
Bases du traitement des images

► Détection de contours ◀

Nicolas Thome

19 octobre 2009

Introduction

Rôle primordial de la détection de contours en vision

1 Réduction d'information

- Information de toute l'image résumée dans le contours des différents objets.
- Contours : parties les plus informatives d'une image.
- On a longtemps cru que l'ensemble de la tâche de vision pouvait être résolue uniquement à partir des contours.

2 Préalable nécessaire à l'extraction d'autres primitives (droites, segments, cercles)

3 Les données biologiques confortent l'importance des contours dans le système de vision

- Les premières couches des systèmes de vision des mammifères effectuent des traitements de détection de contours.

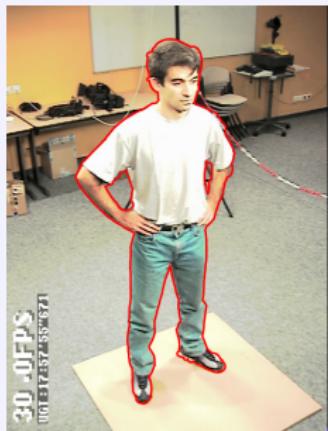
Introduction

Détection de contours : applications

- ① Reconnaissance d'objets, de formes, classifications de scènes
- ② Mise en correspondance : calibration, reconstruction 3d
- ③ Compression

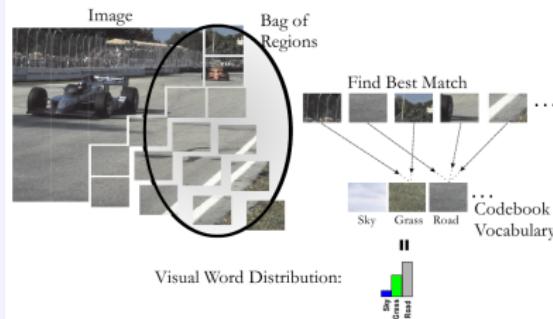
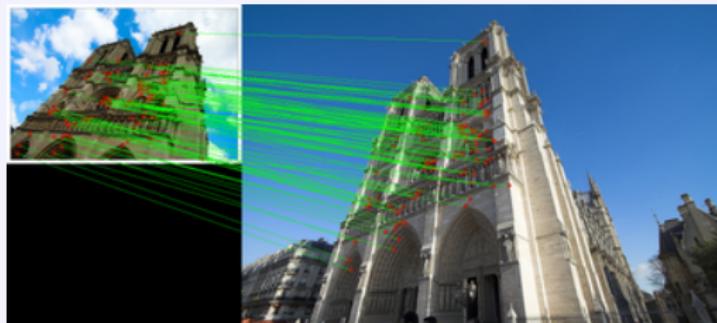
Introduction

applications : mise en correspondance \Rightarrow Reconstruction



Introduction

applications : mise en correspondance \Rightarrow Classification



Introduction

applications : Description des formes \Rightarrow Reconnaissance d'objets



00101101

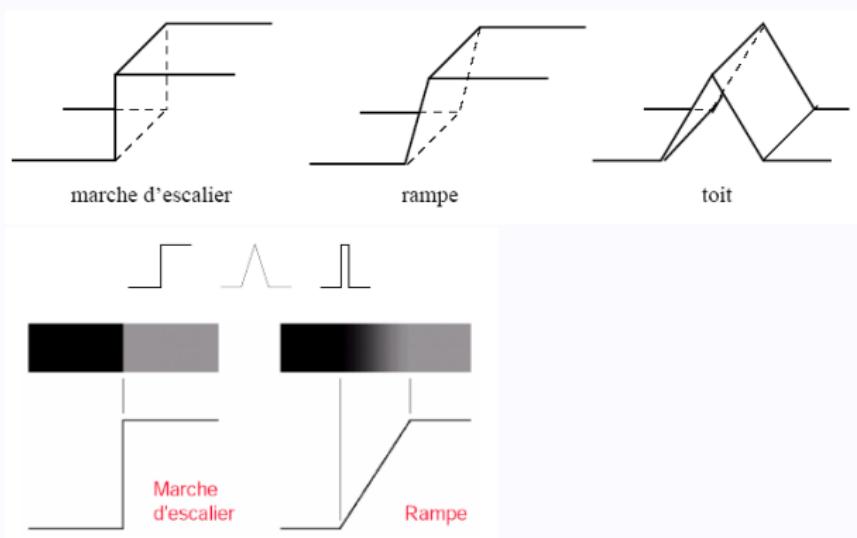
A large black rectangular box containing the binary string "00101101" in white, outlined font. The digits are evenly spaced and aligned vertically.

Plan du cours

- ① Modélisation des contours - formulation du problème de détection
- ② Résolution : Approches basées filtrage (différences finies)
 - Filtrage du premier ordre
 - Filtrage second ordre
- ③ Résolution : Approches continues (filtrage optimal)
- ④ Post-traitement : de l'image dérivée aux contours
 - seuillage et chaînage.

Modèle de Contour

- ▶ Plusieurs modèles de contours



Modèle de Contour

- ▶ Modèle le plus courant : Marche d'escalier. En 1d :



- Dérivée première maximale sur le contour
- Dérivée seconde nulle sur le contour

Modèle de Contour

- ▶ image $f(x, y)$. Contour : lieu des fortes variations de f
- ▶ Gradient de f :

$$\vec{\nabla f} = \vec{G} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)^T \quad (1)$$

- ▶ Module du gradient de f :

$$G = \|\vec{\nabla f}\| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}} \quad (2)$$

- ▶ Direction du gradient de f :

$$\vec{g} = \frac{\vec{\nabla f}}{\|\vec{\nabla f}\|} \quad (3)$$

Modèle de Contour

Définition du Contour

- ▶ Lieu des maxima du gradient dans la direction \vec{g} du gradient

$$\frac{\partial f}{\partial g} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} < 0 \quad (4)$$

avec $\frac{\partial}{\partial g} = \vec{g} \cdot \vec{\nabla f}$

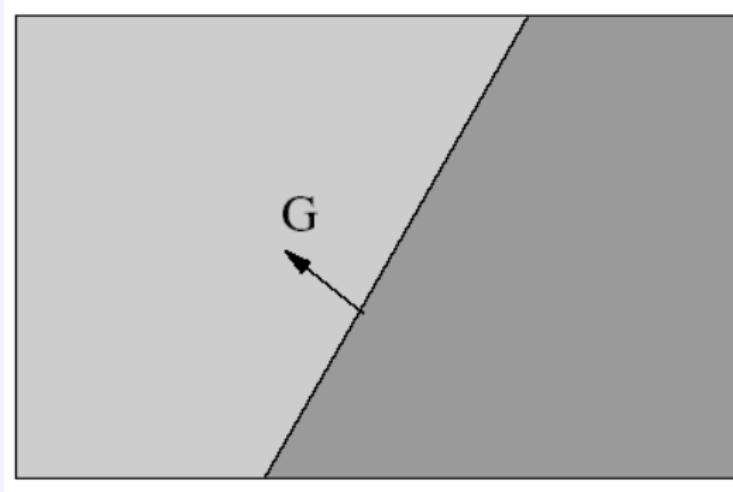
- ▶ L'équation obtenue est complexe et non linéaire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}} = 0 \quad (5)$$

Modèle de Contour

Définition du Contour

- ▶ Lieu des maxima du gradient dans la direction \vec{g} du gradient

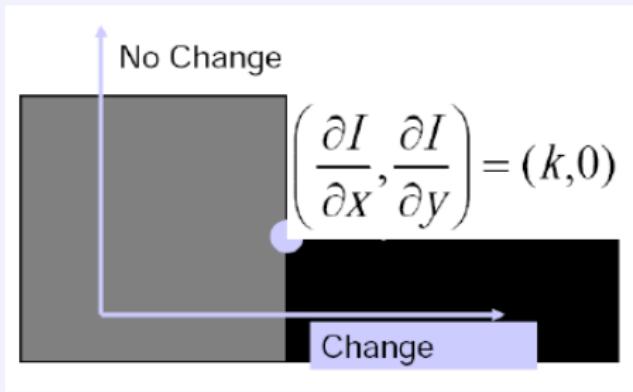


- ▶ \vec{g} normal à la surface définie par $f(x, y)$

Modèle de Contour

Définition du Contour

- ▶ Lieu des maxima du gradient dans la direction \vec{g} du gradient

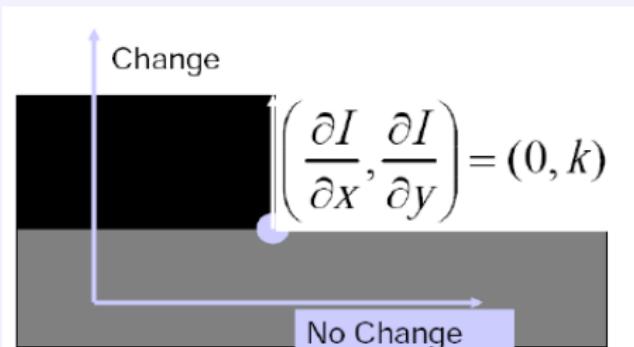


Contour vertical

Modèle de Contour

Définition du Contour

- ▶ Lieu des maxima du gradient dans la direction \vec{g} du gradient

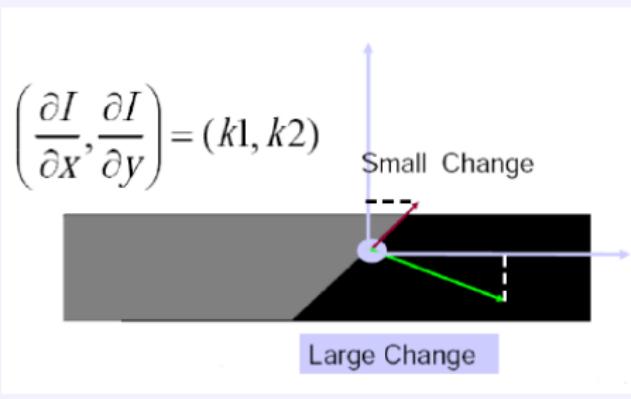


Contour horizontal

Modèle de Contour

Définition du Contour

- ▶ Lieu des maxima du gradient dans la direction \vec{g} du gradient



Plan du cours

- ① Modélisation des contours - formulation du problème de détection
- ② Résolution : Approches basées filtre (différences finies)
 - Filtrage du premier ordre
 - Filtrage second ordre
- ③ Résolution : Approches continues (filtrage optimal)
- ④ Post-traitement : de l'image dérivée aux contours
 - seuillage et chaînage.

Résolution du problème : Approches basées filtrage

Approches discrètes : approximations par différences finies

- ① Approches du 1^{er} ordre \iff approximations du gradient
- ② Approches du 2nd ordre \iff approximations du Laplacien

Approximations discrètes du gradient

- ① approximations discrète du gradient par différences finies
 - filtres de convolution (masques)
- ② Calcul de la norme
 - $L_2 : \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$, $L_1 : |\frac{\partial f}{\partial x}| + |\frac{\partial f}{\partial y}|$, etc
 - Maxima locaux dans la direction du gradient
- ③ Suppression de non maxima
- ④ Seuillage
- ⑤ Chainage

Approximations discrètes du gradient

approximation du gradient $\vec{\nabla}f = (\nabla_x f ; \nabla_y f)^T$

- ▶ $\nabla_x f \approx f(x, y) - f(x - 1, y)$ ($\nabla_y f \approx f(x, y) - f(x, y - 1)$)
- ▶ $\nabla_x f \approx f(x + 1, y) - f(x - 1, y)$
- ▶ Roberts (gradients à $\frac{\pi}{4}$) : $\nabla_1 f \approx f(x + 1, y + 1) - f(x, y)$
 $(\nabla_2 f \approx f(x, y + 1) - f(x + 1, y))$
- ▶ Autre masques : Prewitt, Sobel etc.

1	
-1	

gradient

1	
	-1

Roberts

1		-1
1		-1
1		-1

Prewitt

1		-1
2		-2
1		-1

Sobel

Sobel > Roberts > Gradient > Prewitt

Approximations discrètes du gradient

De nombreux autres masques : Kirsch

$$H_0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \dots \quad H_7 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

- ▶ Gradient retenu : $\max_i \{|H_i * I|\}, i \in \{0; 7\}$
- ▶ Orientation retenue : $\frac{\pi}{4} \arg \max_i \{|H_i * I|\}, i \in \{0; 7\}$

Approximations discrètes du gradient

Sobel : masque le plus couramment utilisé

① Gradient avec Sobel

$$② G_x = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } G_y = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

③ Module du gradient $\|G\| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$

④ Orientation du gradient de : $\theta = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$



source



$\|G\|$



θ

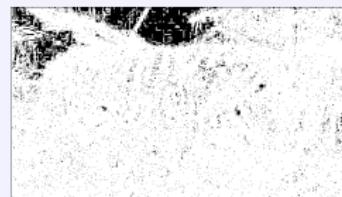
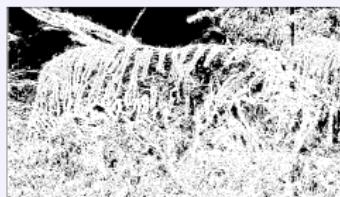
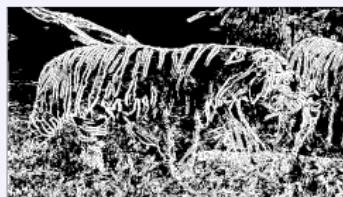
Approximations discrètes du gradient

Obtention d'une carte binaire des contours

- ▶ Calcul norme L2 : $\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$ ou L1 : $|\frac{\partial f}{\partial x}| + |\frac{\partial f}{\partial y}|$
- ▶ Post-traitement (voir partie consacrée)
 - Maxima locaux dans la direction du gradient
 - Seuillage

Approximations discrètes du gradient

Carte binaire des contours : exemple avec Sobel



- ▶ Seuil haut : contours pertinents détectés, mais beaucoup de bruit
 - ⊖ Contours épais
- ▶ Seuil bas : peu de bruit, mais de nombreuses détections manquées
- ▶ Solution ?

Approximations discrètes du gradient

Combiner lissage et différentiation

- ▶ Les masques locaux de convolution sont sensibles au bruit, e.g. faux positifs dans les zones texturées
- ▶ Idée : Lissage puis différentiation \Rightarrow variations locales filtrées, contours dominants restent
 - Filtres linéaire pour les bruits de moyenne nulle (par exemple bruit blanc Gaussien, filtre Gaussien).
 - Filtrage non-linéaire pour les bruits impulsionnels (filtre médian par exemple).

Approximations discrètes du gradient

 $\sigma = 1.0$  $\sigma = 2.0$  $\sigma = 4.0$  $\sigma = 6.0$ 

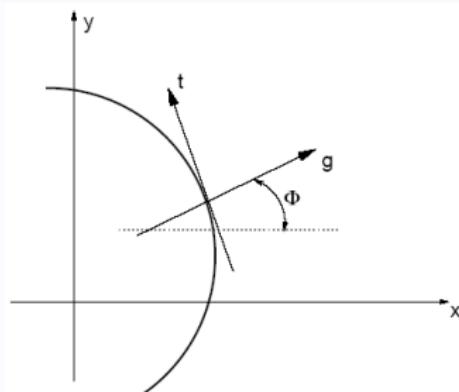
Approximations discrètes du gradient

Combiner lissage et différentiation



- ▶ Fort lissage : robustesse au bruit, mais contours épais (mauvaise localisation)
- ▶ Faible lissage : sensibilité au bruit, mais bonne localisation
- ▶ Seuil : difficile d'avoir un seuil optimal pour toute l'image
 - variations d'illumination, de contraste
 - Lien avec suppression de non-maxima (voir partie consacrée)

Résolution du problème : Approches du second ordre



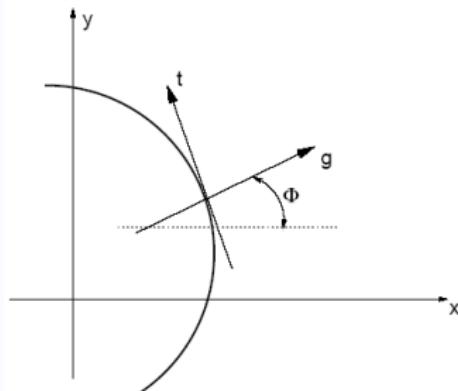
$$\Phi = \text{Arctg} \left[\frac{\frac{\partial i}{\partial x}}{\frac{\partial i}{\partial y}} \right]$$

$$\frac{\partial i}{\partial g} = \frac{\partial i}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial i}{\partial y} \sin \Phi$$

- ▶ Second ordre : dérivées secondes dans la direction du gradient : $\frac{\partial^2 f}{\partial g^2}$
- ▶ Laplacien : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial g^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\theta) \sin(\theta) = 0 \quad (6)$$

Résolution du problème : Approches du second ordre



$$\Phi = \text{Arctg} \left[\frac{\frac{\partial i}{\partial x}}{\frac{\partial i}{\partial y}} \right]$$

$$\frac{\partial i}{\partial g} = \frac{\partial i}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial i}{\partial y} \sin \Phi$$

- ▶ Contour : on cherche les passages par zéro de $\frac{\partial^2 f}{\partial g^2}$
- ▶ Laplacien : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Approximation :
 $\Delta f \approx \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
 - On néglige la composante tangentielle ($\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$)
 - Valide dans les zones de faible courbure

Approches discrètes du second ordre

Approximations du Laplacien par différences finies

$$\Delta f \approx [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y) \quad (7)$$

OU

$$\begin{aligned} \Delta f \approx & [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) + f(x+1, y+1) \\ & + f(x-1, y-1) + f(x-1, y+1) + f(x+1, y-1)] - 8f(x, y) \end{aligned}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

Approches discrètes du second ordre

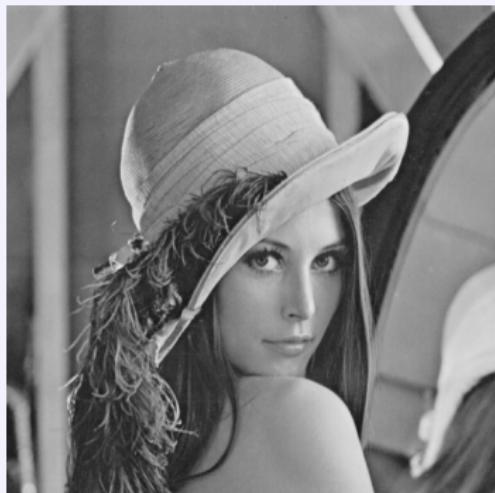
Du Laplacien aux images des dérivées

- ▶ Détection des passages par zéro du Laplacien
- ▶ En pratique :
 - Prendre une fenêtre centrée 3×3 sur le pixel (i, j) , et calculer $\max(I_L)$ et $\min(I_L)$.
 - Le passage par O sera détecté si $\max(I_L) > 0$, $\min(I_L) < 0$ et $\max(I_L) - \min(I_L) > S$.

Approches discrètes du second ordre

Laplacien : exemples d'images

source



Laplacien

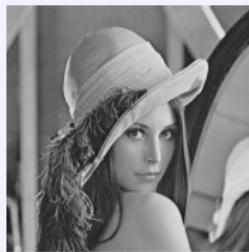


- ▶ Image Laplacien : contours \iff transitions entre valeurs positives (blanc) et négatives (noir)
 - Avec un seuil sur l'amplitude

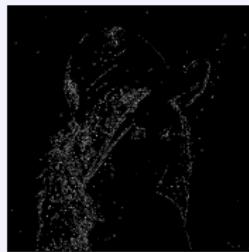
Approches discrètes du second ordre

Laplacien : exemples d'images

source



Seuil bas



Seuil moyen



Seuil haut



- ▶ Passage par zéro du Laplacien : seuiller l'amplitude des variations

Approches discrètes du second ordre

Comparaison Gradient / Laplacien

- ▶ \oplus Contours fermés
- ▶ \oplus Un seul paramètre, pas de seuil sur l'amplitude
- ▶ \oplus Possibilité d'interpolation subpixellique
- ▶ \ominus Pas d'orientation des contours v.s \oplus invariance en rotation
- ▶ \ominus Moins bonne localisation des contours / filtres premier ordre
- ▶ \ominus Dérivées seconde : grande sensibilité au bruit
⇒ Nécessité de lissage par filtrage passe-bas

Approches discrètes du second ordre

Pré-traitement : lissage passe-bas : $I \star g$

- ① Convolution de l'image avec un masque Laplacien : $I \star g \star \Delta$
- ② Cas d'un masque Gaussien : $g(x, y, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

$$I \star g \star \Delta = I \star (\Delta \star g) = I \star \Delta g \quad (8)$$

$$\Delta \star g = \Delta g = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

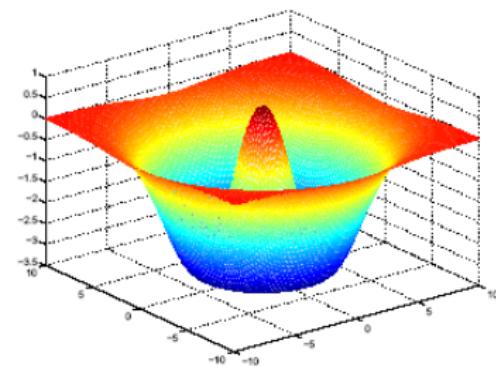
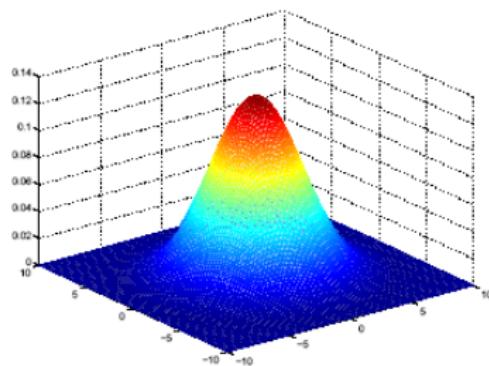
- ③ On convolue directement I avec le masque défini par Δg : Laplacian of Gaussian (LoG)

Approches discrètes du second ordre

Lissage passe-bas + Laplacien : $I \star \Delta g$

$$\Delta \star g = \Delta g = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Filtre gaussien et son Laplacien

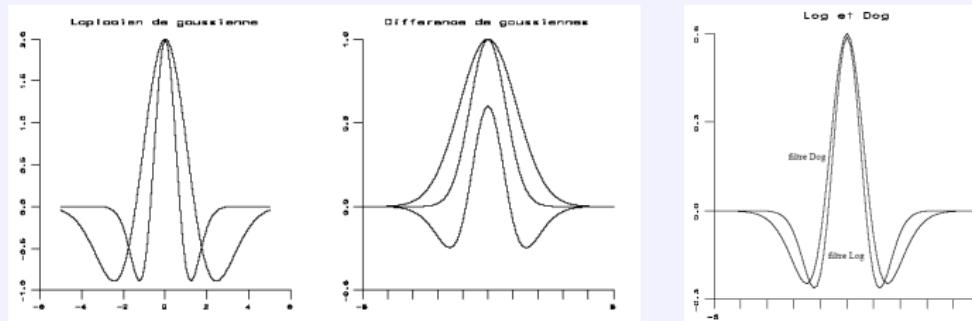


Approches discrètes du second ordre

Laplacian of Gaussian (LoG)

- ▶ LoG : filtre du système de vision humain
- ▶ LoG peut être approximé par DoG : Difference of Gaussians ($\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1.6$)

$$DoG(x, y, \sigma_1, \sigma_2) = g(x, y, \sigma_1) - g(x, y, \sigma_2) \quad (9)$$

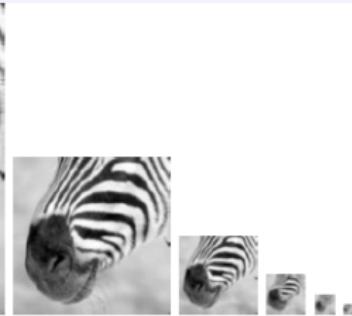
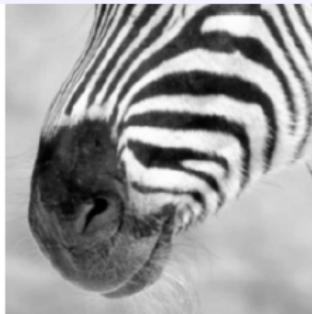
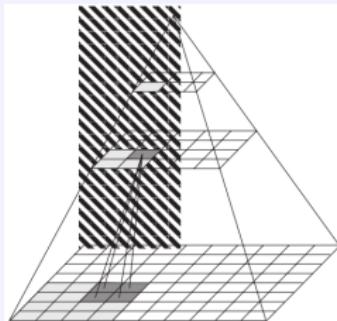


- ▶ Utilisé dans le cadre de la multi-résolution (pyramides)

Approches du premier et du second ordre

Multi-résolution

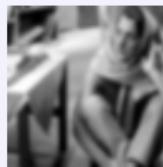
- ▶ Le filtrage à σ fixé va détecter des contours à un certain niveau de granularité
- ▶ σ faible, on détecte les contours fins : bruit
- ▶ σ grand, on détecte les structures principales de l'image, mais on perd les détails
- ▶ Pyramide : σ varie, on détecte les contours à différentes échelles



Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution : construction (taille image 2^k)

- ▶ On part de l'image originale I_0 qu'on filtre avec un masque gaussien g_σ : $I'_0 = I_0 \star g_\sigma$
- ▶ L'image du second niveau I_1 est sous-échantillonée (facteur 2) à partir de I'_0 : $I_1 = (I_0 \star g_\sigma) \downarrow 2$
- ▶ processus récursif : I_{k+1} est sous-échantillonée (facteur 2) à partir de I'_k : $I_{k+1} = (I_k \star g_\sigma) \downarrow 2$
- ▶ jusqu'à avoir une image de taille 1



Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution et détection de contours

- ▶ Le filtrage à σ fixé va détecter des contours à un certain niveau de granularité
- ▶ σ faible, on détecte les contours fins (bruit), bonne localisation
- ▶ σ grand, on détecte les structures principales de l'image, mais on perd les détails
- ▶ Pyramide : σ varie, on détecte les contours à différentes échelles
- ▶ Fusion multi-échelle : utiliser les contours à grande échelle, et affiner la localisation en utilisant les résultats à plus faible échelle

Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution et détection de contours : niveau 0



Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution et détection de contours : niveau 1



Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution et détection de contours : niveau 2



Approches du premier et du second ordre

Pyramide multi-résolution et détection de contours : niveau 3



Plan du cours

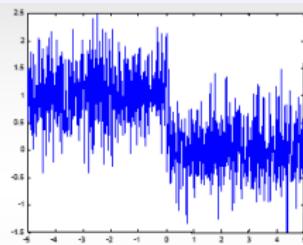
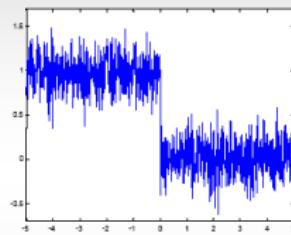
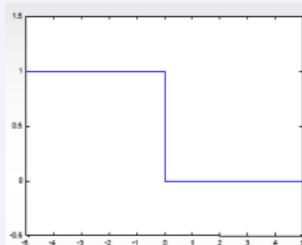
- ① Modélisation des contours - formulation du problème de détection
- ② Résolution : Approches basées filtre (différences finies)
 - Filtrage du premier ordre
 - Filtrage second ordre
- ③ Résolution : Approches continues (filtrage optimal)
- ④ Post-traitement : de l'image dérivée aux contours
 - seuillage et chaînage.

Résolution du problème : Approches continues

Filtrage optimal : Canny (1986)

- ▶ En 1d : modélisation du contour par une marche
- ▶ Avec du bruit : $C(x) = A\Theta(x) + n(x)$, n bruit blanc gaussien.
- ▶ On cherche le filtre f dérivateur tel que :

$$f * C = \Theta \quad (10)$$



Résolution du problème : Approches continues

Canny : critères d'optimalité pour le filtrage

- ① Bonne détection : critère Σ
- ② Bonne localisation : critère Λ
- ③ Unicité de la réponse

⇒ On cherche f déivateur qui maximise Σ et Λ sous la contrainte d'unicité de la réponse

Approches continues

Canny : solution du filtrage filtre RIF

- ▶ Canny : solution par filtre Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

$$f(x) = a_1 e^{\frac{x}{\sigma}} \sin(wx) + a_2 e^{\frac{x}{\sigma}} \cos(wx) + a_3 e^{\frac{-x}{\sigma}} \sin(wx) + a_4 e^{\frac{-x}{\sigma}} \cos(wx) \quad (11)$$

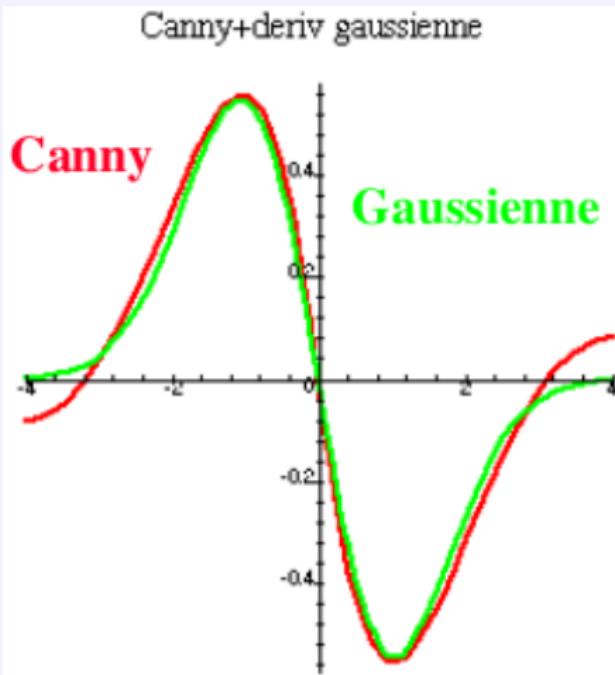
- ▶ Peut être approximé par une dérivée de Gaussienne : $f(x) \approx -xe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ Passage en 2d : action de 2 filtres croisés :

$$f_x(x, y) = -xe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} \text{ et}$$

$$f_y(x, y) = -ye^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}$$

Approches continues

Canny : approaximation par une dérivée de Gaussienne



Approches continues

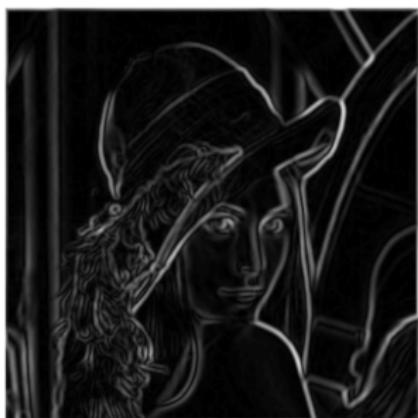
Canny : exemple de résultat



filtre horizontal (contours verticaux)



filtre vertical



norme du gradient



Contours (norme du gradient, seuillé et aminci)

Approches continues

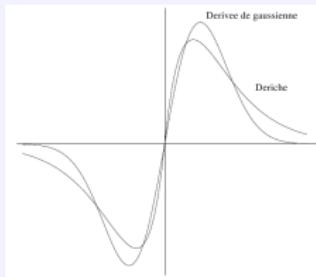
Optimisation du problème de Canny : Deriche

- ▶ Modèle du filtre avec Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)
- ▶ Forme du filtre RII maximisant Σ et Λ sous la contrainte d'unicité de la réponse

$$f(x) = -ce^{-\alpha|x|} \sin(wx) \quad (12)$$

avec $c = (1 - e^{-\alpha})^2 / e^{-\alpha}$

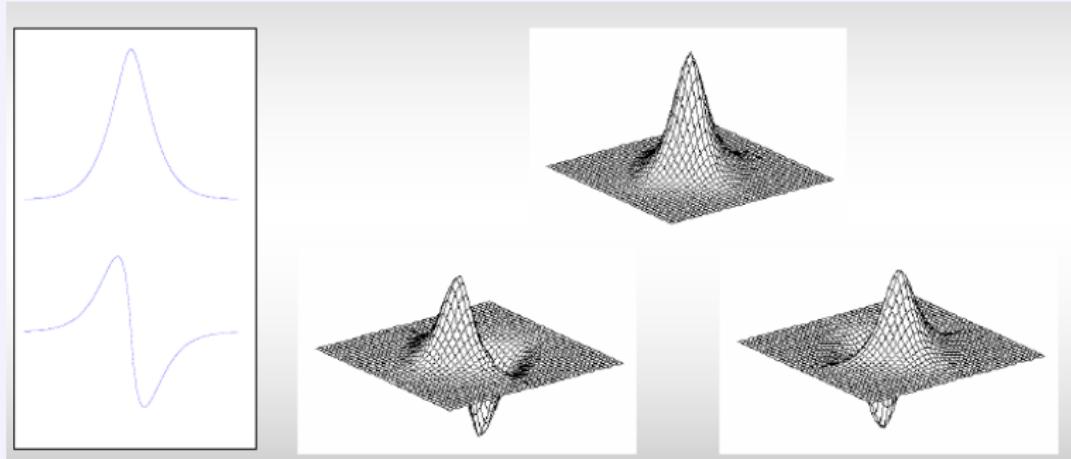
- ▶ Peut s'implémenter efficacement de manière récursive



Approches continues

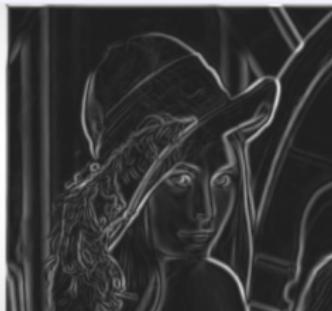
Canny-Deriche : forme des filtres 2d

- ▶ on définit $k = \int f$, alors le filtre 2d s'écrit :
 $f_x(x, y) = f(x)k(y)$ et $f_y(x, y) = f(y)k(x)$



Approches continues

Canny-Deriche : résultats

 $\alpha=0.2$  $\alpha=0.7$  $\alpha=1.5$

- ▶ Influence de $\alpha \iff$ facteur d'échelle
- ▶ Faible α : peu de robustesse au bruit, bonne localisation
- ▶ Fort α : bonne robustesse au bruit, mauvaise localisation
- ▶ Adapter α au rapport Signal/Bruit de l'image

Approches continues : conclusion

Autres optimisation analytiques

- ▶ Schéma général de construction d'un filtre :
 - ① produit d'une fonction passe-bas, symétrique, paramétrée par α
 \iff bruit et taille entre 2 contours
 - ② produit d'une fonction passe-haut, anti-symétrique
- ▶ Ex : Canny-Deriche Gaussienne et dérivée de Gaussienne
- ▶ Shen-Castan $f(x) = csign(x)e^{-\alpha|x|}$
- ▶ De nombreux autres filtres proposés : Spacek, Petrou, etc

Plan du cours

- ① Modélisation des contours - formulation du problème de détection
- ② Résolution : Approches basées filtre (différences finies)
 - Filtrage du premier ordre
 - Filtrage second ordre
- ③ Résolution : Approches continues (filtrage optimal)
- ④ Post-traitement : de l'image dérivée aux contours
 - seuillage et chaînage.

Post-Traitements

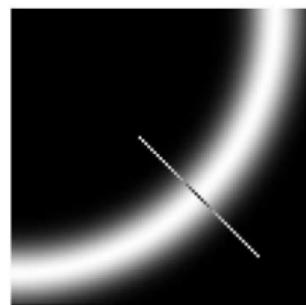
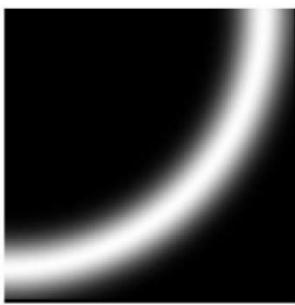
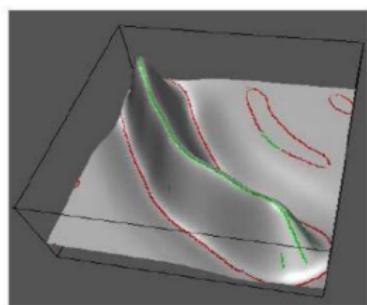
De l'image des dérivées aux contours

- ▶ Image des dérivées : Probabilité/vraisemblance d'appartenance au contour
 - ① premier ordre : valeurs fortes indiquent présence contour
 - ② premier ordre : valeurs proches de 0 indiquent présence contour
- ▶ Pour extraire les contours de l'image :
 - ① Suppression de non maxima dans la direction du gradient
 - ② Seuillage
 - ③ Chaînage des contours

Post-Traitements

Suppression de non-maxima

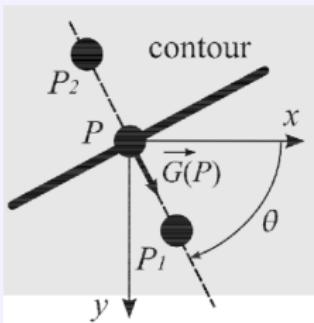
- ▶ Rappel : on recherche les maxima locaux dans la direction du gradient
 - ① Déterminer, pour un pixel p donné, les valeurs du gradient sur la droite passant p et de direction celle de son gradient.
 - ② Vérifier que le gradient en p est bien localement maximal sur cette droite.



Post-Traitements

Suppression de non-maxima

- ▶ Rappel : on recherche les maxima locaux dans la direction du gradient
- ▶ P est un maximum local $\iff \|\overrightarrow{G(P)}\| > \|\overrightarrow{G(P_1)}\|$ et $\|\overrightarrow{G(P)}\| > \|\overrightarrow{G(P_2)}\|$



Post-Traitements

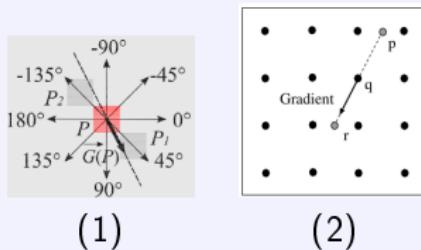
Suppression de non-maxima : application pratique

1 Discrétisation de la direction

- On arrondit la direction à $\frac{\pi}{4}$ (*8 voisins*)
- on cherche les 2 pixels voisins dans la direction du gradient

2 Interpolation

- On calcule la valeur subpixels des deux voisins
- On interpole la valeur de la norme du gradient en ces points



3 Suppression de P si $\|\overrightarrow{G(P)}\|$ non maximale

Post-Traitements

Suppression de non-maxima : application pratique

- ▶ Assure d'avoir des contours d'épaisseur 1



source



$$\|\vec{G}\|$$



NMS



Contours fins

Post-Traitements

Seuillage

① Seuillage simple : on garde les pixels pour lesquels

$$\overrightarrow{\|G(x, y)\|} > \text{Seuil}$$

- Difficile d'avoir un seuil unique pour toute l'image
- Variations de contraste, d'illumination, etc

② Seuillage par hystérésis

- Seuil haut : sélection d'un ensemble initial de points de contour

- Seuil bas : à partir de ces points, on chaîne d'autres points dont

$$\overrightarrow{\|G(x, y)\|} > \text{Seuil bas}$$

Post-Traitements

Chaînage des contours

- ▶ Nécessaire pour beaucoup d'applications, avoir un ensemble de composantes connexes
- ▶ Pour extraire droites, cercle, formes géométriques et représentations plus complexes
- ▶ Différentes stratégies :
 - ① Etiquetage en composantes connexes
 - ② Recherche dans les graphes (programmation dynamique)
 - ③ Approches multi-échelles
 - ④ Automates
 - ⑤ etc
- ▶ Hors du cadre du cours d'aujourd'hui