 无精度损失。特别的 , 这里都是对 2 的幂的乘法 , 所以不引入截断误差。

通过以上过程 , 我们就在小波系下构造得到了椭圆微分算子  $L$  的逆  $L^{-1}$ 。

### 11.3.4 注 记

在前文论述中我们总假设函数  $a$  在区间  $(0,1)$  上变化不大, 事实上当  $a$  存在变化时以上方法同样适用。

如果  $a$  是使得差分格式 (11.36) 适用于求解两点边值问题的函数, 那么在 (11.36) 两边同乘矩阵  $P_a = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_N}}\right)$  就得到:

$$\frac{a_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a_{i-1}a_i}}v_{i-1} - \frac{a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}}}{a_i}v_i + \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{a_i a_{i+1}}}v_{i+1} = h^2 \frac{f_i}{\sqrt{a_i}}, i=1, \dots, N, \quad (11.53)$$

其中  $v_i = \sqrt{a_i}u_i$ 。(11.53) 就是算子  $\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  的差分格式。

如果  $a$  足够光滑, 那么就有

$$\begin{aligned}\frac{a(x-\frac{1}{2}h)}{\sqrt{a(x-h)a(x)}} &= 1 + O(h^2), \\ \frac{a(x-\frac{1}{2}h) + a(x+\frac{1}{2}h)}{a(x)} &= 2 + O(h^2), \\ \frac{a(x+\frac{1}{2}h)}{\sqrt{a(x)a(x+h)}} &= 1 + O(h^2).\end{aligned}$$

这样与 (11.53) 对应的矩阵  $L$  就可以写为  $L = L_0 + h^2 R$ , 其中

$$L_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

给定算子  $L_0^{-1}$ , 我们有  $L^{-1} = L_0^{-1}(I + h^2 L_0^{-1}R)^{-1}$ , 因此只要计算  $(I + h^2 L_0^{-1}R)^{-1}$ . 如果

$T = -h^2 L_0^{-1}R$  的最大奇异值小于 1, 注意到  $(I - T)^{-1} = \prod_{j=0}^{\infty} (I + T^{2j})$ , 那么用前述求逆矩阵的算法 (11.51) 很容易求得  $L^{-1}$ 。

## 11.4 基于小波多尺度方法求椭圆微分算子的逆

上一节我们以一个最简单的椭圆方程边值问题为例, 描述了求其逆算子的基本思路。这一节从椭圆微分算子的一般表达式出发, 介绍如何基于小波方法求椭圆微分算子的逆。

考虑椭圆微分方程边值问题

$$Lu = f, x \in D \subset R^d, \quad (11.54)$$

$$Bu|_{\partial D} = g, \quad (11.55)$$

其中  $L$  是椭圆算子

$$Lu = - \sum_{i,j=1,\dots,d} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + b(x)u; \quad (11.56)$$

$B$  是边界算子

$$Bu = au + b \frac{\partial u}{\partial N}. \quad (11.57)$$

假设这里的区域边界  $\partial D$  形状很复杂, 且主要考虑  $d = 1, 2, 3$  的情形, 事实上本节介绍的算法对任意维数  $d$  都适用。

在理论上我们可以用按以下经典方法的各个步骤求解问题(11.54)和(11.55)：

1. 将函数  $f$  光滑的延拓到包含  $D$  的矩形区域  $B$  上并记为  $f_{ext} : D \subset B \subset R^d$ ,

$$f_{ext} = f, x \in D;$$

2. 求解周期边界条件问题

$$Lu = f_{ext}, x \in B \quad (11.58)$$

得到解  $u_{ext}$ ;

3. 令(11.54)的解具有形式  $u = u_{ext} + v$ , 其中  $v$  是下述问题的解：

$$Lv = 0, x \in D, \quad Bv|_{\partial D} = g - Bu_{ext}|_{\partial D};$$

这里着重考虑步 2 的求解。求解步 2 中方程的一般方法是首先在  $B$  中选取恰当的网格离散微分方程, 然后将其化为线性系统求数值解。由于离散化后的方程必须能够反映函数  $f$  在其奇异点以及光滑区域的特征, 所以当  $f$  不够规则时就需要选取很多的离散点, 也即区域的网格划分结构复杂, 进而导致离散后的线性系统复杂难解。目前普遍推荐的自适应算法在求解这类问题时, 需要综合考虑算法设计和程序实现, 当维数较高时通常会变得非常麻烦。这里我们将用小波基来表示函数, 利用小波优越的局部时频分析能力得到一种较为简便的算法。

为了说明问题的方便, 考虑周期边界条件的 Poisson 方程

$$\Delta u = f, x \in B. \quad (11.59)$$

设有尺度函数和小波函数对  $\{j, y\}$ , 它们的伸缩和平移构成  $L^2(R^d)$  的 MRA:  $\{V_j\}_{j \in Z}$ ,

$$V_j = \text{span}\{j_{j,k}(x), k \in Z^d, x \in R^d\}, \text{ 其中 } j_{j,k}(x) = 2^{-jd/2} \prod_{l=1}^d j(2^{-j}x_l - k_l), \quad V_{j+1} \subset V_j.$$

进一步的,  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ ,  $W_j = \text{span}\{y_{j,k}^s(x), k \in Z^d, x \in R^d\}$ , 从而  $L^2(R^d) = \bigoplus_{j \in Z} W_j$ ,

其中  $\mathbf{y}_{j,k}^s(x) = 2^{-jd/2} \prod_{l=1}^d \mathbf{y}^{s_l}(2^{-j}x_l - k_l)$  ,  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d) \neq \mathbf{0}$  ,  $\mathbf{y}^{s_l} = \begin{cases} \mathbf{y}, \mathbf{s}_l = 1 \\ \mathbf{j}, \mathbf{s}_l = 0 \end{cases}$

设我们考虑的最粗尺度为  $j = n$  , 则  $L^2(R^d) = V_n \oplus W_j$  , 这样就可以将函数  $f$  和待求  $u$  在小波系下表示为 :

$$f(x) = \sum_{j \leq n} \sum_k \sum_s f_{j,k}^s \mathbf{y}_{j,k}^s(x) + \sum_k s_{n,k}^f \mathbf{j}_{n,k}(x) ; \quad (11.60)$$

$$u(x) = \sum_{j \leq n} \sum_k \sum_s u_{j,k}^s \mathbf{y}_{j,k}^s(x) + \sum_k s_{n,k}^u \mathbf{j}_{n,k}(x) , \quad (11.61)$$

其中

$$f_{j,k}^s = \langle f, \mathbf{y}_{j,k}^s \rangle, u_{j,k}^s = \langle u, \mathbf{y}_{j,k}^s \rangle, s_{n,k}^f = \langle f, \mathbf{j}_{n,k} \rangle, s_{n,k}^u = \langle u, \mathbf{j}_{n,k} \rangle ; \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

在实际计算中 , 只可以处理形如(11.60)和(11.61)有限项分解式 , 由于小波具有优良的能量压缩性质 , 上述两式只需有限几项就可以很好的近似。事实上 , 如果定义函数  $f$  的  $\epsilon$ -精度子空间为可以用精度  $\epsilon$  表示函数  $f$  的空间 :

$$M_f^\epsilon = V_n \cup \{ \text{span}\{\mathbf{y}_{j,k}^s\} : (j,k,\mathbf{s}) : |f_{j,k}^s| > \epsilon \} ;$$

类似的定义解  $u$  的  $\epsilon$ -精度子空间 :

$$M_u^\epsilon = V_n \cup \{ \text{span}\{\mathbf{y}_{j,k}^s\} : (j,k,\mathbf{s}) : |u_{j,k}^s| > \epsilon \}.$$

那么有以下结论 :

设  $u(x) = \sum_{j \leq n} \sum_k \sum_s u_{j,k}^s \mathbf{y}_{j,k}^s(x) + C$  是周期边界条件的 Poisson 问题

$$\Delta u = \mathbf{y}_{j',k'}^{s'}(x), x \in B$$

的解 , 那么  $\forall \epsilon > 0$  ,  $\exists l > 0, m > 0$  , s.t. , 解的系数中所有满足  $|u_{j,k}^s| > \epsilon$  者均有  $|k - k'| \leq l$

且  $|j - j'| \leq m$  , 其中  $l$  和  $m$  的大小依赖于  $\epsilon$  的大小和小波基的选定。根据这个结论 , 若已经给

定  $M_f^\epsilon$  , 那么  $M_u^\epsilon$  一定落在  $M_f^\epsilon$  的附近宽度为  $l - m$  的邻域内。

要根据  $M_f^\epsilon$  直接估计  $M_u^\epsilon$  依然是很麻烦的 , 我们可以通过如下迭代方法由  $M_f^\epsilon$  出发逐步

得到  $M_u^\epsilon$  :

- (1)  $k = 0$  ;
- (2) 以  ${}_{(k)}M_f^\epsilon \triangleq M_f^\epsilon$  为解空间求解微分方程得到解  $u_{(k)}$  , 这时解  $u_{(k)}$  相对原问题的精度  $\epsilon_{(k)}$  通常大于  $\epsilon$  ;
- (3) 求  $u_{(k)}$  的 Laplace 变换得到  $f_{(k)}$  , 估计  $f_{(k)}$  的  $\epsilon$ -精度子空间  ${}_{(k+1)}M_f^\epsilon$  ;
- (4)  $k = k + 1$  , 转(2) ;

一般说来,以上迭代过程只需少数几步就可以达到指定精度要求,也即得到需要的  $M_u^e$ 。

得到  $M_u^e$  事实上也就是知道了对空间作多尺度分解的层数,在此基础上就可以将原问题化为一个小波系下线性系统求解的问题。在上一节的例子中已经指出,该系统的系数矩阵的条件数通常很大,直接求解非常困难,考虑到它在小波系下的特殊性质,可以找到对角预条件子,然后用预条件共轭梯度法(PCG)来快速求解。下面我们从算子运算角度简要描述该过程。

按照本章第一节的算子小波表示方法可以将(11.59)化为

$$L_{ns}u_w = f_w \quad (11.62),$$

其中  $L_{ns}$  是椭圆微分算子对应的非标准形式的矩阵,  $u_w$  和  $f_w$  是函数  $u$  和  $f$  在相应小波系下的离散向量表示。这里的  $L_{ns}$  是稀疏的带宽矩阵但是条件数通常非常大,设  $P$  是  $L_{ns}$  的一个对角预条件子,并记  $u = Pv$ , 那么(11.52)可以改写为

$$PL_{ns}Pv = Pf_w \quad (11.63)。$$

与直接求解(11.62)相比,  $\tilde{L}_{ns}v = \tilde{f}_w$  的求解要简便的多(其中  $\tilde{L}_{ns} = PL_{ns}P, \tilde{f}_w = Pf_w$ ), 因为  $\tilde{L}_{ns}$  的条件数为  $O(1)$ , 以上正是 PCG 的基本思想和主要求解步骤。

需要特别说明的是,对于椭圆微分算子在小波系下的非标准形式矩阵  $L_{ns}$ , 总存在对角预条件子  $P$ 。如对于二阶微分算子,  $P = (P_{i,k})_{N \times N} = (d_{i,k} 2^j)_{N \times N}$ , 其中  $1 \leq j \leq N$  且满足  $N - N/2^{j-1} + 1 \leq i, k \leq N - N/2^j$ ,  $P_{N,N} = 2^N$ ,  $N$  是离散化矩阵的规模。考虑到  $P$  的选取在这里举足轻重,所以下面着重介绍  $P$  的构造,至于已知  $P$  以后微分方程的求解就不再赘述。

首先考虑  $L = -\Delta + C$  的情形,其中  $\Delta$  是 Laplace 算子,  $C$  是常算子。注意到若算子  $A$  和  $B$  在小波系下的矩阵表示均为对角矩阵,且对角线上的元素为  $a_i$  和  $b_i$ , 那么以  $1/(a_i + b_i)$  为对角元素的对角阵可以作为算子  $A+B$  的预条件子。对算子  $L = -\Delta + C$  来说,单位恒等算子在小波系下仍对应单位矩阵;  $\Delta$  的矩阵表示则是带宽的,并非对角阵,但是该带宽矩阵存在对角预条件子,所以这里用该预条件子代替  $\Delta$  在  $\bigoplus_{j \leq n} W_j$  下构造  $L = -\Delta + C$  的预条件子得到

$$P_{i,k} = \frac{d_{i,k}}{\sqrt{2^{-2j} + C}} \quad (11.54),$$

其中  $1 \leq j \leq N$  且满足  $N - N/2^{j-1} + 1 \leq i, k \leq N - N/2^j$ ,  $P_{N,N} = 1/\sqrt{2^{-2N} + C}$ ,  $N$  是离散化矩阵的规模。

数值实验表明,形如(11.64)的预条件子是非常有效的。下表列出的是将算子  $-\frac{d^2}{dx^2} + C$  在



小波系下离散为  $256 \times 256$  的矩阵后用(11.64)的预条件子作用前后的条件数。

表 11.4  $-\frac{d^2}{dx^2} + C$  在消失矩为 6 的 Daubechies 小波系下对应的算子矩阵的条件数  $k$  以及用对角预条件子作用后的条件数  $k_p$ 。

|       | 件子作用后的条件数 $k_p$ 。 |                      |                      |                      |                      |                      |
|-------|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| C     | $7.1 \times 10^0$ | $7.1 \times 10^{-1}$ | $7.1 \times 10^{-2}$ | $7.1 \times 10^{-3}$ | $7.1 \times 10^{-4}$ | $7.1 \times 10^{-5}$ |
| $k$   | $2.4 \times 10^0$ | $1.5 \times 10^1$    | $1.4 \times 10^2$    | $1.3 \times 10^3$    | $6.7 \times 10^3$    | $1.5 \times 10^4$    |
| $k_p$ | 2.1               | 6.3                  | 9.4                  | 9.5                  | 7.5                  | 5.0                  |

当算子为  $L = -\Delta + C(x)$  时，可以选定尺度  $j$ ，使得  $C(x)$  在该尺度上的小波函数的支撑

集上变化不大，这样就可以考虑用下述对角算子  $C^{diag}$  来代替  $C$ ：

$$(C^{diag} \mathbf{y}_{j,k}^s) = C(x_{j,k}) \mathbf{y}_{j,k}^s,$$

其中  $x_{j,k}$  是  $\mathbf{y}_{j,k}^s$  支撑集内的点。这时就可以用前述方法构造算子  $\tilde{L} = -\Delta + C^{diag}$  的对角预条件子来作为  $L = -\Delta + C(x)$  的预条件子。

附：

#### 1. Calderón-Zygmund 算子

设  $\Omega = \{(x, y) \in R^n : x \neq y\}$ ，函数  $K(x, y)$  在  $\Omega$  上有定义。 $T : D(R^n) \rightarrow D'(R^n)$  是连续线性算子，如果存在常数  $C_0, C_1, C_2$  以及  $g \in (0, 1]$  使得以下条件满足，那么  $T$  就是一个 Calderón-Zygmund 算子：

- (1)  $K(x, y)$  在  $\Omega$  上局部可积且  $|K(x, y)| \leq C_0 |x - y|^{-n}$ ；
- (4) 若  $(x, y) \in \Omega$  且  $|x' - x| \leq |x - y|/2$ ，则  $|K(x', y) - K(x, y)| \leq C_1 |x' - x|^g |x - y|^{-n-g}$ ；
- (5) 若  $(x, y) \in \Omega$  且  $|y' - y| \leq |x - y|/2$ ，则  $|K(x, y') - K(x, y)| \leq C_1 |y' - y|^g |x - y|^{-n-g}$ ；
- (6)  $T$  可以延拓成  $L^2(R^n)$  的连续线性算子： $\|T\| \leq C_2$ ；

#### 2. Pseudo-differential Operator (拟微分算子)

设  $X, Y$  均为  $R^n$  中的域， $z \in R^n$ ， $x \in X$ ， $f \in D(y)$ ， $a(x, y, z) \in S_{r,d}^m(X \times Y \times R^n)$ ，

$$S_{r,d}^m(X \times R^n) = \{a \in C^\infty(X \times R^n) \mid \exists m, \mathbf{r}, \mathbf{d} \geq 0, \mathbf{r} \leq 1, s.t.$$

$$|\partial_z^a \partial_x^\beta a(x, z)| \leq C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, K)(1 + |z|)^{m-r|\mathbf{a}|+d|\mathbf{b}|}\}$$

若算子  $T$  形如：

$$T(f)(x) = \iint e^{j(x-y)z} a(x, y, z) f(y) dy dz,$$

则称  $T$  是拟微分算子，其中  $D$  表示  $R^n$  中所有具有紧支撑的无穷可微函数组成的空间。容易

验证，线性微分  $T = \sum_{n=0}^m a_n D^n, a_n \in C^\infty(X), X \subset R^n$  算子是拟微分算子的一个特例。