第五章 大数定律及中心极限定理

一、大数定律

二、中心极限定理

三、中心极限定理的初步应用

两个问题

① 若$X_1, X_2, \dots X_n \dots$为随机变量数列，而 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，那么随着 $n \longrightarrow +\infty$，$Y_n$的是否稳定于某个常数？

➢ 所谓“稳定性”，粗略地说，也就是考察是否存在常数a，对任意 ε，使

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

② 若$X_1, X_2, \dots X_n \dots$为随机变量，随着 $n \longrightarrow +\infty$，$\sum_{i=1}^{n} X_i$的分布将会如何？

➢ 从分析的角度讲，这两个问题一个是随机事件概率的极限问题，一个是分布的极限问题，相应的一系列结论分别被称为“大数定律”、“中心极限定理”，统称<u>极限定理</u>。

一、大数定律

在大量的随机试验中，由于各次的随机性（偶然性）相互抵消又相互补偿，因而其平均结果趋于稳定，而阐明大量随机现象平均结果稳定性的定理，称为大数定律。

某随机事件A在一次试验中可以发生也可以不发生，但在大量独立重复试验中随机事件A出现的频率$f_n(A)$在某个固定常数p附近摆动，这就是所谓“频率稳定性”。

如何描述这种稳定性呢？利用极限的思想。

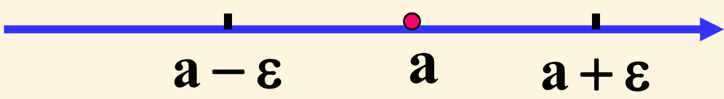
但这种“稳定”性与高数中数列的极限概念不相同，因为频率$f_n(A)$本质上是一个随机变量。

因此需要对随机变量序列引进新的收敛性定义。

$$f_n(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ X_i=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$$

【定义1】设$X_1, X_2, \ldots$是r. v序列，若存在常数a，使得 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$



则称 $X_n \xrightarrow{P} a$ （依概率收敛于a）

当n越来越大时，X_n落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内的可能性也越来越大。

说明：现在再来看“频率稳定性”：

$r.v$的频率 $\dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，与概率 p非常接近，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$

（一）切比雪夫大数定律

定理1： 设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量序列，它们的数学期望和方差均存在，且方差有公共上界（$D(X_i)\leqslant M$），则对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

证明：$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$，　$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\leq\frac{M}{n}$

由切比雪夫不等式知，对$\forall\varepsilon>0$，有

$$1\geq P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\varepsilon^2}\geq 1-\frac{M}{n\varepsilon^2}$$

由夹挤准则 $\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\}=1$

$$P\{\ |X-\mu|<\varepsilon\ \}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

（一）切比雪夫大数定律

定理1： 设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，它们的数学期望和方差均存在，且方差有公共上界（$D(X_i)\leqslant M$），则对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$ 依概率收敛于0.

1 假设随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立且服从同参数 λ 的泊松分布，则不满足切比雪夫大数定律条件的随机变量序列就有

(A) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$.　　(B) $X_1+1,X_2+2,\cdots,X_n+n,\cdots$.

(C) $X_1,\frac{1}{2}X_2,\cdots,\frac{1}{n}X_n,\cdots$.　　(D) $X_1,2X_2,\cdots,nX_n,\cdots$.（本题失误率为18%）

推论 设$X_1, X_2, \ldots, X_n\ldots$为独立随机变量序列，且有相同的数学期望和方差，$E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$, $(i=1,2,\ldots)$, 则对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

意义： n个相互独立的具有相同期望和方差的随机变量，当n充分大时，随机变量的算术平均几乎就等于它们的数学期望。

重要特例： 用X_i表示在第i次伯努利试验中A发生的次数,记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{如第}i\text{次试验}A\text{发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad i=1,2,\ldots,n$$

则 $f_A=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i\sim b(1,p)$ $\quad E(X_i)=p$, $\quad D(X_i)=p(1-p)$

于是可得下述伯努利大数定律

（二）伯努利大数定律

定理2： 设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|<\varepsilon\}=1$$

对$r.v$ 序列$\{X_n\}$的分布、独立性、期望、方差等各条件的不同组合，可导出不同的大数定律。

意义

①可以用频率来近似表示事件的概率.

当n 充分大时，频率稳定于概率 p 。

②p很小时，频率也很小。 ⟹ 小概率事件很少发生！

在一次实验中不可能发生！

（三）辛钦大数定律

设$X_1, X_2, \ldots, X_n\ldots$为独立、同分布的随机变量，且有相同的数学期望$E(X_i)=\mu$（i=1,2,…），则对∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

不要求随机变量的方差存在

注：在不知道r.vX分布的情况下，估计X的期望值.

填空题：随机变量$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$相互独立，

且都服从参数为2的指数分布，则当$n\to\infty$时，

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$ 依概率收敛于(　　).

637 设随机变量序列$X_1,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，则根据辛钦大数定律，当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$依概率收敛其数学期望，只要$\{X_n, n\geqslant 1\}$

(A) 有相同的数学期望.
(B) 服从同一离散型分布.
(C) 服从同一泊松分布.
(D) 服从同一连续型分布.

二、中心极限定理

1、引入

在实际问题中，常常需要考虑许多随机因素所产生总影响.

例如：炮弹射击的落点与目标的偏差，就受着许多随机因素的影响. 如瞄准时的误差，空气阻力所产生的误差，炮弹或炮身结构所引起的误差等等.

不同因素所引起的局部误差可看作是相互独立的，而且每一个因素在总影响中所起的作用不大. 则由这许多相互独立的随机误差所组成的整个误差服从正态分布.

设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$为相互独立的随机变量，Y_n表示前n项和，即

$Y_n=\sum_{n=1}^{n}X_n$，研究Y_n在n无限增大时的极限分布。

由于无穷个$r.v$之和可能趋于∞，故我们不研究n个$r.v$之和本身而考虑它的标准化的$r.v$ $Y_n^*=\dfrac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}$ 的分布函数的极限.

若诸X_i独立同分布， 设$E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2\neq 0, i=1,2,\cdots n,\cdots$

则 $E(Y_n)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\mu$ $\quad D(Y_n)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=n\sigma^2$

$$\therefore Y_n^*=\frac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

$r.v\ Y_n^*$ 的分布函数为$F_n(x)$

$$F_n(x)=P\{Y_n^*\leq x\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}\xrightarrow{n\to\infty}\Phi(x)$$

----独立同分布中心极限定理

2、独立同分布中心极限定理

定理4（列维-林德伯格中心极限定理）

设$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$独立同分布，$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2\neq 0$，则对任意实数 x

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

注意条件：独立同分布…

- **意义**：无论各r. v. X_n的分布为何(离散或连续)，都有(当$n\to\infty$时)

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,\ 1) \quad \text{进而} \quad \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

- 从理论上说明了正态分布的重要性，初步说明了为什么在实际应用中会经常遇到正态分布。
- 提供了计算独立同分布r. v和的分布的近似方法，这在应用上十分重要和有效。

2、独立同分布中心极限定理

定理4（列维-林德伯格中心极限定理）

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$独立同分布，$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2\neq 0$，则对任意实数 x

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

2 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据列维—林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，

(A) 有相同的期望和方差. (B) 服从同一离散型分布.

(C) 服从同一指数分布. (D) 服从同一连续型分布.

（本题失误率为 17%）

推论：贝努利试验的场合下得到下面定理

3、棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

定理5（棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理） 设$Z_n \sim B(n,p)$，$n=1,2,\ldots$，则对任意实数x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x)$$

❖**说明:**

(1)只要将Z_n看成是n个独立且服从$B(1,p)$的r.v之和,由Th4即得。

(2)若$X \sim B(n, p)$，则当n很大时有

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$$

泊松定理：$X \sim \pi(\lambda)$(近似地)

对任意区间$[a, b]$有

$$P\left\{a \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

553 设两两相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 必服从切比雪夫大数定律，如果 X_i，$i=1,2,\cdots\cdots$

(A) 有相同数学期望.

(B) 服从同一离散型分布.

(C) 服从同一连续型分布.

(D) X_{2i} 服从泊松分布 $P(\lambda_2)$，X_{2i-1} 服从泊松分布 $P(\lambda_1)(i=1,2,\cdots\cdots)$　$\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

554 设 X_n 表示将一硬币随意投掷 n 次“正面”出现的次数，则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

三、中心极限定理的初步应用

归纳前面所述，有

- 若r.v序列$\{X_k\}$独立同分布,且$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2$, (k=1,2,…), 则近似有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,\ 1)$$

进而可求$P\{a<Y_n<b\}$或$P\{Y_n>a\}$等等。 $(Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k)$

- 若X~$B(n,p)$,则n 很大时, 近似有 $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

要点： 标准化和正态近似，且n越大，近似值越精确

n很大，$p\leq 0.05$时用泊松分布近似；
n很大，p不很小时用标准正态分布近似；

例1 一射击运动员，在一次射击中所得环数X的概率分布如下：

X	10	9	8	7	6
p	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

问在100次射击中所得总环数介于900环与930环之间的概率是多少？

解：设X_i为第i次射击所得环数，则$X_i(i=1,2,\ldots,100)$独立同分布

$$\mu=E(X_i)=9.15,\quad E(X_i^2)=84.95,\qquad \sigma^2=D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)\approx 1.23$$

在100次射击中所得的总环数即为 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$

由独立同分布中心极限定理，有 $Y_n^*=\dfrac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\sim N(0,1)$

$$\therefore P\{900\le Y\le 930\}=P\{\frac{900-100\times 9.15}{10\times\sqrt{1.23}}\le\frac{Y-100\times 9.15}{10\times\sqrt{1.23}}\le\frac{930-100\times 9.15}{10\times\sqrt{1.23}}\}$$

$$=P\{-1.35\le Y_n^*\le 1.35\}\approx\Phi(1.35)-\Phi(-1.35)=\cdots\approx 0.823$$

说明：①若不知X_i分布律，但知$E(X_i)=9.15$, $D(X_i)=1.23$, 做法相同。

②若X_i是C.r.v, 方法相同

例2 一加法器同时收到48个噪声电压$V_i(i=1,2,\ldots,48)$, 设它们是相互独立的随机变量, 且都服从(0,10)上的均匀分布。记 $V=\sum_{i=1}^{48} V_i$, 求$P\{V>270\}$的近似值。

解: $E(V_i)=5$, $D(V_i)=100/12$,

由中心极限定理得

$\dfrac{V-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的近似分布 $N(0, 1)$

进而 $P\{V>270\}=P\{\dfrac{V-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}>\dfrac{270-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\}$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{270-48\times 5}{\sqrt{48}\dfrac{10}{\sqrt{12}}}\right)=1-\Phi(1.5)=0.0668$$

例5. 3 (供电问题)某车间有200台车床, 设开工率为0.6, 并设每台车床的工作是独立的，且在开工时需电力1千瓦.问应供应多少瓦电力就能以99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产?

解: 设X为某时刻工作着的车床数， 依题意，X~B(200,0.6),

设需供应N千瓦电力,求满足 P(X≤N)≥0.999 的最小的N.

由德莫佛-拉普拉斯极限定理 $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

故 $P(X\le N) \approx \Phi\left(\dfrac{N-120}{\sqrt{48}}\right) \ge 0.999$

查表得 $\Phi(3.1)=0.999$ 即 $\dfrac{N-120}{\sqrt{48}} \ge 3.1$

解得N≥141.5, 即 N=142 ∴应供应142 千瓦电力…

思考题 每次射击命中目标的炮弹数的数学期望为2，均方差为1.5，求在100次射击中，有180发到220发炮弹击中目标的概率。

解： X_i表示第i次射击中击中目标的炮弹数，

Y表示100次射击中击中目标的炮弹数，则 $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$

而X_i, $i=1,2,\ldots,100$,是独立、同分布的，且$E[X_i]=2$, $\sigma[X_i]=1.5$

由同分布中心极限定理知，近似地有

$$Z=\frac{Y-nE[X_i]}{\sqrt{n}\sigma[X_i]}\sim N(0,\ 1)$$

$$\therefore P\{180\le Y\le 220\}=P\{\frac{180-200}{10\times 1.5}\le\frac{Y-200}{10\times 1.5}\le\frac{220-200}{10\times 1.5}\}$$

$$=P\{-4/3\le Z\le 4/3\}=\Phi(4/3)-\Phi(-4/3)=\ldots$$

小结

大数定律——$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 取值概率的极限问题，内容，意义？

中心极限定理——$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 标准化r. v分布的极限问题，

内容，意义？可以帮助我们解决什么问题？

P_{100} 3，6