



## 第四章

---

# 随机变量的数字特征

在第二、三章中主要研究了随机变量的分布，随机变量的分布能够完整地描述随机变量的统计规律性。但在实际问题中，有时我们并不需要去全面地描述随机变量的统计规律性，如

现有甲、乙两个工人各加工某种零件十件；他们所出的次品数分别记为 $X$ 、 $Y$ ，且有

$X$	0	1	2	3
$p_k$	4/10	3/10	2/10	1/10

$Y$	0	1	2	3
$p_k$	5/10	3/10	2/10	0

试分析比较两人的技术水平。

从 $X$ 、 $Y$ 的分布律中，我们难以迅速地判断出哪个工人的技术水平高。如果能通过某个数量来反映工人技术水平，通过这个数的大小来反映技术水平的高低。



那么，我们如何作出对二人技术水平的科学分析呢？

在本章我们将学习用一些能反映出随机变量在某些方面的特征的数字 ----- 数字特征, 来描述随机变量的局部性态。

■ 数学期望

■ 方差

■ 相关系数

■ 矩

★ 对于每一种数字特征，应注意学好以下几个方面：

- 定义与实际意义；
- 基本性质；
- 计算方法（与分布之间的关系）；
- 重要分布的特征值



# § 1 数学期望

*(Mathematical expectation)*

- 一、离散型随机变量的数学期望
- 二、连续型随机变量的数学期望
- 三、随机变量的函数的数学期望
- 四、数学期望的性质
- 五、数学期望性质的应用

理解数学期望的概念，  
掌握其性质及运算；  
熟悉常用分布的数学期望。



# 一、离散型随机变量的数学期望

## 引例

某手表厂为了检验其生产的手表的质量，抽查了 $N=100$ 只手表的日走时误差，其数据如下：

日走时误差(秒)	-2	-1	0	1	2	3	4
只 数	3	10	17	28	21	16	5

求这100只手表的平均日走时误差。

**解：** 这100只手表的平均日走时误差为：

$$\begin{aligned} & [(-2) \times 3 + (-1) \times 10 + 0 \times 17 + 1 \times 28 + 2 \times 21 + 3 \times 16 + 4 \times 5] / 100 \\ &= (-2) \times \frac{3}{100} + (-1) \times \frac{10}{100} + 0 \times \frac{17}{100} + 1 \times \frac{28}{100} + 2 \times \frac{21}{100} + 3 \times \frac{16}{100} + 4 \times \frac{5}{100} \\ &= 1.22 \text{秒/日} \end{aligned}$$

$\bar{X} = \sum_{k=1}^7 x_k f_k$

$x$ 的可能取值 $x_k$

事件 $\{X=x_k\}$ 发生的频率 $f_k$

用 $X$ 表示手表的日走时误差，则 $X$ 为随机变量。



如果另外再抽验100只手表,那么每作一次这样的检验,就得到一组不同的频率,也就有不同的日走时误差的平均值. 即由于频率随不同试验而产生的随机波动性,引起了日走时误差的平均值的随机波动.

用事件 $\{X=x_k\}$ 发生的概率 $p_k$ 代替事件 $\{X=x_k\}$ 发生频率 $f_k$

于是手表的平均日走时误差为

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^7 x_k p_k$$

称为随机变量 $X$   
的数学期望

如何消除这种随机波动性呢?



**定义1** 设离散型r. v  $X$  的分布律为:  $P\{X=x_k\}=p_k \quad k=1,2,\dots$

若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  绝对收敛, 则称级数的和为  $r.v X$  的数学期望,

简称期望或均值, 记为  $E(X)$ , 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (1)$$

**注 (1)** 级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  绝对收敛, 不仅保证了  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  收敛,

同时保证了  $E(X)$  与求和顺序无关。

**(2)** 若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  不绝对收敛, 则  $X$  的数学期望不存在。

**(3)** 当  $X$  只取  $n$  个可能值时,  $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$

**(4)**  $E(X)$  反映了随机变量取值的平均水平。

**实际意义**

**(5)** 若  $E(X)$  存在, 则是一个确定的实数。



**例1:** 甲、乙两工人在一天生产中出现废品的概率分别是:

工 人	甲				乙			
	$X_1$				$X_2$			
废品数	0	1	2	3	0	1	2	3
概率 $P_k$	0.4	0.3	0.2	0.1	0.3	0.5	0.2	0

设两人的日产量相等,问谁的技术更好?

**解:**  $E(X_1)=0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1$

$E(X_2)=0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0 = 0.9$

可见甲平均废品数比乙多,因此乙的技术好.

**思考题:** 求随机变量的期望

$X$	2	4	8 ...	$2^n$ ...
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \dots$	$\frac{1}{2^n} \dots$

$E(X)$ 不存在.



例2:  $X \sim \pi(\lambda)$ .  $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

求  $E(X)$

$$\begin{aligned} \text{解: } E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \end{aligned}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$



**例3** 在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验 $N$ 个人的血，可以用两种方法进行：

- (i) 将每个人的血分别去化验，这就需化验  $N$  次。
- (ii) 按  $k$  个人一组进行分组，把这  $k$  个人的血混在一起进行化验。

如果混合血液呈阴性反应，就说明 $k$ 个人的血都呈阴性反应，这样这  $k$  个人的血就只需验一次。

若呈阳性，则对这 $k$ 个人的血液再分别进行化验，这样 $k$ 个人的血总共最多化验  $k + 1$  次。

假设每个人化验呈阳性 的概率为  $p$ ，且这些人的化验反应是相互独立的。

试说明当  $p$  较小时，选取适当的  $k$ ，按第二种方法可以减少化验的次数，并说明  $k$  取什么值时最适宜。



**解:** 设以  $k$  个人为一组时, 组内每人的血化验的次数为  $X$

则  $X$  为一随机变量, 其分布律为

各人的血呈阴性反应的 概率为  $q = 1 - p$ ,

$X$	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
$p_k$	$q^k$	$1 - q^k$

因而  $k$  个人的混合血呈阴性反 应的概率为  $q^k$ ,

$k$ 个人的混合血呈阳性反 应的概率为  $1 - q^k$ .

$X$  的数学期望为

$$E(X) = \frac{1}{k}q^k + (1 + \frac{1}{k})(1 - q^k) = 1 - q^k + \frac{1}{k}.$$

由此可知, 只要选择  $k$  使  $1 - q^k + \frac{1}{k} < 1$ ,

$N$  个人平均需化验的次数为  $N(1 - q^k + \frac{1}{k})$ .

则  $N$  个人平均需化验的次数  $< N$ .



当  $p$  固定时, 可选取  $k$  使得

$$L = 1 - q^k + \frac{1}{k}$$

小于 1 且取到最小值, 这时就能得到最好的分组方法.

例如,  $p = 0.1$ , 则  $q = 0.9$ ,

当  $k = 4$  时,  $N = 1000$ ,

此时以  $k = 4$  分组, 则按第二种方法平均只需化验

$$1000(1 - 0.9^4 + \frac{1}{4}) = 594 \text{ (次)}.$$

这样平均来说, 可以减少 40% 的工作量.



## 二、连续型随机变量的数学期望

**定义2** 设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$ ,则当积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛时, 称此积分的值为随机变量 $X$ 的数学期望, 记为 $E(X)$ , 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (2)$$



练习：已知随机变量X的概率密度为  
求X的期望

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx + \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{-x}{2} de^{-x} + \int_{-\infty}^0 \frac{x}{2} de^x \\ &= \frac{-xe^{-x}}{2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx + \frac{xe^x}{2} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$



# 重要分布的期望值

二项分布  $B(n, p)$ :

$$E(X) = np;$$

泊松分布  $\pi(\lambda)$ :

$$E(X) = \lambda;$$

均匀分布  $U(a, b)$ :

$$E(X) = (a+b)/2;$$

正态分布  $N \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

$$E(X) = \mu;$$

指数分布:  $e(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

要求: 熟记结果.



### 三、 随机变量函数的数学期望

#### 1、 已知随机变量 $X$ 的分布,求其函数 $Y=g(X)$ 的期望

(1)离散型 $R.v.X$ 的分布率为:  $P\{X=x_k\}=p_k$   
 $k=1,2,\dots$

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot p_k$$

—— 当其绝对收敛

(2)连续型 $R.v.X$ 的概率密度为 $f(x)$ ,则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

—— 当其绝对收敛



练习：已知随机变量 $X$ 的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{2}, & x > 0 \end{cases}$

求 $|X|$ 的期望

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx - \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{-x}{2} de^{-x} - \int_{-\infty}^0 \frac{x}{2} de^x$$

$$= \left. \frac{-xe^{-x}}{2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx - \left. \frac{xe^x}{2} \right|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



## 2、已知随机变量 $(X, Y)$ 的分布, 求函数 $Z=g(X, Y)$ 的数学期望

(1) 离散型R.v.  $(X, Y)$  的分布律为:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则有  $E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$

—— 当其绝对收敛

(2) 连续型R.v.  $(X, Y)$  的概率密度为 $f(x, y)$

则有  $E(Z) = E[g(X, Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad \text{—— 当其绝对收敛}$$

**求随机变量函数的期望的特点:** 不必去求 $g(X)$ 或 $g(X, Y)$ 的分布



例4 已知  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$
2	$1/8$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

(1) 求  $X^2Y$  的期望; (2) 求  $\max\{X, Y\}$  的期望;

$$\begin{aligned} (1) \quad E(X^2Y) &= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times 2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times 3 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times 4 \times \frac{1}{8} \\ &\quad + 2^2 \times 1 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times 3 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times 4 \times \frac{1}{16} \\ &= 37/8 \end{aligned}$$

$$(2) \quad E(\max\{X, Y\}) = 37/16$$

$$\begin{aligned} &= \max\{1, 1\} \times \frac{1}{4} + \max\{1, 2\} \times \frac{1}{8} + \max\{1, 3\} \times \frac{1}{8} + \max\{1, 4\} \times \frac{1}{8} + \\ &\quad \max\{2, 1\} \times \frac{1}{8} + \max\{2, 2\} \times \frac{1}{8} + \max\{2, 3\} \times \frac{1}{16} + \max\{2, 4\} \times \frac{1}{16} \end{aligned}$$

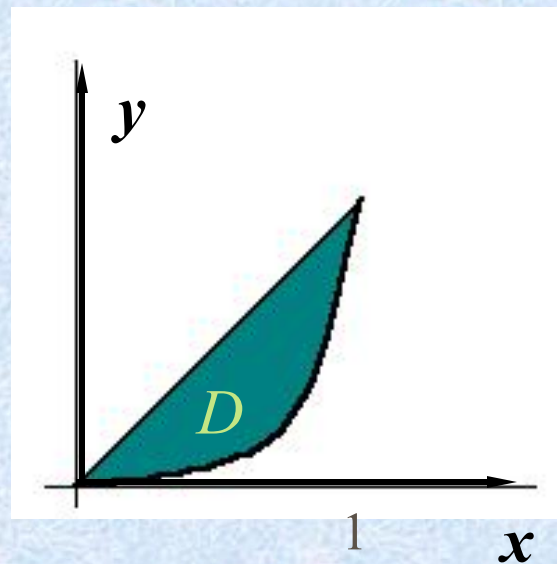


**例5:** 已知随机变量  $(X, Y)$  在曲线  $y=x^2$ ,  $y=x$  所围成的区域  $G$  里服从均匀分布, 求  $E(X+Y)$

**解:** 区域  $G$  的面积为  $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$

$\therefore (X, Y)$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$E(X+Y) = \iint_{-\infty < x, y < +\infty} (x+y) f(x, y) d\sigma = \iint_D 6(x+y) d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 6(x+y) dy = \frac{9}{10}$$



## 四、数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数, 则 $E(C)=C$  这里 $C$ 视为退化的随机变量

(2) 设 $X$ 为一随机变量,  $C$ 为常数, 则有

$$E(CX)=CE(X)$$

(3) 设 $X, Y$ 为两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

(4) 若 $X, Y$ 为两个相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

可以推广到任意有限多个!



## 例6 求二项分布的数学期望

**解：** 设  $X \sim B(n, p)$ , 则  $X$  表示  $n$  重贝努里试验中的“成功”次数.

若设  $X_i = \begin{cases} 1, & \text{如第} i \text{次试验成功} \\ 0, & \text{如第} i \text{次试验失败} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n$

则  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , 且  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布。

因为  $P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$\text{所以 } E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$$

**变量转换法：** 把复杂  $r.v X$  分解为数个服从同一分布的简单  $r.v X_i$  之和, 再利用性质求期望.



**练习1** 把数字 $1,2,\dots,n$ 任意地排成一列，如果数字 $k$ 恰好出现在第 $k$ 个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数的数学期望。

**解：**设巧合个数为 $X$ ， 引入

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{数字 } k \text{ 恰好出现在第 } k \text{ 个位置上} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则 
$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

由于 
$$E(X_k) = P(X_k = 1) = \frac{1}{n}$$

故 
$$E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$



练习2 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3 y^2}, & \frac{1}{x} < y < x, x > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求数学期望  $E(Y), E(\frac{1}{XY})$ .

解:  $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) \mathrm{d} y \mathrm{d} x = \int_1^{\infty} \left[ \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{3}{2x^3 y} \mathrm{d} y \right] \mathrm{d} x$

$$= 3 \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d} x = \left[ -\frac{3}{2} \frac{\ln x}{x^2} \right]_1^{\infty} + \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \mathrm{d} x = 3/4$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x, y) \mathrm{d} y \mathrm{d} x = \int_1^{\infty} \mathrm{d} x \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{3}{2x^4 y^3} \mathrm{d} y = \frac{3}{5}.$$



**练习3** 某公司计划开发一种新产品市场, 并试图确定该产品的产量. 他们估计出售一件产品可获利 $m$ 元, 而积压一件产品导致 $n$ 元的损失. 再者, 他们预测销售量 $Y$ (件)服从指数分布, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad \lambda > 0$$

问若要获得利润的数学期望最大, 应生产多少件产品( $m, n, \lambda$ 已知)

**解** 设生产  $x$  件, 则获利  $Q$  是  $x, Y$  的函数:

$$Q = Q(x, Y) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & Y < x, \\ mx, & Y \geq x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Q(x, Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q f_Y(y) \mathrm{d} y = \int_0^x [my - n(x - y)] \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d} y + \int_x^{\infty} mx \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d} y \\ &= (m + n) / \lambda - \frac{(m + n)}{\lambda} e^{-\lambda x} - nx, \end{aligned}$$



$$\text{令 } \frac{d}{dx} E(Q) = (m+n)e^{-\lambda x} - n = 0$$

$$\text{得 } x = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n}{m+n}\right).$$

$$\text{又 } \frac{d^2}{dx^2} E(Q) = -\lambda(m+n)e^{-\lambda x} < 0$$

故知当  $x = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)$  时,  $E(Q)$  取得极大值,

且可知这也是最大值.



**练习4** 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光，电梯于每个整点的5分钟、25分钟和55分钟从底层运行。假设一游客在早上8点的第 $X$ 分钟到达底层电梯处，且 $X$ 在 $[0, 60]$ 上服从均匀分布，求该游客等候时间的数学期望。

**分析** 此题的关键是求出游客等候时间 $Y$ 与 $X$ 的函数关系 $g(X)$ ，若 $g(X)$ 求得，则由求随机变量函数的数学期望公式即可得所求。

**解** 已知 $X$ 在 $[0, 60]$ 上服从均匀分布，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

设 $Y$ 为游客等候电梯的时间（单位：分），则

$$Y = g(X) = \begin{cases} 5 - X, & 0 < X \leq 5 \\ 25 - X, & 5 < X \leq 25 \\ 55 - X, & 25 < X \leq 55 \\ 60 - X + 5, & 55 < X \leq 60 \end{cases}$$



$$Y = g(X) = \begin{cases} 5 - X, & 0 < X \leq 5 \\ 25 - X, & 5 < X \leq 25 \\ 55 - X, & 25 < X \leq 55 \\ 60 - X + 5, & 55 < X \leq 60 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{60} \left[ \int_0^5 (5 - x) dx + \int_5^{25} (25 - x) dx + \int_{25}^{55} (55 - x) dx + \int_{55}^{60} (60 - x + 5) dx \right] \\ &= \frac{1}{60} (12.5 + 200 + 450 + 37.5) \\ &= 11.67 \end{aligned}$$



# 五、小结

一维随机变量的数学期望

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

一维随机变量函数的数学期望

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot p_k$$

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

二维随机变量函数的数学期望

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$$

对这六个基本公式要理解并会用。



## ❖ 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数, 则 $E(C) = C$  这里 $C$ 视为退化的随机变量

(2) 设 $X$ 为一随机变量,  $C$ 为常数, 则有

$$E(CX) = CE(X)$$

(3) 设 $X, Y$ 为两个随机变量, 则有

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(4) 若 $X, Y$ 为两个相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$



# 作业

$P_{92}$  4、6、

下次课，我们将学习随机变量另一个重要的数字特征：方差

请预习

第二节：方差