回顾

数

字

特

征

1. 数学期望的计算公式

$$\begin{cases} E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \end{cases} \quad \begin{cases} E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\cdot p_k \\ E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} \\ E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy$$

2. 数学期望的性质

1. 设C是常数，则E(C)=C;

2. 若C是常数, 则E(CX)=CE(X);

3. E(X+Y) = E(X)+E(Y);

4. 设X、Y独立, 则E(XY)=E(X)E(Y)

§2 方差

Deviation　Variance

一、方差的引入

二、方差的定义

三、方差的计算方法

四、方差的性质

五、切比雪夫不等式

一、方差的引入

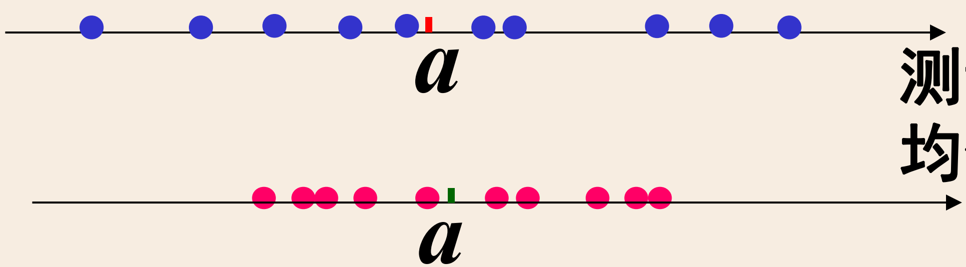
我们知道，随机变量的数学期望反映了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

如某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：

甲仪器测量结果

乙仪器测量结果



测量结果的均值都是 a

问：根据上述结果，哪台仪器好一些呢？

乙仪器较好， 因为乙仪器的测量结果集中在均值附近。

因此需要引进另一个数字特征来刻划随机变量取值在其中心附近的分散程度——方差。

二、方差的定义 Deviation Variance

定义1 设X是一随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,则称之为X的方差，记为D(X)或*Var*(X)。即

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

说明:（1）实际意义:

- ❖ 常数E(X) ——X的均值;
- ❖ X-E(X) ——X的取值与均值的偏差;
- ❖ $[X-E(X)]^2$——偏差的平方，也是*r.v*;
- ❖ 非负常数D(X)=E {$[X-E(X)]^2$}偏差平方的期望。

方差刻划了X的取值与数学期望的偏离程度.若X的取值比较集中,则方差较小;若X的取值比较分散,则方差较大.

（2）记 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$，称为标准差或均方差

三、方差的计算方法

数字特征二

方法1：由定义求 $\boxed{\text{方差是}r.vX\text{的函数}g(X)=[X-E(X)]^2\text{的期望}}$

（1）当X为离散型$r.v$，其分布律为$P(X=x_k)=p_k$

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2 p_k$$

（2）当X是连续型$r.v$，其概率密度为$f(x)$

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

方法2 一个常用的简化公式：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

证明：
$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+\{E(X)\}^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

求方差
最常用的公式!

数字特征二

例1:已知X的分布, 求 D(x)

X	0	1	2	3
p_k	1/10	3/10	4/10	2/10

解: $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}+3\times\frac{2}{10}=1.7$

X	0	1	2	3
p_k	1/10	3/10	4/10	2/10
$[X-E(X)]^2$	1.7^2	0.7^2	0.3^2	1.3^2

$$\therefore D(X)=1.7^2\times\frac{1}{10}+0.7^2\times\frac{3}{10}+0.3^2\times\frac{4}{10}+1.3^2\times\frac{2}{10}=0.81$$

P_{82} 例10 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$,方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$

记$X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,则$E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$

X^*称为X的标准化变量

注意:更重要的是要知道如何将一个随机变量标准化.

数字特征二

P_{82}例4.11　$X \sim \pi(\lambda)$, 求$D(X)$

解法1: 用定义(略)　$P_k = P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$

解法2: $D(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \frac{\lambda^i}{i!}$$

令$i=k-1$

拆项

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \cdot \lambda + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right] = \lambda^2 + \lambda$$

$$\therefore D(X) = \lambda \qquad (E(X) = \lambda)$$

例2 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

1) 求$D(X)$， 2) 求$D(X^2)$

解:(1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=0$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}$$

若直接按公式$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx$计算，…

例2 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

1）求D（X），2）求 $D(X^2)$

(2) $$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4 f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^4(1-x)dx=\frac{1}{15}$$

$$D(X^2)=\frac{1}{15}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7}{180}$$

数字特征二

常见分布的方差

(1)(0-1)分布: $E(X)=p$ D(X)=pq

(2)二项分布: $E(X)=np$ D(X)=npq

(3)泊松分布: $E(X)=\lambda$ D(X)=λ

(4)正态分布: $E(X)=\mu$ D(X)=σ^2

(5)均匀分布: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ D(X)=$\dfrac{(b-a)^2}{12}$

(6) 指数分布 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

思考:

请给出一个离散型随机变量X和一个连续型随机变量Y，使它们的期望都是2，方差都是1。

四、方差的性质

X与Y不独立时，

$D(X\pm Y)=?$

1. 设C是常数,则D(C)=0;

2. 若C是常数,则$D(CX)=C^2D(X)$,$D(X+C)=D(X)$.

3. 若X与Y独立，则$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$;

可推广为：若$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立,则

$$D[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}D(X_i) \qquad D(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}C_i^2D(X_i)$$

证明:③$D(X+Y)=E\{[X+Y-E(X+Y)]^2\} \quad =E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\}$

$=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=\underline{D(X)+D(Y)}+\underline{2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$

$=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]$

$=E(XY)-E(X)E(Y)$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

4. $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$ 稍后再证.

P_{84}例4.14 二项分布的方差

设X~B(n,p), 则X表示n重贝努里试验中的“成功”次数．

若设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0, & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2,\ldots,n$

则$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$是n次试验中“成功”的次数，

$E(X_i)=P(X_i=1)=p$， $E(X_i^2)=p$,

故 $D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=p-p^2=p(1-p)$，$i=1,2,\ldots,n$

由于$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，于是

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)$$

思考：已知随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，且每个X_i的期望都是0，方差都是1，令$Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$,求$E(Y^2)$

数字特征二

例3、 设随机变量X与Y独立，且X服从数学期望为1，标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布而Y服从标准正态分布，试求随机 变量$Z=2X-Y+3$的概率密度函数

分析： 由于有限个独立正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，所以要求Z=2X-Y+3的概率密度函数，只需确定Z的期望E(Z)和方差D(Z)。

P66

由期望和方差的性质： $E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5$

$$D(Z)=2^2D(X)+(-1)^2D(Y)=4\times(\sqrt{2})^2+1=9$$

所以Z服从正态分布N(5,9)，从而得Z的概率密度函数为:

$$f_z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(z-5)^2}{18}\} \qquad z\in(-\infty,+\infty)$$

结论 若$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，且它们相互独立

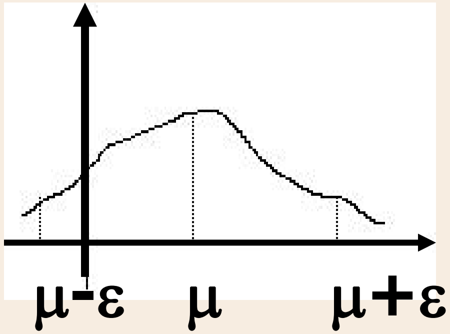
则它们的线性组合：

$$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n\sim N(\sum_{i=1}^{n}C_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma_i^2).$$

五、切比雪夫不等式

设$r.v X$具有均值$E(X)=\mu$,方差$D(X)=\sigma^2$，则对$\forall\varepsilon>0$,有不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



证明:仅就连续型$r.v$的情况来证明(自学)

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2f(x)dx+\int_{|x-\mu|<\varepsilon}(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$\geq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2f(x)dx\geq\varepsilon^2\cdot\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)dx$$

$$=\varepsilon^2\cdot P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}$$

$$\therefore\ P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

等价形式: $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ **均值E(X)=μ ,方差D(X)=σ²**

数字特征二

切比雪夫不等式用途:

(1)若方差越小，则$r.v X$集中在期望附近的可能性越大.

由此可体会方差的概率意义：它刻划了$r.v$取值的分散程度.

(2) X分布未知情况下,估计出X落在(μ-ε, μ+ε) 的概率.

(3)不等式对∀ε >0都成立，取 $\varepsilon = 3\sigma$

$$P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2}\approx 0.111$$

可见，对任给的分布，只要期望和方差σ^2存在，则 $r.v$ X 取值偏离E(X)超过 3σ 的概率小于0.111 .

4. D(X)=0 $\Longleftrightarrow$ P{X= E(X)}=1， 证明过程自学

充分性：设$P\{X=E(X)\}=1$, 则有$P\{X^2=[E(X)]^2\}=1$, 于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 = E\{[E(X)]^2\}-[E(X)]^2=0$$

必要性： 用反证法

假设$P\{X=E(X)\}<1$, 则对于某一个数$\varepsilon>0$,

有$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}>0$, 但由切比雪夫不等式,

对于任意$\varepsilon>0$, 因$\sigma^2=0$, 有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}=0,$$

矛盾, 于是$P\{X=E(X)\}=1$.

应用举例

例4 已知 μ=7300，σ=700，试估计$P\{5200<X<9400\}$

解： $P\{5200<X<9400\}=P\{|X-7300|<2100\}$

$$\geq 1-700^2/2100^2=8/9$$

例5 求证: 无论X服从什么分布,都有 $P\{|X-\mu|<4\sigma\}\geq 0.9$

证：取 $\varepsilon=4\sigma$ 由切比雪夫不等式知

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{(4\sigma)^2}\approx 0.9375$$

思考题:

已知离散型随机变量X的所有可能取值为

$x_1=1, x_2=2, x_3=3, E(X)=2.3, D(X)=0.61$, 求$X$的分布律.

解: 设X取值x_1, x_2, x_3的概率分别为p_1, p_2, p_3，则有

$$p_1+p_2+p_3=1$$

$$p_1+2p_2+3p_3=2.3$$

由$D(X)=0.61$得:$E(X^2)=5.9$

$$p_1+4p_2+9p_3=5.9$$

解得: $p_1=0.2 \quad p_2=0.3 \quad p_3=0.5$

数字特征二

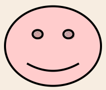
练习：X的概率密度$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 求$D(X)$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}$



数
字
特
征
二
三

练习1：

设随机变量*X*服从参数为的 λ的指数分布，则

$$P\{X > \sqrt{D(X)}\} = ?$$

数字特征二

一、数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$

1 (2011,14 题,4 分) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$ ______.

(Ⅱ) 求 $E(Y)$.

6 (2016,8 题,4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(1,2)$,$Y\sim N(1,4)$,则 $D(XY)=$

(A)6. (B)8. (C)14. (D)15.

9 已知随机变量 X 的分布律 互凶二

$$P\{X=k\}=\frac{C}{2^k k!},k=0,1,2,\cdots,$$

其中 C 为常数,则随机变量 $Y=2X-3$ 的 $D(Y)=$ ______

小结:

方差的计算: $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$

性质:

1. 设C是常数,则D(C)=0;

2. 若C是常数,则$D(CX)=C^2 D(X)$,D(X+C)=D(X).

3. 若X_1与X_2独立,则$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$;

D(X+Y)=D(X)+D(Y)+ 2 E{[X-E(X)] [Y-E(Y)]}

常用分布的期望和方差

分布类型	(0-1)分布	二项分布	泊松分布	指数分布	均匀分布	正态分布
期望	p	np	λ	$1/\lambda$	$(a+b)/2$	μ
方差	pq	npq	λ	$1/\lambda^2$	$(b-a)^2/12$	σ^2

切比雪夫不等式 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

数字特征二

Page 93　10，11

预习：　第三节