前两节知识要点回顾

一、数学期望

一维随机变量的数学期望

$$\begin{cases} E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \end{cases}$$

一维随机变量函数的数学期望

$$\begin{cases} E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\cdot p_k \\ E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

二维随机变量函数的数学期望

$$\begin{cases} E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij} \\ E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy \end{cases}$$

❖数学期望的性质

（1）设C是常数，则$E(C)=C$　　这里C视为退化的随机变量

（2）设X为一随机变量，C为常数，则有

$E(CX)=CE(X)$

（3）设X，Y为两个随机变量，则有

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

（4）若X，Y为两个相互独立的随机变量，则有

$E(XY)=E(X)E(Y)$

二、方差

$$D(X) \;=\!=\; E\left\{ \left[X - E(X)\right]^2 \right\} = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

❖方差的性质:(*C*、*b*为常数)

① $D(C)=0$;

② $D(CX)=C^2D(X)$; 推论：$D(CX+b)=C^2D(X)$;

③ 当*X*、*Y*独立, $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$;

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2[E(XY)-E(X)E(Y)]$$

④ $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$

切比雪夫不等式 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

❖ 常见分布的期望与方差

(1) 二点分布： $E(X)=p$; $D(X)=pq$;

(2) 二项分布 $B(n,p)$： $E(X)=np$; $D(X)=np(1-p)$;

(3) 泊松分布 $\pi(\lambda)$： $E(X)=\lambda$; $D(X)=\lambda$;

(4) 正态分布 $N\sim N(\mu,\sigma^2)$: $E(X)=\mu$; $D(X)=\sigma^2$;

(5) 均匀分布 $U(a,b)$： $E(X)=(a+b)/2$; $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

(6) 指数分布 $e(\lambda)$： $E(X)=1/\lambda$; $D(X)=1/\lambda^2$.

§3 协方差和相关系数

Covariance

了解协方差及相关系数的概念和性质并会计算；
了解矩、协方差矩阵的概念.

一、协方差

- 对二维随机变量（X，Y）来说，数学期望$E(X)$、$E(Y)$只反映了X与Y各自的平均值，方差$D(X)$、$D(Y)$只反映了X与Y各自离开平均值的偏离程度，它们对X与Y之间的相互联系不提供任何信息。

如同数学期与方差一样，当然也希望有一个数字特征能够在一定程度上反映R.vX与Y的联系。

1、引例

- $D(X+Y)=\underline{D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}$
- 当R.vX与Y相互独立时,有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

由此得到

❶当X与Y相互独立时，$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=0.$

❷当$E[(X-E(X))(Y-E(Y))\neq 0$时，X与Y一定不独立。

这说明$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$这个数值在一定程度上反映了X与Y相互间的联系。

2、定义： 对于R.v.X和Y，若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，就称之为随机变量X与Y的协方差,记为$Cov(X,Y)$.

即 $$Cov(X,Y) \;=\!=\; E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

3、性质：

1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$; （对称性）

2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$, a,b为常数

3) $Cov(X,X)=D(X)$, $Cov(C,Y)=0$,其中C是常数

4) $D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

*5) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

6） 若X、Y相互独立$\to Cov(X,Y)=0$,

若$Cov(X,Y)\neq 0$,则X,Y不独立

注 $Cov(X,Y)=0$, X、Y不一定相互独立！

证明：5)

$$Cov(X_1+X_2,Y)=E\{[(X_1+X_2)-E(X_1+X_2)]\cdot[Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{[X_1-E(X_1)][Y-E(Y)]+[X_2-E(X_2)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{[X_1-E(X_1)][Y-E(Y)]\}+E\{[X_2-E(X_2)][Y-E(Y)]\}$$

$$=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$$

4、计算方法:

法1：用 定义式；

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

法2：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- ***注:*** 通常，此式要比定义式用起来更节省运算，但有时也有例外！

例1 设$R.v X$和Y的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
$p_{i\cdot}$	3/8	2/8	3/8	

求Cov(X,Y)

X与Y相互独立吗？

解 $E(X)=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0,\quad E(Y)=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$$E(XY)=\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1}x_i y_j p_{ij}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=0$$

所以 Cov（X，Y）=0　**注：** Cov（X，Y）=0，但X与Y不独立。

二、相关系数:

1、定义: 称数值 $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为X,Y的相关系数, 记为 ρ_{XY}

即 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, 其中$D(X)>0$, $D(Y)>0$

当ρ_{XY}=0时，称X和Y不相关。

2、性 质:

1) $|\rho_{XY}|\le 1$;

2) 若 X与 Y相互独立，则 $\rho_{XY}=0$，即 X与 Y不相关。

3)若 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，则 $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow \exists$常数$a,b(a\neq 0)$,

使$P\{Y=aX+b\}=1$. 当$a>0$时，$\rho_{XY}=1$;当$a<0$时，$\rho_{XY}=-1$.

相关系数刻划了X和Y间“线性相关”的程度.

考虑用X的线性函数aX+b 来近似表示Y. 即 $Y \approx aX+b$

以均方误差 $e=E\{[Y-(aX+b)]^2\}=E(Y^2)+a^2E(X^2)+b^2-2aE(XY)+2abE(X)-2bE(Y)$

刻画Y与aX+b的偏离程度

来衡量以aX +b近似表示Y的好坏程度。e值越小，表示aX +b与Y的近似程度越好。用微积分中求极值的方法，求出使e 达到最小时的a,b .将e视为关于a,b的二元函数，求驻点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a}=2aE(X^2)-2E(XY)+2bE(X)=0 \\ \dfrac{\partial e}{\partial b}=2b+2aE(X)-2E(Y)=0 \end{cases}$$

这样求出的最佳逼近为

$L(X)=a_0X+b_0$

解得

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)} \\ b_0=E(Y)-a_0E(X)=E(Y)-E(X)\dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)} \end{cases}$$

这样求出的最佳逼近为$L(X)=a_0X+b_0$

这一逼近的均方误差是

$$E\{[Y-(a_0X+b_0)]^2\}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y) \quad (*)$$

性质1）成立。性质3（略）

说明： 由（*）式知，ρ_{XY}的含义

若 $\rho=\pm1$, Y与X有以概率1存在线性关系;

若 $\rho=0$，Y与X无线性关系;

若$0<|\rho|<1$,

$|\rho|$的值越接近于1, Y与X的线性相关程度越高;

$|\rho|$的值越接近于0, Y与X的线性相关程度越弱.

ρ_{XY} 并不是刻划X与Y之间一般关系，而只是表征X,Y之间*线性关系*紧密程度的特征量。

注意：X与Y不相关,只说明X与Y之间没有线性关系，但可以有其它关系；而X与Y独立是指X,Y之间既无线性关系，也无非线性关系。

2) X与Y相互独立 $\Rightarrow$ X与Y不相关，X与Y不相关 $\not\Rightarrow$ X与Y相互独立

特别地，在二维正态分布场合，独立与不相关等价。

即：若二维r.v $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

则X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho_{XY}=0$ 即X与Y不相关且 $\rho_{XY}=\rho$

4 重要结论

对于随机变量X,Y，下面事实是等价的($D(X)>0$，$D(Y)>0$).

① X与Y不相关； ② Cov(X,Y)=0; ③ $\rho_{XY}=0$;

④ E(XY)=E(X)E(Y); ⑤D(X+Y)=D(X)+D(Y).

例 2 设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布，$\xi=\cos\theta,\ \eta=\cos(\theta+a)$，这里 a 是常数，求 ξ 和 η 的相关系数？

解 $E(\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=0,\qquad E(\eta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=0,$

$$E(\xi^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\qquad E(\eta^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos a,$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

由以上数据可得相关系 数为 $\rho=\cos a$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}a=0\text{时},\rho=1,\ \xi=\eta,\\ \text{当}a=\pi\text{时},\rho=-1,\ \xi=-\eta,\end{array}\right\}\text{存在线性关系}$$

当 $a=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $a=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\rho=0$，ξ 与 η 不相关.

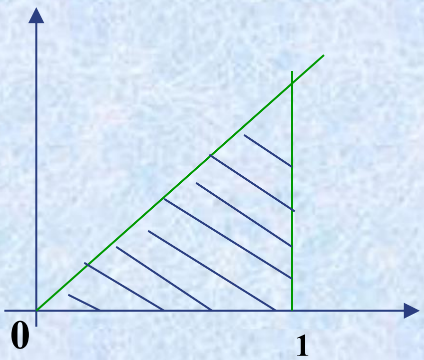
但 $\xi^2+\eta^2=1$，因此 ξ 与 η 不独立.

例3 已知二维$R.v.(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 求 ρ_{XY} .

解: $f(x,y)$的非零区域如图，易知

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy=4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



从而$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 4x^4dx=\dfrac{4}{5}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 4x^5dx=\frac{2}{3},$$

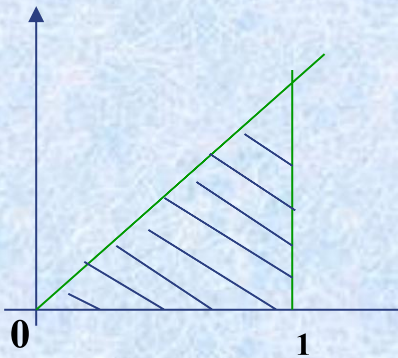
$$\therefore D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{75}$$

例3 已知二维$R.v.(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

也可 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 12y^2dy=\frac{4}{5}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\cdot 12y^2dy=\frac{2}{3}$$



类似可求得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(Y)=\frac{3}{5},\quad E(Y^2)=\frac{2}{5}.\quad \therefore D(Y)=\frac{1}{25}.$$

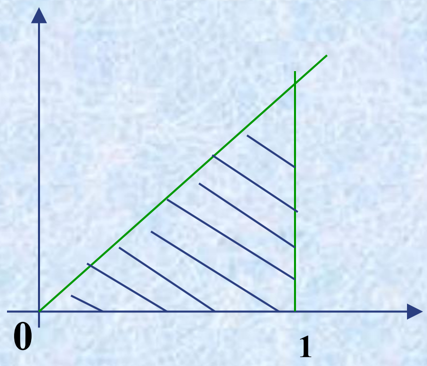
例3 已知二维$R.v.(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\because E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\int_0^1\left(\int_0^x xy\cdot 12y^2dy\right)dx=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{50}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{50}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\sqrt{\frac{1}{25}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$



三、其它常用数字特征：

1、矩

k阶原点矩： 即 $E[X^k]$

k阶中心矩： 即 $E\{[X-E(X)]^k\}$

k阶绝对原点矩： 即 $E[|X|^k]$

k阶绝对中心矩： 即 $E\{|X-E(X)|^k\}$

$k+l$ 阶混合矩： 即 $E[X^kY^l]$

$k+l$ 阶混合中心矩： 即 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

其中：$k=1,2,3,\ldots$, $l=1,2,3,\ldots$

易见：期望和方差分别就是X的一阶原点矩和二阶中心矩，协方差就是1+1阶的混合中心矩。

2、协方差矩阵:

①二维随机变量(X,Y)有四个二阶中心矩,即

D(X) 、 Cov(X,Y) 、 Cov(Y,X) 、 D(Y),

将它们排成矩阵

$$\begin{bmatrix} D(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & D(Y) \end{bmatrix}$$

称为X,Y的协方差矩阵.

② n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots..X_n)$

$$\begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \ldots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & D(X_2) & \ldots & Cov(X_2,X_n) \\ . & . & . & . \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \ldots & D(X_n) \end{bmatrix}$$

称为R.v.$(X_1,X_2,\ldots.X_n)$的协方差矩阵

内容小结

协方差和相关系数

相关系数是刻划两个变量间线性相关程度的一个重要的数字特征.

注意:独立与不相关并不是等价的.

当(X,Y)服从二维正态分布时，有

X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ X与Y不相关

预习第五章

矩是随机变量的数字特征.

$$\begin{cases} \text{数学期望 } E(X) \text{ 是 } X \text{ 的一阶原点矩;} \\ \text{方差 } D(X) \text{ 是 } X \text{ 的二阶中心矩;} \\ \text{协方差 } \mathrm{Cov}(X,Y) \text{ 是 } X \text{ 与 } Y \text{ 的二阶混合中心矩.} \end{cases}$$

Page 93　12 、

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$________.

(8) 随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$且相关系数$\rho_{XY}=1$，则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$ (B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$ (D) $P\{Y=2X+1\}=1$

(23)（本题满分 11 分）

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1,2,3 个，现从箱中随机取出 2 个球，记X为取出的红球个数，Y为取出的白球个数.

（Ⅰ）求随机变量(X,Y)的概率分布；

（Ⅱ）求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

466　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且方差为 $\sigma^2>0$，记 $Y_1=\sum_{i=2}^{n}X_i$ 和 $Y_n=\sum_{j=1}^{n-1}X_j$，则 Y_1 和 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=$ ________.

530　设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A) -3.　(B) 3.　(C) -5.　(D) 5.

541　已知随机变量 X 与 Y 有相同的不为零的方差，则 X 与 Y 相关系数等于1的充分必要条件是

(A) $\mathrm{Cov}(X+Y,X)=0$.　(B) $\mathrm{Cov}(X+Y,Y)=0$.

(C) $\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=0$.　(D) $\mathrm{Cov}(X-Y,X)=0$.

542　已知随机变量 X 与 Y 的相关系数大于零，则

(A) $D(X+Y)=DX+DY$.　(B) $D(X+Y)<DX+DY$.

(C) $D(X-Y)=DX+DY$.　(D) $D(X-Y)<DX+DY$.

(22)（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0\\[2mm] \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\[2mm] 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.求：

（Ⅰ）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

（Ⅱ）$\mathrm{Cov}(X,Y)$；