习 题 课

——随机变量的数字特征

一、内容小结

二、例题分析

三、补充练习

一、内容小结

1. 随机变量的数字特征的意义

数学期望　描述了随机变量的概率取值中心—均值

方　　差　描述了随机变量的取值与期望的偏离程度

相关系数　描述了X与Y的线性相关程度

协方差　　矩　　协方差矩阵

2. 常用的数字特征的定义式与计算式

数学期望 $E(X)$

离散型 $E(X)=\sum x_k p_k$

连续型 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

方差 $D(X)$

$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$E(X^2)=D(X)+E^2(X)$

协方差 $Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

相关系数 ρ_{XY}

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

计算期望的公式：

$$X\quad \begin{cases} E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \end{cases}$$

$$Y=g(X)\begin{cases} E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\cdot p_k \\ E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

$$Z=g(X,Y)\begin{cases} E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} \\ E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \end{cases}$$

特别地，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$

矩 k阶原点矩： 即 $E[X^k]$

k阶中心矩： 即 $E\{[X-E(X)]^k\}$

k阶绝对原点矩： 即 $E[|X|^k]$

k阶绝对中心矩： 即 $E\{|X-E(X)|^k\}$

$k+l$ 阶混合矩： 即 $E[X^kY^l]$

其中：k=1,2,3,…, l =1,2,3,…

$k+l$ 阶混合中心矩： 即 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

② n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots..X_n)$

$$\begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \ldots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & D(X_2) & \ldots & Cov(X_2,X_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \ldots & D(X_n) \end{bmatrix}$$

称为R.v.$(X_1,X_2,\ldots.X_n)$的协方差矩阵

3. 常用的数字特征的性质

数学期望

$E(b)=b$ ，$E(aX)=aE(X)$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

X,Y相互独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$

方差

$D(b)=0$， $D(aX)=a^2D(X)$

X,Y相互独立，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$

相关系数

1） $|\rho_{XY}| \le 1;$

2) 若 X与 Y相互独立，则 $\rho_{XY}=0$，即 X与 Y不相关。

3)若 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，则 $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow \exists$常数$a,b(a\neq 0)$，

使$P\{Y=aX+b\}=1$. 当$a>0$时，$\rho_{XY}=1$;当$a<0$时，$\rho_{XY}=-1$.

协方差

i) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$; （对称性）

ii) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$, a,b为常数

iii) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

$D(X)\pm D(Y)= D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

$\boxed{\text{显然 } Cov(X,X)=D(X),\ Cov(C,Y)=0,\text{其中}C\text{是常数}}$

独立性与数字特征关系图

$E(XY)=E(X)E(Y)$

$Cov(X,Y)=0$

X与Y相互独立

X与Y不相关，$\rho_{XY}=0$

有特殊情况

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

离散型：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$

连续性：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

Cov(X,Y)= E(XY)-E(X)E(Y)

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

4. 几个常用的分布的数字特征

分布	分布律或概率密度函数	期望	方差
(0-1)分布	$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}, k=0,1$ $0<p<1, p+q=1$	p	pq
二项分布$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2\cdots,n$ $0<p<1, p+q=1$	np	npq
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda>0, k=0,1,2\cdots$	λ	λ
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $e(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}, \lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<\mu<+\infty, \sigma>0$	μ	σ^2

5. 其它　**契比雪夫不等式**　$E(X)=\mu$　$D(X)=\sigma^2$　$\forall\ \varepsilon>0$,

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\qquad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

6、独立同分布中心极限定理

列维——林德伯格定理

设$X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$独立同分布，$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2\neq 0$，则对任意实数 x

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

德莫佛—拉普拉斯定理

设$Z_n\sim B(n,p)$，$n=1,2,\ldots$，则对任意实数x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Z_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

契比雪夫大数定律定理 设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量序列，$E(X_i)$, $D(X_i)$都存在, 且$D(X_i)\le M$，(i=1, 2, ⋯,n, ⋯)则对 ∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

推论 设$X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$为独立随机变量序列，且有相同的数学期望和方差, $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$, (i=1,2,…), 则对∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\} = 1$$

伯努利大数定律 设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A 在每次试验中发生的概率，则对∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1$$

辛钦大数定律 设$X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$为独立、同分布的随机变量，且有相同的数 学期望$E(X_i)=\mu$($i$=1,2,…)，则对∀ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

二、例题分析

例1 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求$Y=1/X^2$的数学期望和方差。

解:

$$E(Y)=E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{4}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4}f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^4}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2\frac{1}{x^2}dx \quad \text{发散}$$

这样, Y的数学期望存在但方差不存在

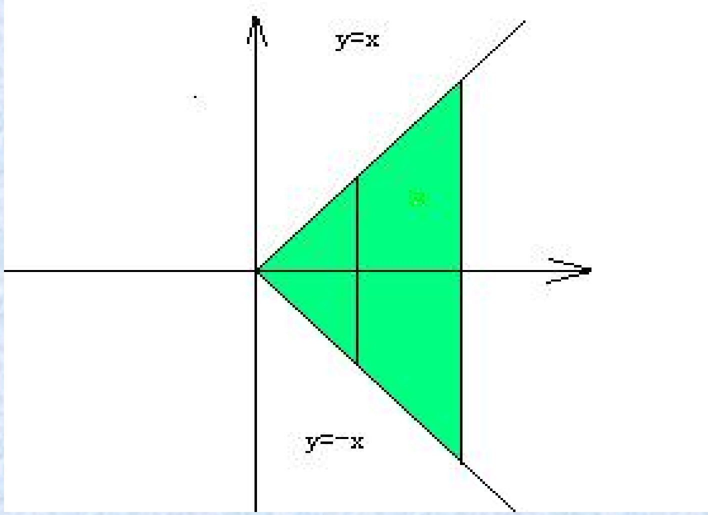
例2设二维随机变量（X, Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x\quad 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求(1)X与Y是否相互独立。

(2)求 Cov(X,Y)

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$



当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-x}^{x} 1dy=2x$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 1dx=1-y, & 0\le y<1\\ \int_{-y}^1 1dx=1+y, & -1<y<0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1-|y| & -1<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)\,f_Y(y)$ X与Y不相互独立。

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,\ 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}1-|y| & -1<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2）求 Cov(X,Y)

（2）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

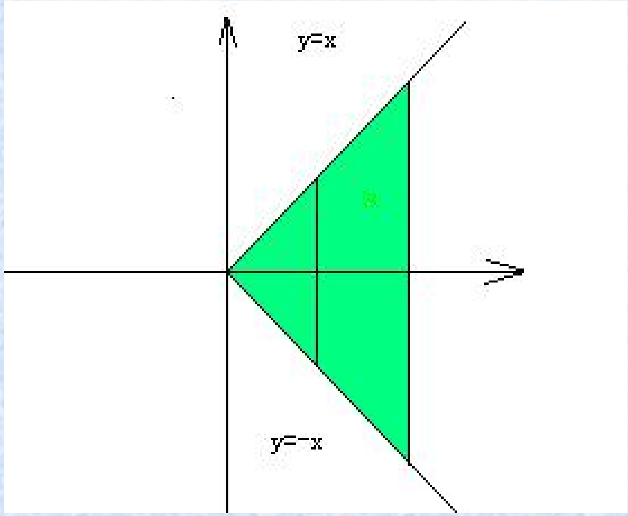
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2x dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-1}^{1}y(1-|y|)dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xy\,dy=0$$

$\therefore$ Cov(XY)=0



例3 已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布,并且X和Y分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$, X与Y的相关系数为-1/2,设$Z=X/3+Y/2$

(1)求Z的数学期望$E(Z)$和方差$D(Z)$

(2)求X与Z的相关系数

解: (1) $E(Z)=E(X)/3+E(Y)/2=1/3.$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=(-1/2)\cdot 3\cdot 4=-6$$

$$D(Z)=D(X/3+Y/2)=D(X/3)+D(Y/2)+2Cov(X/3,Y/2)$$

$$=(1/3)^2 D(X)+(1/2)^2 D(Y)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Cov(X,Y)=1+4-2=3$$

(2)$Cov(X,Z)=Cov(X,X/3+Y/2)=Cov(X,X/3)+Cov(X,Y/2)$

$$=\mathrm{cov}(X,X)/3+\mathrm{cov}(X,Y)/2$$

而 $\mathrm{cov}(X,X)=D(X)=9,\quad \mathrm{cov}(X,Y)=-6$

$$\therefore\quad \mathrm{cov}(X,Z)=\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot(-6)=3-3=0$$

$$\therefore\quad \rho_{XZ}=\frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$$

一、选择题

1. 若随机变量X,Y满足$D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有[**B**]

(A) X,Y相互独立　　(B) X,Y不相关

(C) $D(Y)=0$　　(D) 存在a,b使$P\{Y=aX+b\}=1$

2. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，若$\rho_{XY}=0$，则[**A**]

(A) X,Y一定独立　　(B) X,Y一定不独立

(C) X,Y不一定独立　　(D) ρ不一定为0

3. 设随机变量X服从指数分布, $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases}$,

记$Y=2X+e^{-2X}$,则$E(Y)$为[C]

(A) $\frac{3}{4}$ (B) 5 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$

4. 两个相互独立的随机变量X与Y的方差分别为 4、2,则随机变量 $2X-2Y$的方差是 [D]

(A) 8 (B) 16 (C) 28 (D) 24

5. 设人的体重为随机变量 X,且$E(X)=a, D(X)=b$,若将10个人的平均体重记为 Y,则下列结论正确的是 [A]

(A) $E(Y)=a$ (B) $E(Y)=0.1a$

(C) $D(Y)=0.01b$ (D) $D(Y)=b$

6. 将一枚硬币重复抛 n次,以X表示正面朝上的次数，以Y表示反面朝上的次数，则X与Y的关系为 [**B**]

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 0

7. 随机变量(X,Y)服从二维正态分布且X与Y不相关，$f_X(x), f_Y(y)$分别表示X、Y的概率密度，则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为 [**C**]

(A) $f_X(x)f_Y(y)$　(B) $f_Y(y)$　(C) $f_X(x)$　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题

1. ● 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则$P\{X > \sqrt{D(X)}\} = \underline{\ \frac{1}{e}\ }$.

2. 设X表示10次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为0.4，则X^2的数学期望$E(X^2) = \underline{\ 18.4\ }$.

3. 已知随机变量$X \sim N(2,4)$，$Y \sim N(3,1)$，且X与Y相互独立，$Z = 2X - 3Y + 2$，则$Z \sim \underline{\ N(-3,25)\ }$.

4. 设随机变量X在区间$[-1,2]$上服从均匀分布，随机变量$Y = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 0 & X = 0, \\ -1 & X < 0 \end{cases}$

则Y的方差$D(Y) = \underline{\ \frac{8}{9}\ }$.

5. 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布,若$P\{X=1\}=P\{X=3\}$,则$E(X)=$ $\underline{\quad\sqrt{6}\quad}$, $D(X)=$ $\underline{\quad\sqrt{6}\quad}$.

6. 设随机变量X和Y的相关系数为0.9,若$Z=X-0.4$,则Y与Z的相关系数为$\underline{0.9}$.

7. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布,则$P\{X=E(X^2)\}=$ $\underline{\quad\frac{1}{2e}\quad}$.

三. 设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & 其它\end{cases},$$

对X独立重复观察4次,用Y表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数,求$E(Y^2)$.

解:

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2},\quad \therefore Y\sim B(4,\frac{1}{2}).$$

$$\therefore E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2,\qquad D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1,$$

$$\therefore E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=1+4=5.$$

√ **618** 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则其数学期望 $E(X)=a$ 成立的话，则

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x-a)\mathrm{d}x=0$.　　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)\mathrm{d}x=0$.

(C) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.　　(D) $\int_{-\infty}^{a} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

答题区域

√ **619** 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，数学期望 $E(X)=2$，则

(A) $\int_{-\infty}^{2} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.　　(B) $\int_{-\infty}^{2} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{2}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_{-\infty}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

答题

✓ 243 已知(X,Y)在以点$(0,0)$,$(1,0)$,$(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,对(X,Y)作4次独立重复观察,观察值$X+Y$不超过1的出现次数为Z,则$E(Z^2)=$______.

468 将一个骰子重复掷n次,各次掷出的点数依次为$X_1,\cdots,X_n$.则当$n\to\infty$时,$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$依概率收敛于______.

√ **244** 相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 具有相同的方差 $\sigma^2 > 0$，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则 $D(X_i - \overline{X}) =$ ______.

答题区域

√ **245** 设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$，且 $D(X+Y) = 1$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho =$

246 设随机变量 X 服从分布 $E(1)$，记 $Y=\min\{|X|,1\}$，则 Y 的数学期望 $E(Y)=$ ________.

答题区域

247 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} a-e^{-bx}, & x>0, \\ c, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 已知 $E(X)=1$，则 $D(X)=$ ________.

P92 2

例4 将3只球随机地逐个放入4只编号为1, 2, 3, 4的盒子中, 以X表示至少有一只球的盒子的最小号码, 试求E(X)。

分析:离散型, 用公式 $E(X)=\sum x_k p_k$

x_k=1,2,3,4,关键是求p_k，样本点的总个数为$4^3=64$

$k=1,\ \ p_1=(C_3^1\cdot 3^2+C_3^2\cdot 3^1+C_3^3)/64=37/64$

$k=2,\ \ p_2=(C_3^1\cdot 2^2+C_3^2\cdot 2^1+C_3^3)/64=19/64$

$k=3,\ \ p_3=(C_3^1+C_3^2+C_3^3)/64=7/64$

$k=4,\ \ p_4=1/64$

例5、某个单位设置一个电话总机，共有200个分机。设每个分机有5%的时间要使用外线通话，假定每个分机是否使用外线通话是相互独立。问总机要多少外线才能以90%的概率保证每个分机要使用外线通话时可供使用。

P101 11

分析：设X表示同时要求使用外线的分机数，

m 为总机需配备外线条数，则要求使 $P\{X\le m\}\ge 0.9$成立的最小m

而 $X\sim B(200, 0.05)$ $E(X)=np=10$， $D(X)=np(1-p)=9.5$

由隶莫佛—拉普拉斯定理：

$$0.9\le P\{X\le m\}=P\{\frac{X-10}{\sqrt{9.5}}\le\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\}\approx\Phi(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}})$$

查表得 $\Phi(1.29)=0.9015$

近似有 $\dfrac{m-10}{\sqrt{9.5}}\ge 1.29$ 故$m\ge 13.9452$

故总机需配备14条外线