



Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo I

4302303
Prof. Edivaldo Moura SANTOS
2º Semestre de 2019
Níckolas de Aguiar ALVES

Eletromagnetismo I

4302303

Professor: Edivaldo Moura SANTOS, DFEP-IFUSP
Notas por: Níckolas de Aguiar ALVES
Nível: Graduação
Período: 2º Semestre de 2019



São Paulo
2º Semestre de 2019

Eletromagnetismo I - 4302303
Edivaldo Moura Santos

Nickolas Alves
2019

Eletromagnetismo I

Revisão de Cálculo Vetorial

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

O operador Gradiente

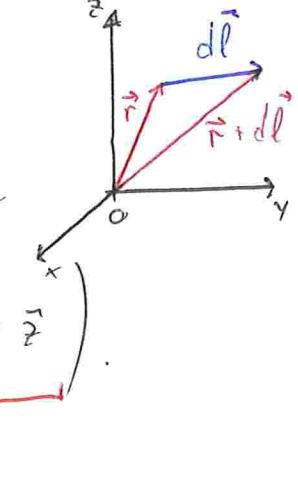
Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de três variáveis. Uma variação infinitesimal no \mathbb{R}^3 ao longo de $d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ implica numa respectiva variação infinitesimal df em f dada por

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz.$$

Perceba que df pode ser escrito na forma de um produto escalar

$$df = \left(\hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}).$$

↳ gradiente de f



Também podemos escrever

$$df = \nabla f \cdot d\vec{l}$$

$$= \|\nabla f\| \cdot \|d\vec{l}\| \cos \theta$$

fixando $\|d\vec{l}\|$ (não $d\vec{l}$),
 ∇f aponta para a direção de máxima variação de f

↳ $\|\nabla f\|$ é igual à taxa de variação de f ao longo da direção anterior

Exemplo

$$\nabla r = \nabla \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} \frac{z e_i}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{e}_i$$

$$= \frac{x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

$$\nabla r = \hat{r}$$

$$\|\nabla r\| = L$$

O gradiente como operador

$$\nabla f = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

operador gradiente
ou
operador nabla

Não é um produto,
e sim a ação de
 ∇ sobre f

→ apesar da notação sugerir que
 ∇ seja um vetor por si só, só
ganharia significado completo ao
atuar sobre f

Teorema Fundamental do
Cálculo para Gradientes

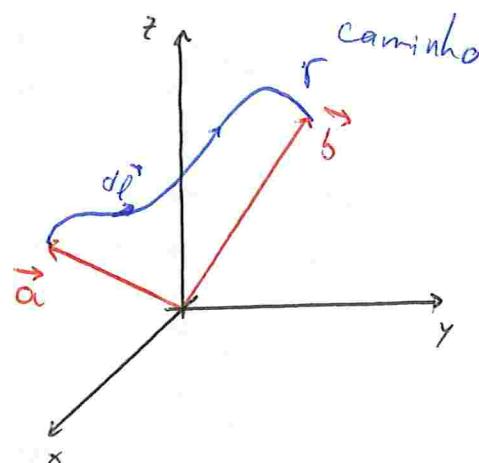
$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\vec{l} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

consequência direta
do TFC

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

o lado direito só depende das pontas inicial e final
da curva Γ , não do trajeto

integrais de linha de gradientes não dependem
do formato do caminho

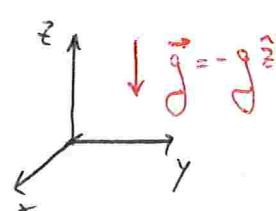


Exemplo: campo gravitacional uniforme

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{l} &= \int_{\Gamma} (-mg\hat{z}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

$$\vec{P} = -mg\hat{z} = -\nabla U \rightarrow U(x, y, z) = U(z) = mgz$$



Note por fim que

$$\oint_S \nabla f \cdot d\vec{l} = 0$$

O Operador Divergente

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z})$$

não é de fato um produto escalar, mas uma instrução de atuação que sobre \vec{v}

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Teorema Fundamental do Cálculo para Divergentes

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} d\tau^* = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

S
fronteira de V

Teorema

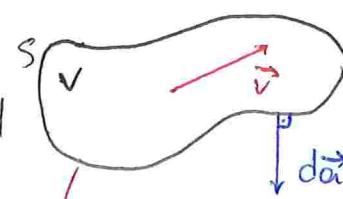
- Gauss
- Green

- Ostrogradsky
- Divergente
- etc...

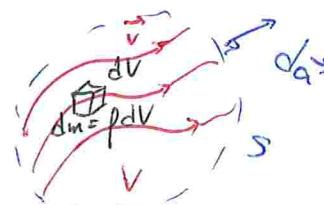
Exemplo: escoamento de um fluido incompressível

Fluxo de massa

$$\vec{\Phi} = \rho \vec{v} \quad [\vec{\Phi}] = \frac{\text{massa}}{\text{tempo} \cdot \text{área}}$$



Fronteira S de V



$$[\nabla \cdot \vec{\Phi}] = \frac{\text{massa}}{\text{tempo} \cdot \text{volume}}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\Phi} d\tau^* = \oint_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{a}$$

quantidade de massa por unidade de tempo através de d\vec{a}

quantidade

de massa por unidade de tempo através de d\vec{a}

criada ou destruída no interior de d\tau^*

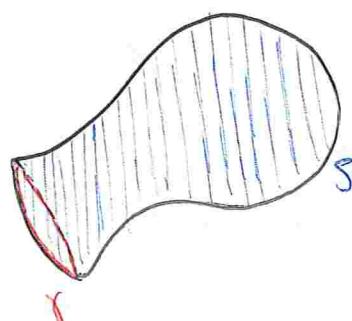
O Operador Rotacional

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Teorema Fundamental do Cálculo para Rotacionais

$$\int_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



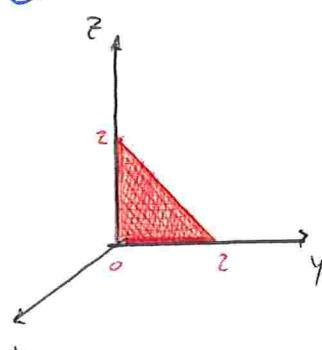
orientação de $d\vec{a}$ e de \vec{r} :

segundo regra da mão direita

lado direito não depende do formato de S , apenas de C

↳ integral de rotacionais não depende do formato de S

$$\oint_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0$$



Exemplo:

$$\vec{v} = xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 3zx\hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{v} = (-2y, -3z, -x)$$

$$d\vec{a} = dy dz \hat{x}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = -2 \int_0^z \int_0^{2-y} y dz dy = -2 \int_0^z [2y - y^2] dy = -2 \left(y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^z = -2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} - 8 = -\frac{8}{3}$$

Exercício: resolver com a integral de linha e verificar que se obtém o mesmo resultado.

Exemplo:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = ?$$

$$\hookrightarrow \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau = 0$$

Contudo,

$$\oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{R^2} \oint_S d\vec{a} = 4\pi \quad \text{será?}$$

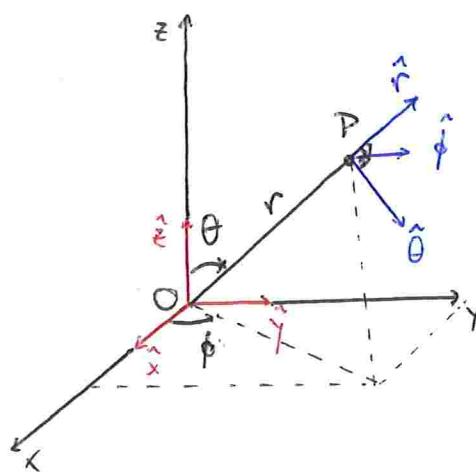
\downarrow
esfera de
raio R

$\frac{\hat{r}}{r^2}$ não é diferenciável em todo ponto no interior de volume \rightarrow mal-definida em $\vec{r} = \vec{0}$

\hookrightarrow problema importante: $\frac{\hat{r}}{r^2}$ está associado ao campo elétrico de uma carga pontual

Coordenadas Esféricas

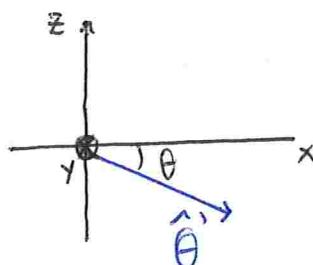
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Relação entre versores da base

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

O versor $\hat{\theta}$ pode ser obtido a partir de um versor auxiliar $\hat{\theta}'$ fazendo uma rotação de ϕ em torno de \hat{z}



$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= R \hat{\theta}' = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

Por fim, $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$ contar

$$\begin{aligned}&= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}\end{aligned}$$

Em forma matricial,

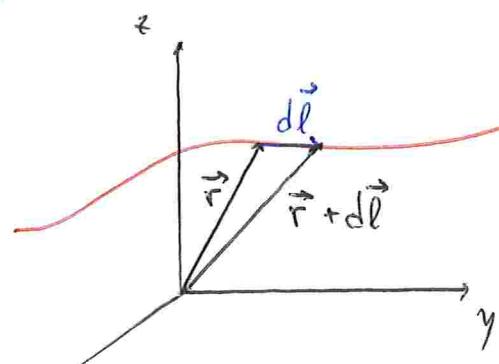
$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

matrix ortogonal O^{-1} = O^T

Elemento de Linha

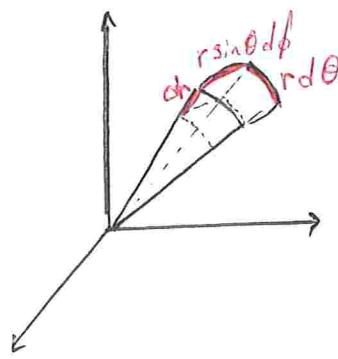
$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$$

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$



Elemento de Volume

$$d\pi = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$



Obtendo ∇f

$$f(r, \theta, \phi)$$

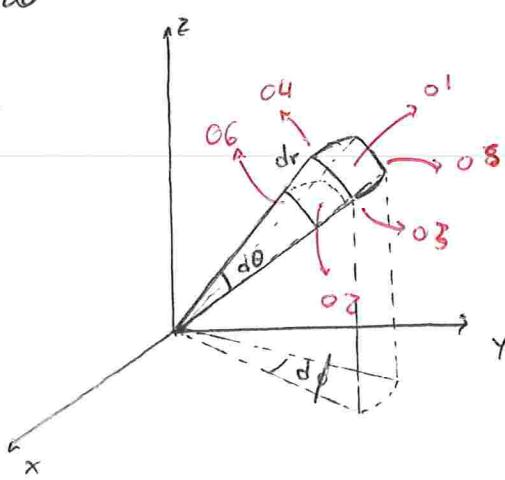
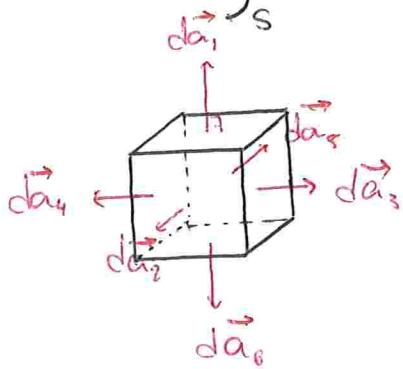
$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} r d\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} r \sin\theta d\phi \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \cdot (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, d\pi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

Para um volume de integração infinitesimal $d\pi$

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \nabla \cdot \vec{v} \, d\pi$$



$$d\vec{a}_1 = (r + dr)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$d\vec{a}_2 = -r \, dr \, d\theta \, \hat{\phi}$$

$$d\vec{a}_3 = r \sin(\theta + d\theta) \, dr \, d\phi \, \hat{\theta}$$

$$d\vec{a}_4 = -r \sin \theta \, dr \, d\phi \, \hat{\theta}$$

$$d\vec{a}_5 = r \, dr \, d\theta \, \hat{\phi}$$

$$d\vec{a}_6 = -r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_1 = v_r(r + dr, \theta, \phi) (r + dr)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_2 = -v_\phi(r, \theta, \phi) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_3 = v_\theta(r, \theta + d\theta, \phi) \, r \sin(\theta + d\theta) \, dr \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_4 = -v_\theta(r, \theta, \phi) \, r \sin \theta \, dr \, d\phi$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_5 = v_\phi(r, \theta, \phi + d\phi) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a}_6 = -v_r(r, \theta, \phi) \, r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{v} \cdot d\vec{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_r \right) \overbrace{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi}^{d\pi} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta v_\theta \right) \overbrace{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi}^{d\pi} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi) \overbrace{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi}^{d\pi} \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) d\pi \\ &= \nabla \cdot \vec{v} \, d\pi \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$\nabla \times \vec{v}$ pode ser obtido de maneira análoga, por meio do Teorema de Stokes

$$\int_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

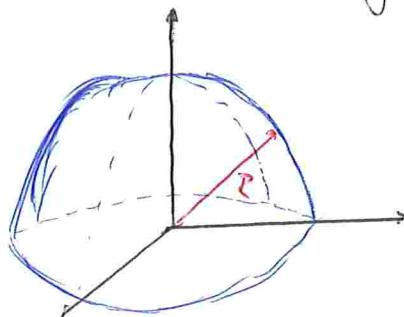
$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

Exercício

$$\vec{v} = r \cos \theta \hat{r} + r \sin \theta \hat{\theta} + r \sin \theta \cos \phi \hat{\phi}$$

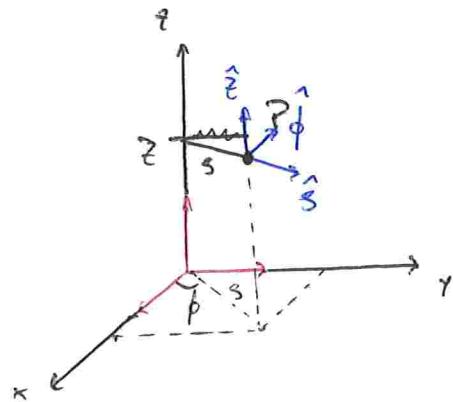
$$\nabla \cdot \vec{v} = ?$$

Verifique o teorema da divergência para o seguinte volume



Sistema de Coordenadas Cilíndricas

$$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$



$$\begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

Elemento de Linha

$$(s, \phi, z) \rightarrow (s+ds, \phi+d\phi, z+dz)$$

$$d\vec{l} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

Elemento de Volume

$$dV = s ds d\phi dz$$

Operadores Diferenciais

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial (sv_s)}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{s} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial (sv_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

Delta de Dirac

Como podemos resolver o problema de que $\frac{1}{r^2}$
não admite o teorema da divergência?

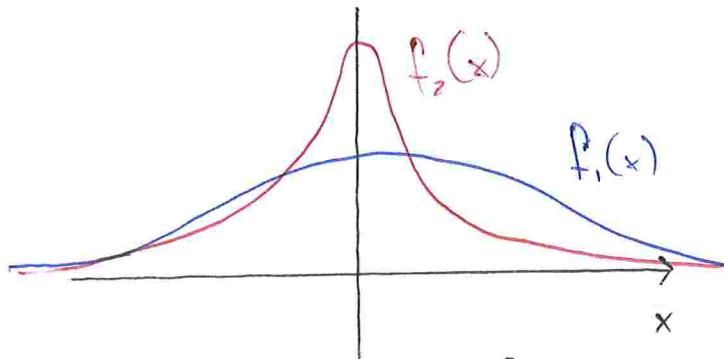
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{se } x=0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

1000303

Podemos definir $\delta(x)$ como o limite de uma sequência de funções $f_n(x)$ com área fixa (e unitária), mas largura tendendo a zero para $n \rightarrow +\infty$

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$



$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}$$

uma possível
sequência para definir
 $\delta(x)$, mas não a única

$(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$.

Note então que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \delta(x) dx \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \\ &= f(0) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(-x) dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

Para $k \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kx) dx \stackrel{k > 0}{=} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kx) dx \stackrel{k < 0}{=} -\frac{1}{k} \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x) dx = -\frac{1}{k}$$

$$\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$$

Delta de Dirac Tridimensional

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

$$\int \delta^3(\vec{r}) d\tau = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\int f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{a}) d\tau = f(\vec{a})$$

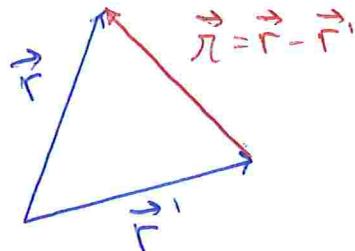
Note que $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ tem propriedades tais como as de $\delta^3(\vec{r})$ ↳ se anula em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ e apresenta uma singularidade em $\vec{0}$

Ademais, a integral volumétrica de $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right)$ é igual a 4π pelo teorema da divergência.

$$\int \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) d\tau = \oint \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{a} = 4\pi.$$

Então

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r}).$$



Consequentemente,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r}).$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^2}.$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \nabla \cdot \left(-\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r})$$

Um elemento matemático como $\delta^3(\vec{r})$ pode parecer estranho, mas é essencial para nossa teoria baseada em cargas pontuais.

Teorema de Helmholtz:

Seja $\vec{F}(\vec{r})$ um campo vetorial com $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ e com divergente $\nabla \cdot \vec{F}$ e rotacional $\nabla \times \vec{F}$ dados

$$\nabla \cdot \vec{F} = D(\vec{r}), \quad \nabla \times \vec{F} = \vec{C}(\vec{r})$$

e tais que

Então \vec{F} pode ser escrito na forma

$$\vec{F} = -\nabla U + \nabla \times \vec{W},$$

ende

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{r'} d\tau', \quad \vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r'} d\tau',$$

□

com $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$.

Conhecer $\nabla \cdot \vec{F}$ e $\nabla \times \vec{F}$ determina \vec{F} completamente (dadas as condições de fronteira)

Demonstração:
As condições sobre o decaimento de $\nabla \cdot \vec{F}$ e $\nabla \times \vec{F}$ garantem a convergência das integrais

$$\int \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{r} d\tau' = \iint_{\substack{R \\ 4\pi}} \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{r} r^2 dr' d\Omega + \iint_{\substack{+\infty \\ 4\pi R}} \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{r} r^2 dr' d\Omega$$

I_1 I_2

$$I_2 \underset{r \gg r'}{\sim} \iint_{\substack{+\infty \\ 4\pi}} \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{r} r^2 dr' d\Omega$$

$r \sim r'$
 \uparrow
 $R \gg r'$

↪ Finito porque $\vec{D}(\vec{r}')$ cai mais rápido que $\frac{1}{r^2}$
↪ se as taxas forem iguais,
a integral divergiria

Seja $\vec{G} = -\nabla U + \nabla \times \vec{W}$, U e \vec{W} dadas pelas integrais acima.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{G} &= \nabla \cdot (-\nabla U + \nabla \times \vec{W}) \\ &= -\nabla^2 U + \nabla \cdot (\nabla \times \vec{W}) = -\nabla^2 U \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v}$$

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{r} d\tau' \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

$$= -\frac{4\pi}{4\pi} \int \mathcal{D}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r}) d\tau'$$

$$= -\mathcal{D}(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{G} = \mathcal{D}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G} &= \nabla \times \left(-\nabla V + \nabla \times \vec{w} \right) \\ &= -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times (\nabla \times \vec{w}) \xrightarrow{\nabla \times (\nabla V) = \vec{0}, \forall f} \nabla \times (\nabla \times \vec{w}) = -\nabla^2 \vec{w} + \nabla (\nabla \cdot \vec{w}) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{w}) \xrightarrow{\nabla \times (\nabla \times \vec{w}) = -\nabla^2 \vec{w} + \nabla (\nabla \cdot \vec{w})} -\nabla^2 \vec{w} + \nabla (\nabla \cdot \vec{w}) \end{aligned}$$

$$-\nabla^2 \vec{w} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = \vec{C}(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} \right) d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left[\int \nabla' \cdot \left[\vec{C}(\vec{r}) \cdot \frac{1}{r} \right] d\tau' - \int \frac{\nabla' \cdot \vec{C}(\vec{r})}{r} d\tau' \right]$$

$$\nabla' \cdot \left(\vec{C}(\vec{r}) \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{C}(\vec{r}) + \vec{C}(\vec{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\nabla' \cdot (\nabla' \times \vec{w}') = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} \cdot d\vec{a}'$$

$$\oint_S \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} \cdot d\vec{a}' = \int_{4\pi} \frac{\vec{C}(\vec{r}') \cdot r^2 \hat{r}}{r} d\Omega \leq \max_S (|\vec{C}(\vec{r}')|) \int_{4\pi} \frac{r^2}{r} d\Omega$$

$\xrightarrow[r \gg |r'|]{r \sim r'} \max_S (|\vec{C}(\vec{r}')|) r' \rightarrow 0$

Então $\nabla \times \vec{G} = -\nabla^2 \vec{w} = \vec{C}(\vec{r})$.

Note que \vec{G} satisfaz todas as informações sobre \vec{F} e temos $\vec{F} = \vec{G}$. ■

Essa decomposição é única? Tendo garantia de que $\vec{G} = \vec{F}$?

Imagine um campo \vec{H} com a propriedade

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = 0.$$

Então $\vec{F} + \vec{H}$ satisfaz $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{H}) = 0$ e $\nabla \times (\vec{F} + \vec{H}) = \vec{C}$.

Exemplo: $\vec{H} = yz \hat{x} + xz \hat{y} + xy \hat{z}$ no entanto, \vec{H} não se anula para $r \rightarrow \infty$ e o teorema está salvo

Um campo assim também

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\nabla^2 \vec{H} + \nabla (\nabla \cdot \vec{H}) \\ &= -\nabla^2 \vec{H} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{H} = \vec{0}$$

para funções harmônicas, o valor na fronteira define o valor no centro

Corolários

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{W}$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{F}}{r} d\tau', \quad \vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{F}}{r} d\tau'$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$$

campos irrotacionais

↳ e.g. campo elétrico em eletrostática

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \times \vec{W}$$

campos solenóides

↳ e.g. campo magnético em magnetostática

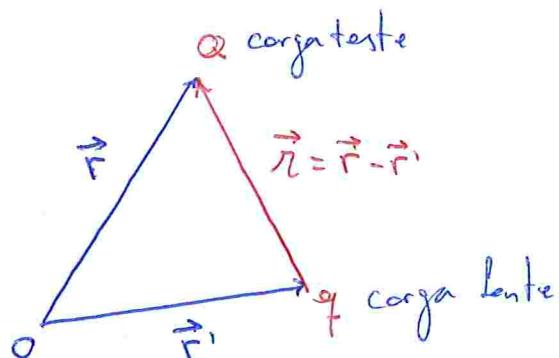
Observação:

os exemplos dependem de casos estáticos devido ao fato de que em Eletrodinâmica precisamos considerar as derivadas parciais temporais

Eletrostática

Lei de Coulomb

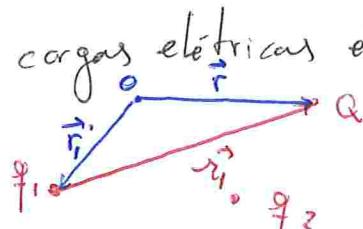
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$



$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

↳ permissividade elétrica do vácuo

Princípio de Superposição: a força entre duas cargas elétricas é completamente independente da presença de outras cargas



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

• q3

$$\vec{F} = Q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$\vec{E}(\vec{r})$$

Propriedades de \vec{E}

- campo vetorial dependente de \vec{r} e da configuração de cargas fontes
- nenhuma dependência nas cargas testes
- fornece a força por unidade de carga teste em \vec{r}
- existe independentemente da carga teste
- existe independentemente do meio material

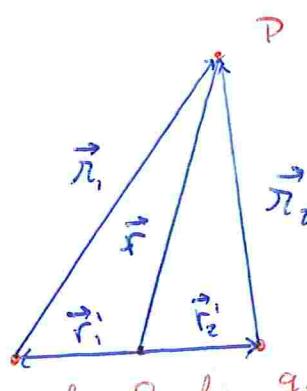
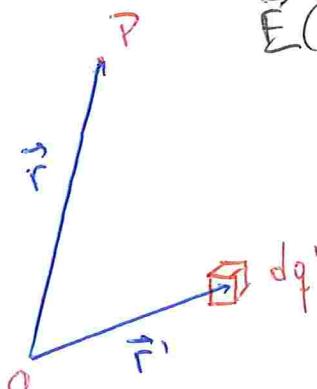
Para uma distribuição contínua de cargas infinitesimais dq

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^2} dq'$$

dq' → linha de cargas

$\sigma dA'$ → superfície de cargas

$p dV'$ → volume de cargas



Exemplo +:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2}{r_2^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{r_2^3} \right]$$

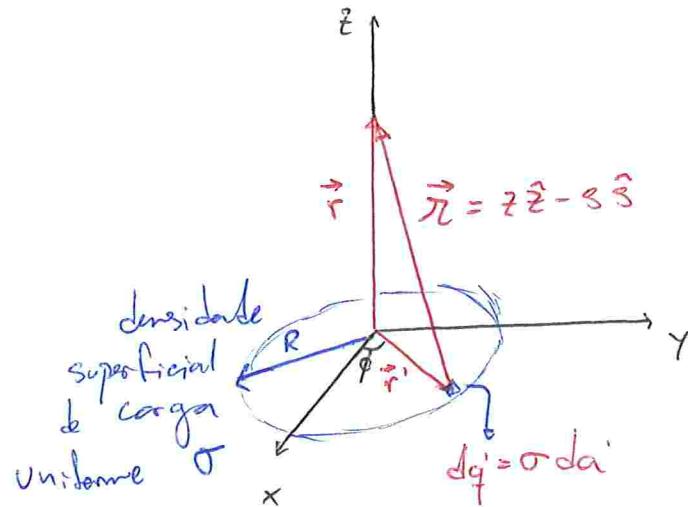
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 (\vec{r} - \vec{r}_1)}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} + \frac{q_2 (\vec{r} - \vec{r}_2)}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3} \right] \quad \text{para } \|\vec{r}\| \gg \frac{l}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2} \hat{r}$$

a grandes distâncias,
se comporta como uma
carga puntual $q = q_1 + q_2$
na origem



Exemplo 2:



$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= s\hat{s} \\ \vec{r} &= z\hat{z} \end{aligned} \right\} \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - s\hat{s}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^3} \sigma s ds d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{z\hat{z} - s\hat{s}}{(z^2 + s^2)^{3/2}} \right] \sigma s d\phi ds \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} z\hat{z} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma s}{(z^2 + s^2)^{3/2}} d\phi ds - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{s^2 s}{(z^2 + s^2)^{3/2}} d\phi ds \end{aligned}$$

por simetria ou
cálculo explícito

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{s}{(z^2 + s^2)^{3/2}} ds \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} z\hat{z} \int_{z^2}^{z^2 + R^2} u^{-3/2} du = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2 + R^2} z\hat{z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z\hat{z} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{z} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z} \xrightarrow{R \gg z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Fluxo de um campo elétrico por uma superfície S

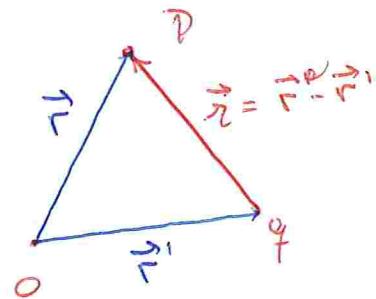
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Fluxo do campo de uma carga puntual na origem através de uma casca esférica de raio R

$$\Phi_E = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{R^2} \right) \cdot \hat{r} d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_S d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Pelo teorema da divergência,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV.$$



Para uma carga puntual,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{R^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{R^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}).$$

Então

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \int_V \delta^3(\vec{r}) dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{para toda superfície fechada } S \text{ que cerca } \vec{r}$$

Pelo Princípio de Superposição,

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_i = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}.$$

Para uma distribuição contínua de cargas,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int p(\vec{r}') \frac{\hat{r}}{R^2} dV' \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{R^2} \right) p(\vec{r}') dV'$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int \delta^3(\vec{r}) p(\vec{r}') dV'$$

$$= \frac{P(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}}$$

Lei de Gauss
forma diferencial

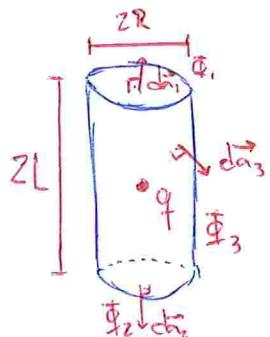
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r) dV = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

Lei de Gauss
forma integral

Exemplo 3:

Calcule explicitamente o fluxo elétrico para uma carga pontual no centro de uma superfície cilíndrica e verifique seu resultado via Lei de Gauss



$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{z} + s\hat{s}}{(z^2 + s^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{L\hat{z} + s\hat{s}}{(L^2 + s^2)^{3/2}}, \quad d\vec{a}_1 = s ds d\phi \hat{z}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{z} + R\hat{s}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad d\vec{a}_3 = R dz d\theta \hat{s}$$

$$\Phi_1 = \frac{qL}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s}{(L^2 + s^2)^{3/2}} d\phi ds = \frac{qL}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{s}{(L^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{qL}{2\epsilon_0} \int_{L^2}^{L^2 + R^2} u^{-3/2} du$$

$$= \frac{qL}{4\epsilon_0} \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]_{L^2}^{L^2 + R^2} = -\frac{qL}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} - \frac{1}{L} \right]$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right] \xrightarrow{\substack{L \gg R \\ R \gg L}} \frac{q}{2\epsilon_0}$$

$$\Phi_3 = \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\theta dz$$

$$= \frac{qR^2}{2\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{qR^2}{\epsilon_0} \int_0^L \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} = \frac{qR^2}{\epsilon_0} \int_0^{\tan^{-1}(L/R)} \cos \theta d\theta$$

$\tan^{-1}(L/R)$

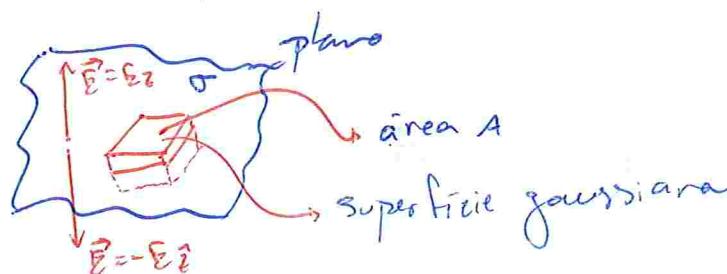
$\tan^{-1}(L/R)$

$$\Phi_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \sin \theta \left| \int_0^{\tan^{-1}(4/R)} \right. = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \left| \int_0^{\tan^{-1}(4/R)} \right.$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}}$$

$$\sum_i \Phi_i = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Campo elétrico de um plano infinito com densidade superficial σ



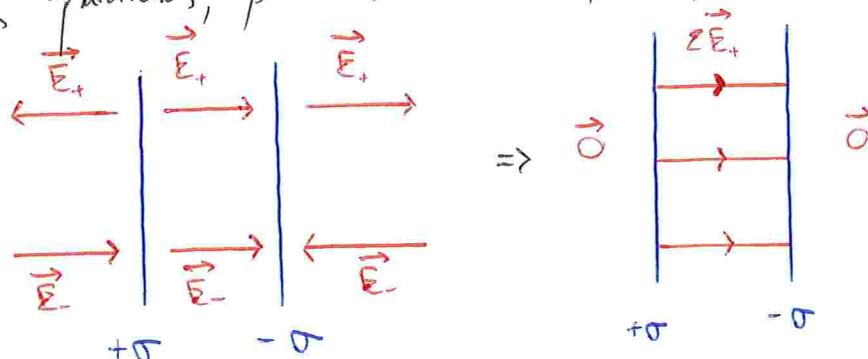
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = Z \parallel \vec{E} \parallel A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\parallel \vec{E} \parallel = \frac{\sigma}{Z \epsilon_0}$$

Portanto, $\vec{E} = \frac{\sigma}{Z \epsilon_0} \hat{z}$ (acima)

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{Z \epsilon_0} \hat{z}$ (abaixo)

Para dois planos paralelos, podemos usar o princípio de superposição



O rotacional de um campo eletrostático

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^2} p(\vec{r}') d\tau' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) p(\vec{r}') d\tau'$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \nabla \times \vec{r} - \vec{r} \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \hat{r} \Rightarrow \vec{r} \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \vec{0}$$

Portanto,

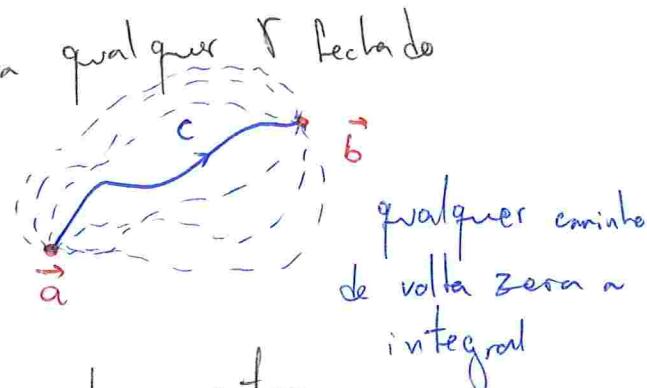
$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{em Eletrostática}$$

Pelo Teorema de Helmholtz, $\vec{E} = -\nabla V$.

De fato, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \vec{0} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{para qualquer } C \text{ fechado}$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ independe do caminho.}$$



Tomando um ponto de referência para definir um campo escalar

$$V(\vec{r}) = - \int_{\theta}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Podemos então

V é definido a menos de uma constante

a Física está em \vec{E} , não V

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\theta}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\theta}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \nabla V \cdot d\vec{l} \quad \text{Teorema Fundamental de Cálculo para Gráficos}$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \nabla V \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{para qualquer caminho entre } \vec{a} \text{ e } \vec{b}$$

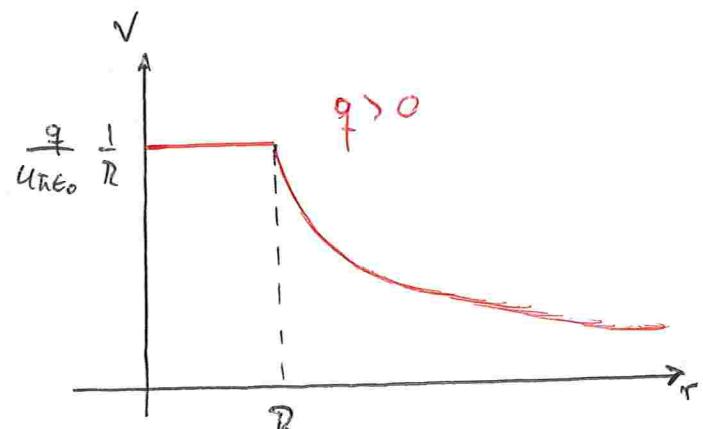
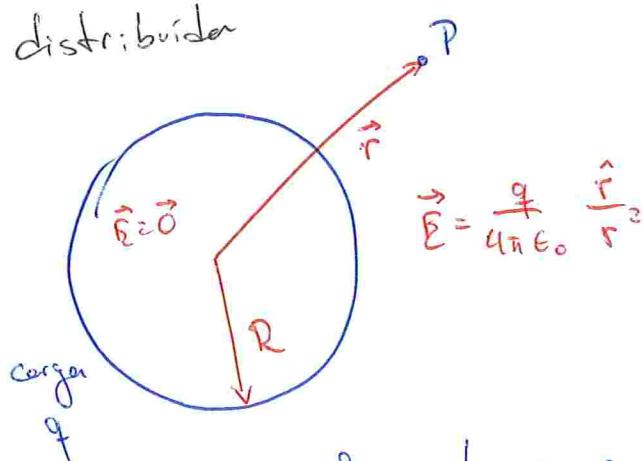
potencial elétrico
ou
potencial escalar

Logo,

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Convenção: em geral, para distribuições localizadas de cargas, toma-se θ de modo que $V \rightarrow 0$ para $r \rightarrow +\infty$ (i.e., $\theta = +\infty$)

Exemplo: casca esférica de raio R com carga uniformemente distribuída



Ponto P fora da casca

$$V(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^r \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r'^2} \right) \hat{r}' dr'$$

$$= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{+\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{+\infty}^r$$

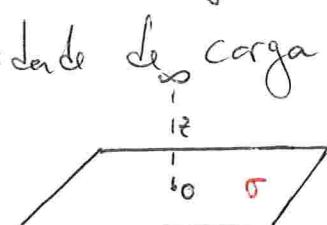
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Ponto P dentro da casca: $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$

Para distribuições de carga que se estendem ao infinito, a escolha $\theta = +\infty$ pode levar a potenciais singulares

Exemplo: placa infinita com densidade de carga uniforme

$$V(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^z \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \right) \cdot \hat{z} dz = -\sigma z \Big|_{+\infty}^z = \infty$$



Centrando, obter V a partir de \vec{E} é pouco interessante, dado que nosso problema é obter \vec{E} . Fazemos então:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{f}{\epsilon_0}, \quad \vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{f}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0}}$$

*Equação
de Poisson*

Para a região com $\rho = 0$, temos

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

*Equação
de Laplace*

Além disso, o Teorema de Helmholtz nos garante que

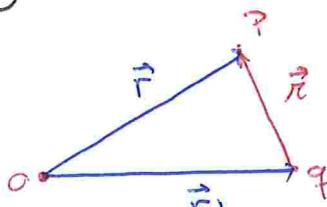
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{E}}{r} d\tau'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{f(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

versões análogas
para distribuições
lineares e superficiais
de cargas

Para uma carga puntual

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$



Para n cargas pontuais

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

pelo princípio de
superposição

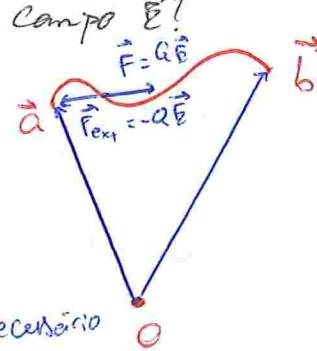
Naturalmente, para uma distribuição contínua

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{f(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

como esperado.

Qual a mínima energia a ser gasta por um agente externo para levar uma carga Q de \vec{a} a \vec{b} na presença de campo \vec{E} ?

↳ aplicar uma força $\vec{F}_{ext} = -Q\vec{E}$
permite levar de \vec{a} a \vec{b} com velocidade constante



↳ força motriz: aceleração e gasto desse necessário

↳ força menor: não alcança \vec{b}

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -Q \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q [V(\vec{b}) - V(\vec{a})]$$

→ ΔV entre dois pontos é a energia mínima por unidade de carga para levar a carga de um ponto ao outro

para trazer uma carga do infinito a \vec{b} temos

$$W = Q [V(\vec{b}) - V(+\infty)]$$

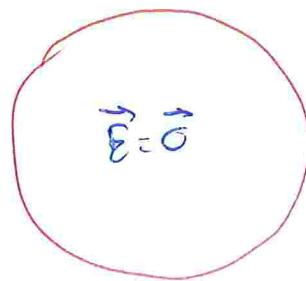
$$= Q V(\vec{b})$$

$V(\vec{r})$ é a energia mínima por unidade de carga para trazer a carga do infinito a \vec{r}

Condições de Continuidade em Eletrostática

↳ algumas descontinuidades em $p(\vec{r})$ levam a descontinuidades em \vec{E}

Exemplo: casca esférica com densidade superficial de carga σ

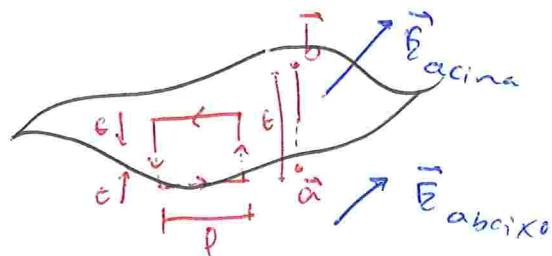
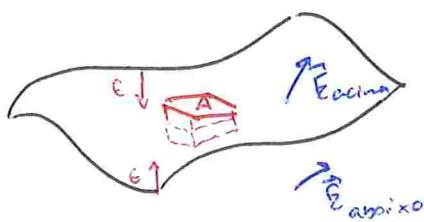


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^2}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\vec{E}(R+\epsilon) - \vec{E}(R-\epsilon)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{R^2}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\sigma 4\pi r^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{r} = \frac{\sigma \hat{r}}{\epsilon_0}$$

De um modo geral



Via Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{acima}^+ A - E_{abixo}^+ A \quad A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\Delta E^+ = E_{acima}^+ - E_{abixo}^+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{acima}'' l - E_{abixo}'' l = 0$$

$$\Delta E'' = E_{acima}'' - E_{abixo}'' = 0$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

o potencial é contínuo
na superfície

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [V(\vec{b}) - V(\vec{a})] = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

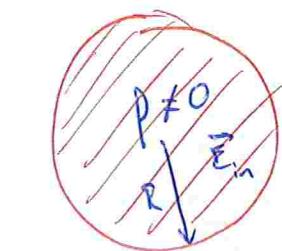
$$\nabla V_{acima} - \nabla V_{abixo} = - \Delta \vec{E} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\frac{\nabla V_{acima} \cdot \hat{n}}{\partial V_{acima} / \partial n} - \frac{\nabla V_{abixo} \cdot \hat{n}}{\partial V_{abixo} / \partial n} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$$

derivada normal

Exemplo: esfera uniformemente carregada



$$\rho \neq 0$$

$$\vec{E}_{\text{out}}$$

Campo
continuo
no cruzante
da superfície

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \hat{r}}{r^2}$$

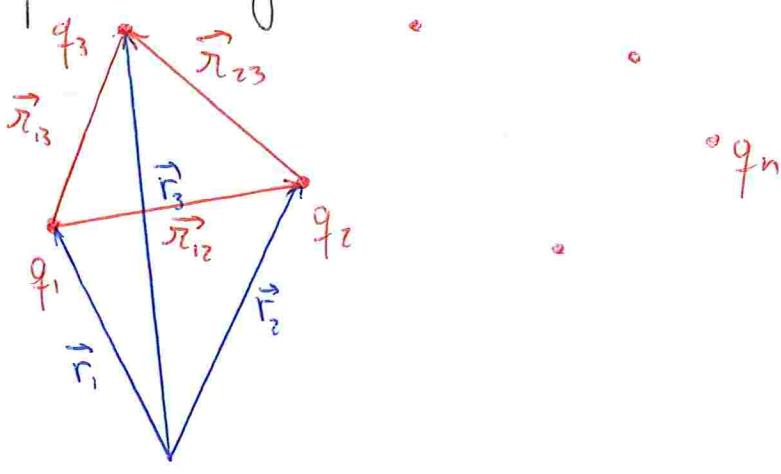
$$= \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \hat{r}}{r^2}$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Energia de um Conjunto de Cargas Pontuais

$w_i = 0$ não há campo para reagir



$$w_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

$$w_3 = q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3)$$

$$= \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

;

Somando as termas termos

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \dots \right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i)$$

potencial eletrostático criado pelas outras
n-1 cargas restantes na posição da
carga q_i

Energia de uma Distribuição Contínua de Cargas

$$W = \frac{1}{2} \int V d\tau = \frac{1}{2} \int p V d\tau'$$

V → volume onde existe
as cargas

$$p = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

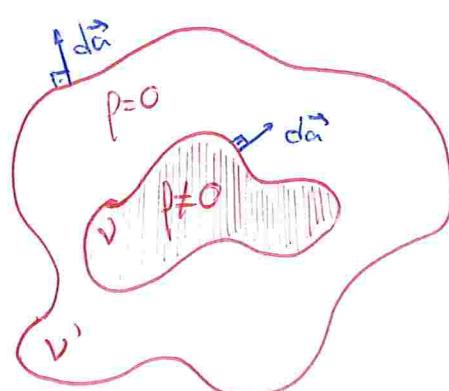
sempre para aumentar
 V colocando $p=0$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau'$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int_V \vec{E} \cdot \nabla V d\tau' + \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \vec{E}^2 d\tau' + \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

→ passo alterar V sem
resultar o resultado final



$$W' = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{V'} \vec{E}^2 d\tau' + \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{V'} \vec{E}^2 d\tau' + \int_{V'} \nabla \cdot (V \vec{E}) d\tau' \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{V'} \vec{E}^2 d\tau' + \int_{V'} (\nabla V) \cdot \vec{E} d\tau' \right]$$

$$+ \int_{V'} V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau'$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \vec{E}^2 d\tau' - \int_V \vec{E}^2 d\tau' + \int_{V'} \frac{1}{\epsilon_0} V d\tau' \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_V p V d\tau' = \frac{1}{2} \int_V p V d\tau' \quad \begin{matrix} \text{estender o domínio de} \\ \text{integração com } p=0 \\ \text{é consistente} \end{matrix}$$

\downarrow
 $p=0 \text{ em } V' \setminus V$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \vec{E}^2 d\tau + \int_S V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right] \quad \begin{matrix} V \sim \frac{1}{r}, \vec{E} \sim \frac{1}{r^2}, d\vec{a} \sim r^2 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 d\tau$$

Para uma carga pontual,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \frac{1}{r^4} r^2 dQ dr$$

$$= 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_0^{+\infty} = +\infty$$

este considera novas operações e posicionamento de cargas pontuais, mas também sua criação

um problema frequente em E&M é mesmo QED

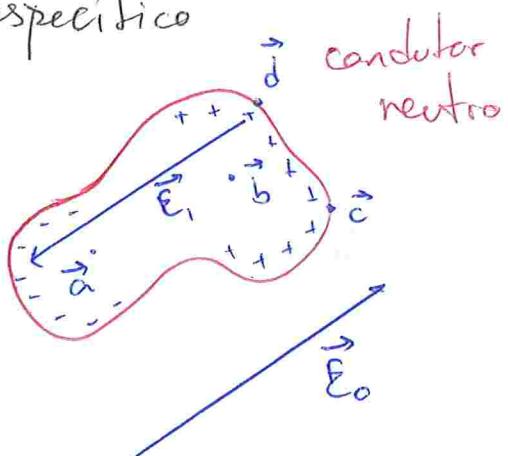
DUAS interpretações para a energia eletrostática

i) armazenada nas cargas elétricas com densidade volumétrica $\frac{1}{2} p V$

ii) armazenada no campo elétrico com densidade $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$

Condutores

- em geral, em condutores, alguns elétrons por efeito escudo livre para se mover no material
- em isolantes, cada elétron está ligado a um atomo específico



Em equilíbrio eletrostático,

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_\parallel = \vec{0} \text{ no interior do condutor.}$$

- * $\vec{E} = \vec{0}$ no interior do condutor
- * $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$ no interior do condutor
- * $V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

* como não há movimentação de cargas na superfície (equilíbrio eletrostático), $\vec{E}_\parallel = \vec{0}$ na superfície

$$V(\vec{d}) - V(\vec{c}) = - \int_{\vec{c}}^{\vec{d}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ = - \int_{\vec{c}}^{\vec{d}} \vec{E}_\parallel \cdot d\vec{l} = 0$$

↳ alternativamente, V é constante no condutor e $\vec{E} = -\nabla V$. Gradiente é perpendicular à superfície de nível.

Nick

↳ a superfície de um condutor é equipotencial

↳ alternativamente, V é continua e constante no interior do condutor. Precisa ser constante na superfície também.

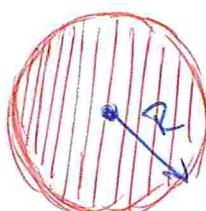
Nick

* $\vec{E} = \vec{E}_t$ na superfície

* cargas líquidas adicionadas no volume do condutor também se acumulam na superfície

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \epsilon^2 d\pi + \int_S \nabla \cdot \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

carga q uniformemente distribuída



$$\vec{E}_{in} = \frac{q}{3\epsilon_0} r \hat{r}$$

$$\vec{E}_{out} = \frac{1}{3} \frac{q}{\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r}$$

$$W_{in} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon^2 d\pi$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \int \frac{q^2}{9\epsilon_0^2} r^2 r^2 dQ dr$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 4\pi \left(\frac{q}{4\pi R^3} \right)^2 \frac{1}{9\epsilon_0^2} \int_0^R r^4 dr$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{q}{16} \frac{q^2}{\pi^2 R^6} \frac{1}{9\epsilon_0^2} \frac{R^5}{5}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q^2}{40\pi} \frac{1}{R}$$

$$W_{out} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^{+\infty} \int \frac{1}{9\epsilon_0^2} \frac{q^2 R^6}{r^4} r^2 dQ dr$$

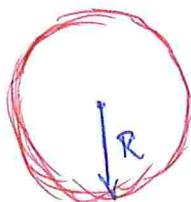
$$= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{1}{9\epsilon_0^2} \frac{q^2}{(4\pi R^3)^2} R^6 \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$W_{out} = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{1}{q\epsilon_0} \frac{q^2}{16\pi^2} \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{R}$$

$$W = W_{in} + W_{out} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20} \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

carga q na superfície



$$\vec{E}_{out} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$W_{out} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E_{out}^2 d\pi$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_R^{+\infty} \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{1}{R} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

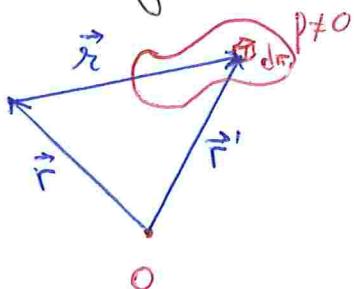
Equação de Laplace

equação de Poisson

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{f}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\nabla V \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0}$$

equação de Laplace

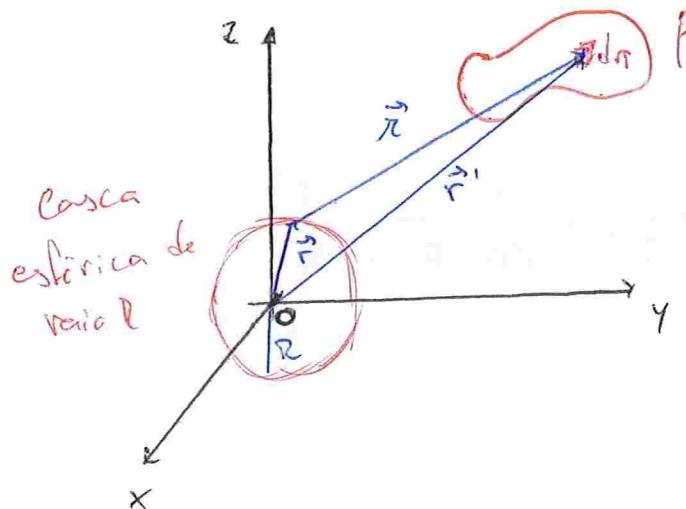
Em região com $f = 0$,



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{f(\vec{r}')}{r'} d\pi'$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

As Soluções de $\nabla^2 V = 0$ são chamadas de funções harmônicas



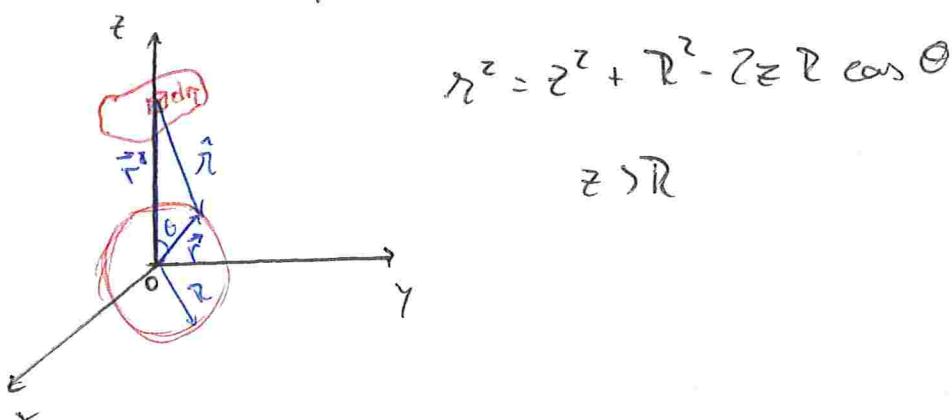
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{p(\vec{r}')}{r'} d\tau'$$

me dia de V sobre a casca esférica

$$\bar{V}_{\text{casca}} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V(\vec{r}) dA$$

$$\oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{p(\vec{r}')}{R} d\tau' dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V p(\vec{r}') \oint_S \frac{1}{R} dA d\tau'$$

Reorientando os eixos, podemos fazer



$$\oint_S \frac{1}{R} dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta \cancel{\cos\theta} d\phi d\theta}{[z^2 + R^2 - 2zR \cos\theta]^{1/2}}$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{[z^2 + R^2 - 2zR \cos\theta]^{-1/2}}{u} \sin\theta d\theta$$

$dA = 2zR \sin\theta d\theta$

$$\int_S \frac{1}{r} da = 2\pi R^2 \frac{1}{2\pi R} \int_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} r^{-1/2} dr$$

$$= \frac{2\pi R}{2} r^{1/2} \Big|_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} \Big) z>R$$

$$= \frac{2\pi R}{2} \left[z+R - z+R \right]$$

$$= \frac{4\pi R^2}{2}$$

$$\bar{V}_{\text{casca}} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V p(\vec{r}') \frac{4\pi R^2}{r'} d\tau$$

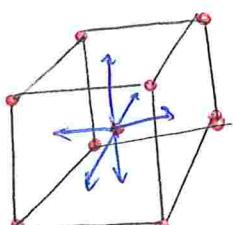
$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{p(\vec{r}')}{r'} d\tau = V(\vec{0})$$

$$V(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S V(\vec{r}) da \quad \begin{matrix} \text{para qualquer} \\ \text{raio} \end{matrix}$$

→ não podem existir máximas e/ou mínimas da equação de Laplace para da fronteira

de contrário, a média dos valores da casca escolhida seria maior que todos os valores

→ não existem pontos de equilíbrio eletrostático estacionais em regiões com $p=0$ → Teorema de



→ não é um ponto estacional, mas sim um ponto de atração

Earnshaw

Teorema 01.

Uma solução V da Equação de Laplace é determinada univocamente ao fixar seus valores na fronteira.

Demoração

Suponha que existam V_1 e V_2 satisfazendo $\nabla^2 V_1 = 0$ e $\nabla^2 V_2 = 0$ em V e assumindo os mesmos valores na fronteira S de V .

Defino $V_3 = V_1 - V_2$, que satisfaz

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

e vale $V_1 - V_2 = 0$ na fronteira.

Como os extremos de V_3 estão todos sobre S e são, portanto, iguais a zero, então $V_3 = 0$ em V e $V_1 = V_2$ em V . Um resultado análogo vale para a Equação de Poisson.

Suponhamos V_1 e V_2 tais que

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{f}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{f}{\epsilon_0}$$

em V e $V_1 = V_2$ em S .

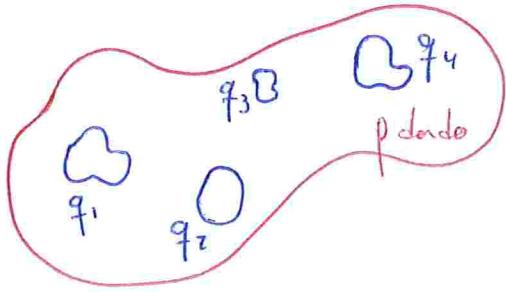
Então $V_3 = V_1 - V_2$ satisfaz $\nabla^2 V_3 = 0$ e $V_3 = 0$ em S . Logo, $V_3 = 0$ em V e $V_1 = V_2$ em V .

Corolário.

O potencial eletrostático é determinado de forma única pela distribuição de cargas e condições de contorno.

Teorema 02.

O campo elétrico \vec{E} numa região contendo condutores é único e determinado se especificarmos a carga total em cada condutor e a densidade de carga entre os condutores.



Demostre:

Na região entre os condutores,

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{E}_2 = \frac{q_2}{\epsilon_0},$$

e

$$\oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_i = \frac{q_1}{\epsilon_0},$$

fronteira do iésimo condutor

$$e \quad \oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_i = \frac{q_2}{\epsilon_0}.$$

Fazendo $V_3 = V_1 - V_2$, temos

$$\nabla \cdot \vec{E}_3 = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \text{ espaço entre os condutores}$$

e

$$\oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_i = 0.$$

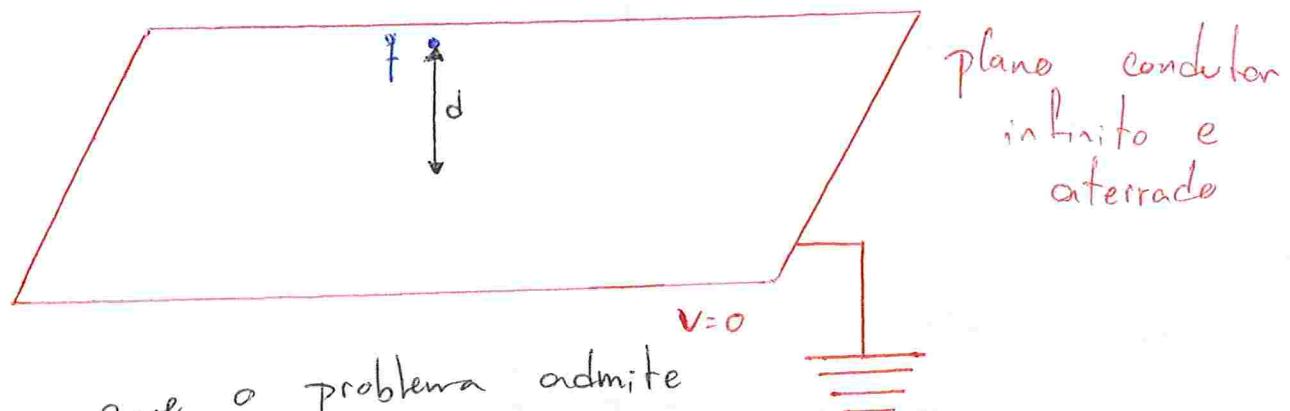
Consideremos a integral $\int_V \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) d\tau$. Note que

$$\nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) = V_3 \nabla \cdot \vec{E}_3 + \vec{E}_3 \cdot \nabla V_3 = - \frac{\vec{E}_3^2}{V \rightarrow +\infty}.$$

$$0 \leq \int_V \vec{E}_3^2 d\tau = - \int_V \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) d\tau = \int_S V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = \sum_i (V_3)_i \int_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\therefore \vec{E}_3 = 0.$$

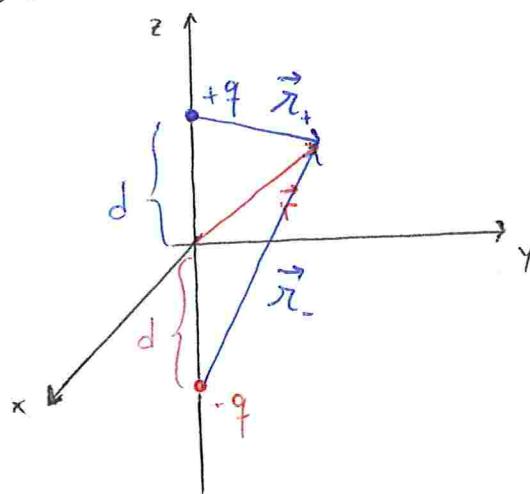
Método das Imagens



Sabemos que o problema admite solução única.

↳ se encontrarmos qualquer solução que respeite as condições de fronteira, é a solução certa

Consideraremos o sistema de duas cargas



$$\vec{r}_+ = x\hat{x} + y\hat{y} + (z-d)\hat{z}$$

$$\vec{r}_- = x\hat{x} + y\hat{y} + (z+d)\hat{z}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{1/2}} \right) \Rightarrow V(z=0) = 0$$

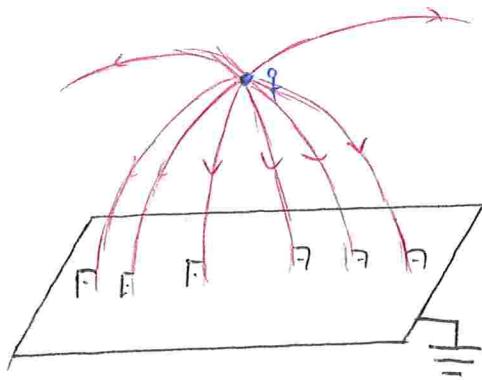
↳ por unicidade, é a solução correta para $z > 0$

↳ em $z < 0$, a densidade de carga não coincide com a densidade real e a solução é não-física para o problema original

Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{(x\hat{x} + y\hat{y} + (z-d)\hat{z})}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z+d)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{em } z=0$$



Para um observador que cruza o plano, há uma descontinuidade de em \vec{E}

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\sigma(x, y) = -\frac{qd}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

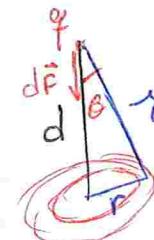
$$Q = \int \sigma(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{qd}{2\pi} \right) \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} dx dy$$

$$= -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi = -qd \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{qd}{2} \int_d^{+\infty} u^{-3/2} du = -\frac{qd}{2} \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \Big|_d^{+\infty} = -q$$

Força entre carga e plano

$$d\vec{F} = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \hat{z}$$



$$dq = 2\pi r dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 + d^2} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \sigma 2\pi r dr$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{q d}{2\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \left(-\frac{q d}{2\pi} \right) \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$= -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^3} \hat{z}$$

$$= -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{d^2}^{+\infty} u^{-3} du \hat{z}$$

$$= -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^{-2}}{-4} \Big|_{d^2}^{+\infty} \hat{z}$$

$$= -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4d^4}$$

Coincide com o
modelo de imagens

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \hat{z}$$

em todo resultado
respeita isso

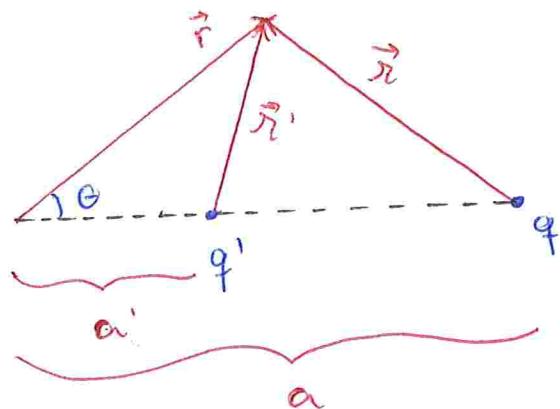
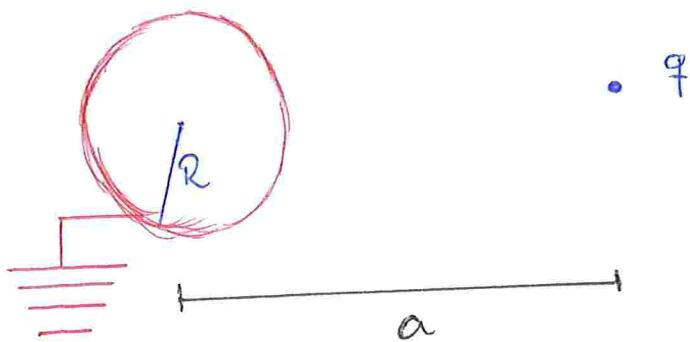
Energia Elétrostática do Sistema

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{+\infty}^d \frac{dz}{(2z)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{+\infty}^d \frac{dz}{z^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \Big|_{+\infty}^d = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4d}$$

Outro problema

Cargar q a uma distância a do centro de uma ~~estrela~~
condutora aterrada de raio R (a
casca esférica)



$$r^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r'^2 = r^2 + a'^2 - 2a'r \cos \theta$$

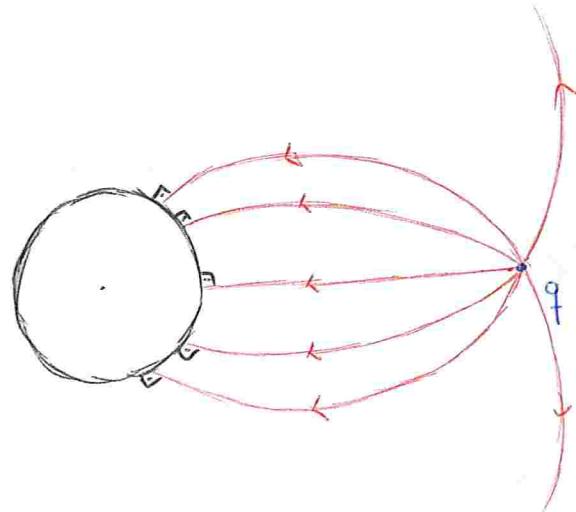
$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}}_{q} + \underbrace{\frac{q'}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r \cos \theta}}}_{q'} \right) \end{aligned}$$

Se formarmos \rightarrow por brilhantismo

$$q' = -\frac{R}{a} q, \quad a' = \frac{R}{a} R$$

temos

$$V(R\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}}}_{q} - \frac{R}{a} \frac{\frac{q}{\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{a^2} - 2Ra \cos \theta}}}{(R^2 - \frac{R^4}{a^2} - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} \right) = 0$$



Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$= - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$

$$\vec{E}(R\hat{r}) = - \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + q' \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r'} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} \right) - \frac{q}{a^2} q' \left(-\frac{1}{r'^2} \frac{\partial r'}{\partial r} \right) \right)$$

$$\vec{E}(R\hat{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] R}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} \hat{r}$$

\downarrow carga induzida

$$\sigma(\theta) = - \frac{q}{4\pi} \frac{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1 \right] R}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}}$$

sinal contrário
ao de q

$$Q = \int_{\text{casca}} \sigma dA = - \frac{q}{4\pi} \left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1 \right] R (2\pi R^2) \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta$$

$u \Rightarrow du = 2Ra \sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \sin \theta d\theta &= \frac{1}{2Ra} \int u^{-3/2} du \\ &= -\frac{1}{Ra} u^{-1/2} \Big|_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \\ &= -\frac{1}{Ra} \left[\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R-a} \right] \\ &= -\frac{2}{R} \frac{1}{R^2 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q &= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{a^2}{R^2} - 1 \right] \cdot R \cdot 2\pi R^2 \cdot \left(-\frac{2}{R} \right) \frac{1}{R^2 - a^2} \\ &= -q \frac{[a^2 - R^2]}{a^2 - R^2} = -q\end{aligned}$$

Exercícios: calcular força e energia eletrostática.

Funções Complexas

Uma função complexa f é um mapeamento $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x+iy=z \mapsto f(z)=u+iv$.

A derivada $f'(z_0)$ de f no ponto z_0 é definida como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Em termos das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = a + ib,$$

com

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

O que implica que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}\right) = a \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}\right) = b.$$

Definida dessa maneira, dizemos que a derivada existe se o limite anterior é finito e independe do caminho tomado quando $\Delta z \rightarrow 0$.

Sob quais condições vale esta independência de caminho?

Condições de Cauchy-Riemann

Tomemos, por exemplo, $\Delta y = 0$

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 = \Delta x$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

Analogamente, na parte imaginária temos que

$$b = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

Um raciocínio análogo para $\Delta x = 0$ fornece

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = a, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = -b \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{condições de} \\ \text{Cauchy-Riemann} \end{matrix}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Sãom $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais de 2 variáveis que seguem continuamente diferenciáveis no ponto (x_0, y_0) . Se u e v satisfizerem as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0) , então $f'(z_0)$ existe.

Exemplo:

$$f(z) = e^z, \quad \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \end{matrix}$$

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}, \quad \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \end{matrix}$$

$$= \underbrace{e^x \cos y}_u + i \underbrace{e^x \sin y}_v.$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

$$= e^z.$$

Uma função $f(z)$ é dita analítica num ponto $z=z_0$ se sua derivada existe não só em z_0 , mas também em uma vizinhança de z_0 .

Funções Harmônicas Conjugadas

Seja $f = u + iv$ uma função analítica em algum domínio de C. Então em todo ponto desse domínio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

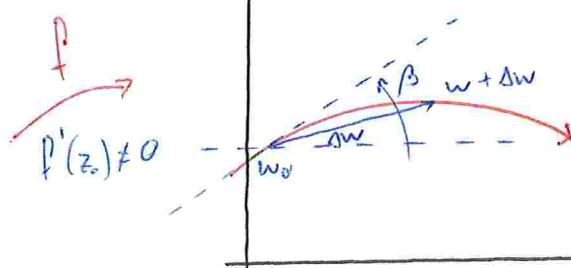
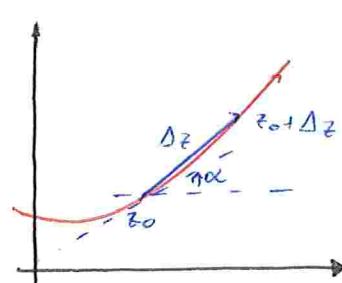
Segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

As partes reais e imaginárias de funções analíticas resolvem a equação de Laplace, i.e., são funções harmônicas

Transformações Conformes \rightarrow preservam ângulos



$$f'(z_0) \neq 0$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) e^{i\psi_0} = R_0 e^{i\psi_0} \rightarrow R_0 > 0$$

No limite $\Delta z \rightarrow 0$

$$\Delta w = f'(z_0) \Delta z$$

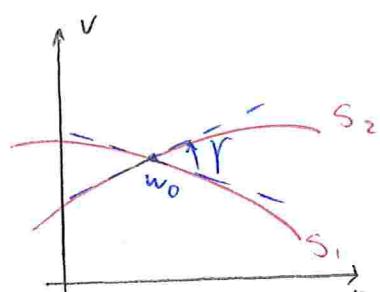
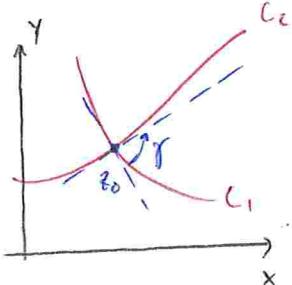
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \right) f'(z_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta w| = \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta z| \right) |f'(z_0)| R_0 \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta w) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta z) + \psi_0 \end{array} \right\} \beta = \alpha + \psi_0$$

a transformação
preserva ângulos

todas giram em uníssono

Perceba que qualquer curva C passando por z_0 tem uma tangente que girará do mesmo ângulo ψ_0 , pois este só depende de $f'(z_0)$. Logo, transformações desse tipo preservam o ângulo entre curvas que se cruzam.



Além disso, na vizinhança de z_0

$$\Delta w = f'(z_0) \Delta z$$

$$|\Delta w| = R_0 |\Delta z|$$

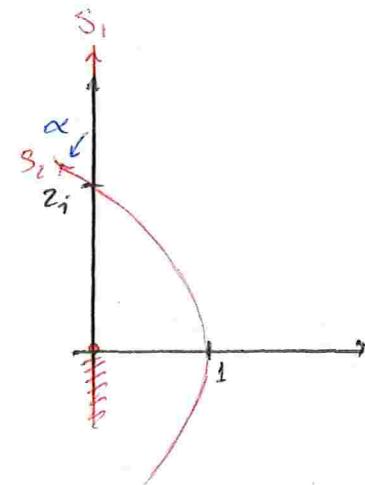
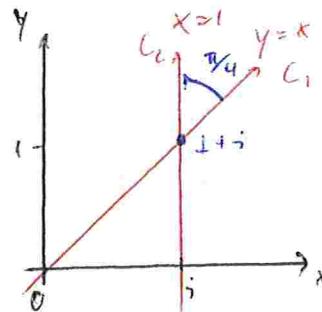
A transformação altera os comprimentos de segmentos em torno de z_0 de um fator R_0 .

Transformações no plano complexo que preservam ângulos em valor absoluto e sentido entre pares de curvas em cada ponto são chamadas de transformações conformes.

Exemplos:

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$



$$C_1: y=x$$

$$\begin{cases} u=0 \\ v=2x^2 \end{cases}$$

$$\tan \alpha = - \left. \frac{du}{dv} \right|_{v=2}$$

$$= 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

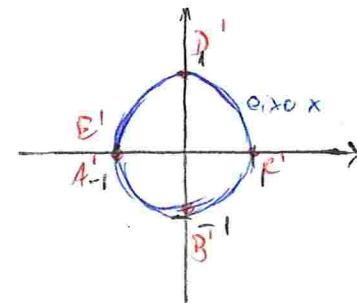
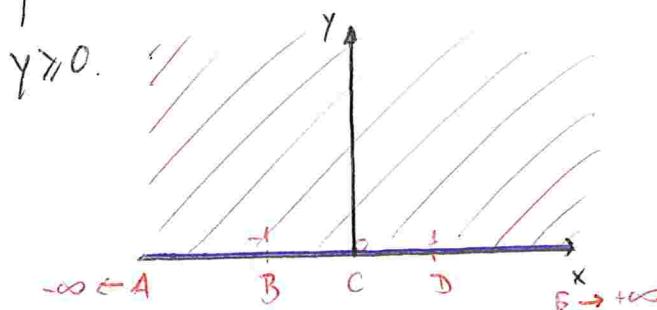
$$C_2: x=1$$

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \\ v = 2y \end{cases}$$

exemplo de transformação fracionária

$$f(z) = \frac{i-z}{i+z}$$

$w = f(z)$ tem uma singularidade em $z=i$. No semi-plano $y>0$, $f(z)$ é analítica e $f'(z) \neq 0$. Então $f(z)$ é conforme em



$$w = \frac{i-z}{i+z} = \frac{i-x-iy}{i+x+iy}$$

$$y=0: w = \frac{i-x}{i+x} \Rightarrow |w|^2 = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{i-z}{i+z} = \frac{(i-x)(i+x)}{i+x^2} \\ &= \frac{1-x^2+2ix}{1+x^2} = |w| e^{i\phi} \end{aligned}$$

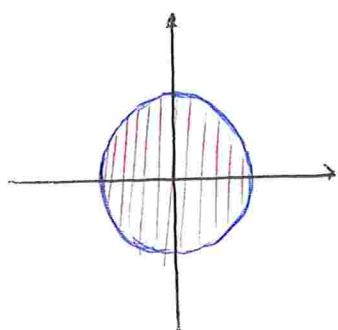
$$\phi = \arctan \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$y > 0$:

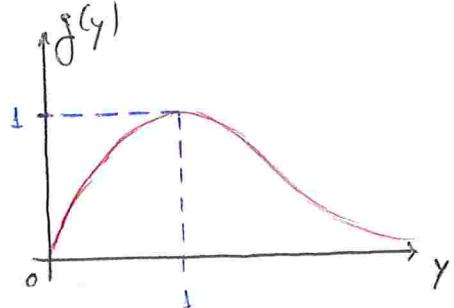
$$w = \frac{i-z}{i+z} = \frac{i-x-iy}{i+x+i y} = \frac{-x+i(1-y)}{x+i(1+y)} = \dots = \frac{-x^2 + (1-y^2) + 2ix(1-y)}{x^2 + (1+y)^2}$$

$$|w|^2 = \frac{x^2 + 1 - 2y + y^2}{x^2 + 1 + 2y + y^2} = 1 - \frac{4y}{x^2 + 1 + 2y + y^2} = 1 - \frac{4y}{x^2 + (1+y)^2}$$

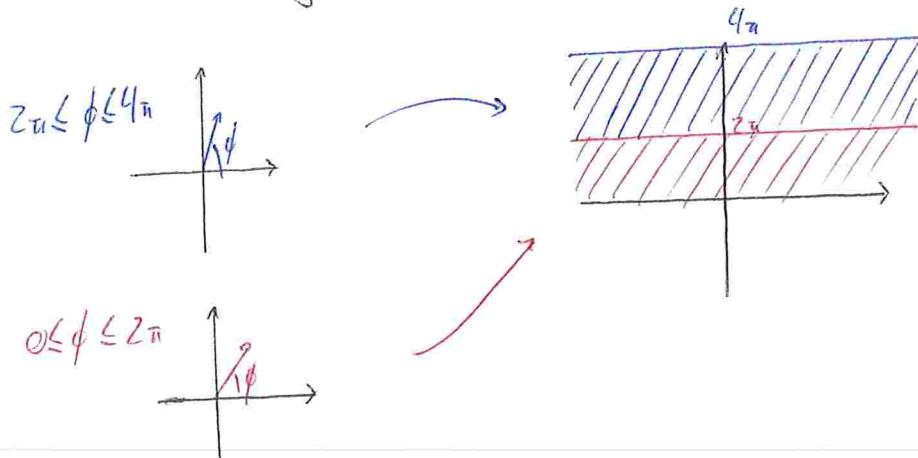
$$x^2 + (1+y)^2 \gg (1+y)^2 \Rightarrow \frac{4y}{x^2 + (1+y)^2} \leftarrow \frac{4y}{(1+y)^2} \equiv g(y)$$



$$\Leftarrow |w|^2 < 1 \Leftarrow$$



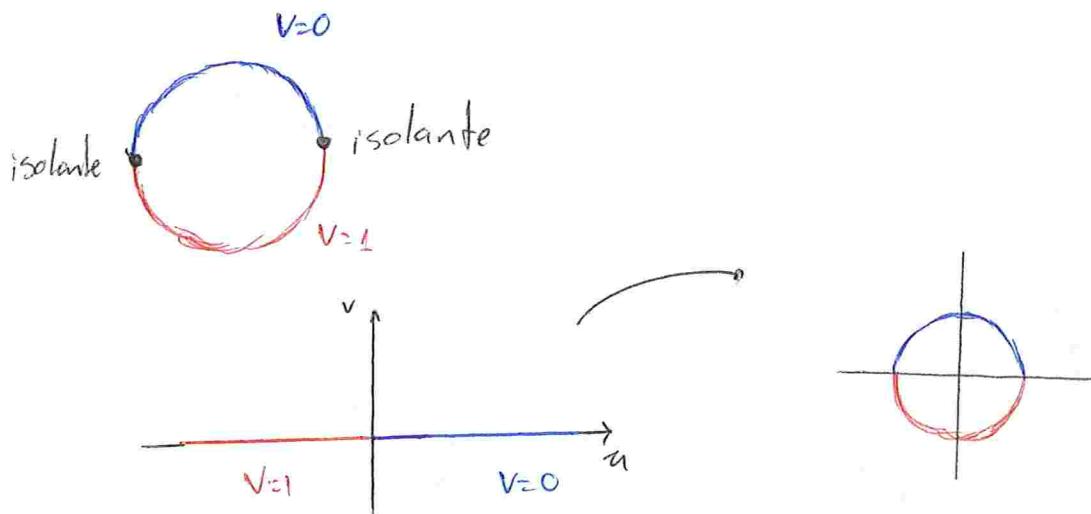
$$\begin{aligned} f(z) &= \log z \\ &= \log(|z|e^{i\phi}) = \log|z| + i\phi \end{aligned}$$



Em geral, utilizaram o ramo principal do logaritmo, $\text{Log}(z)$, com $0 \leq \phi \leq 2\pi$

Problema:

Um cilindro longo de raio unitário é feito de material condutor. O cilindro é cortado em duas partes iguais ao longo de um dos diâmetros da seção transversal. As duas partes são então separadas por uma faixa fina de material isolante, sendo uma das partes mantida a $V=0$ e a outra a $V=1$.



Loger

$$V(w) = \frac{1}{\pi} \log w = \underbrace{\frac{1}{\pi} \log |w|}_{\text{u}} + \underbrace{\frac{i\phi}{\pi}}_{v} \quad (\phi \in \mathbb{R})$$

Então

$$V(w) = \frac{1}{\pi}$$

$$V = \frac{1}{\pi} \phi = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{v}{u} \right)$$

Mas a transformação inversa é $w = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$

$$w = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right) = \frac{i(1-x-iy)}{1+x+iy} = \frac{2y + i(1-x^2-y^2)}{(1+x^2)+y^2} = u + iv$$

$$V = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{1-x^2-y^2}{2y} \right)$$

Equipotenciais

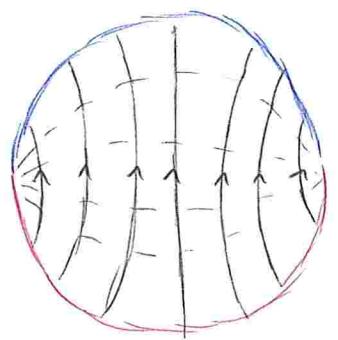
$$V = c = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{1-x^2-y^2}{2y} \right)$$

$$\frac{1-x^2-y^2}{2y} = \tan \alpha \Rightarrow 1-x^2-y^2 = 2y \tan \alpha$$

$$x^2 + y^2 + 2y \tan \alpha = 1$$

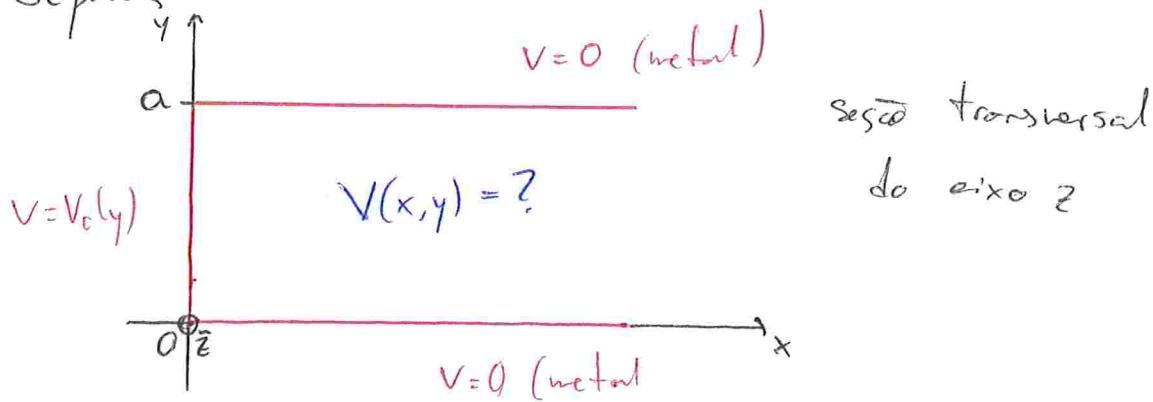
$$x^2 + (y + \tan \alpha)^2 = 1 + \tan^2 \alpha$$

círculo centrado em
 $(x_0, y_0) = (0, \tan \alpha)$
e raio $r_0 = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$



campo \vec{E}
 --- equipotenciais

Separação de Variáveis



Problema bidimensional

$$\nabla^2 V = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

ansatz



Procuraremos soluções do tipo $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Temos então

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{depende apenas de } x} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{depende apenas de } y} = 0$$

A x, y entre as placas.

depende apenas de x
 depende apenas de y

Logo,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k.$$

Temos três possibilidades ($k < 0$, $k = 0$ e $k > 0$) e sabemos que devem ser satisfeitas as condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} V=0, \quad y=0, \quad \forall x, \quad (1) \\ V=0, \quad y=a, \quad \forall x, \quad (2) \\ V=V_0(y), \quad x=0, \quad 0 \leq y \leq a, \quad (3) \\ V \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4) \end{array} \right.$$

Se $k=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = Ax + B, \\ Y(y) = Cy + D. \end{array} \right. \Rightarrow \text{não satisfaz as condições de contorno}$$

Se $k = k^2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \\ Y(y) = C \sin ky + D \cos ky. \end{array} \right. \Rightarrow V(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

Se $k = -k^2 < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = A \sin kx + B \cos kx, \\ Y(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}. \end{array} \right. \Rightarrow \text{não satisfaz as condições de contorno}$$

Utilizaremos as condições de contorno para impor restrições sobre as funções $V(x,y)$ que obtivemos para $k^2 > 0$, $k = k^2$.

$$(1) \quad D=0$$

$$(4) \quad A=0$$

$$V(x,y) = C e^{-kx} \sin ky$$

$$(2) \quad V(x,a) = C e^{-ka} \sin ka = 0, \quad \forall x$$

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Logo, temos uma família de soluções

$$v_n(x, y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como combinações lineares de funções harmônicas são harmônicas, a solução mais geral até este ponto é

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nabla^2 v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad v(0, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0(y).$$

Série de Fourier

O conjunto de funções

$$\{f_n\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

forma uma base ortogonal no intervalo $0 \leq y \leq a$ sob o produto interno

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^a f_n(y) f_m(y) dy,$$

i.e.,

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{nm}.$$

delta de Kronecker

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Então temos que

$$\int_0^a \left[\sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy$$

$$\sum_n c_n \underbrace{\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy}_{\frac{a}{2} S_{nm}} = \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy$$

$$c_m = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy.$$

Por exemplo, para $V_0(y) = \sin\left(\frac{q\pi y}{a}\right)$ para algum $q \in \mathbb{N}$, o termo um termo sobrevive na série e temos $c_n = S_{nq}$.

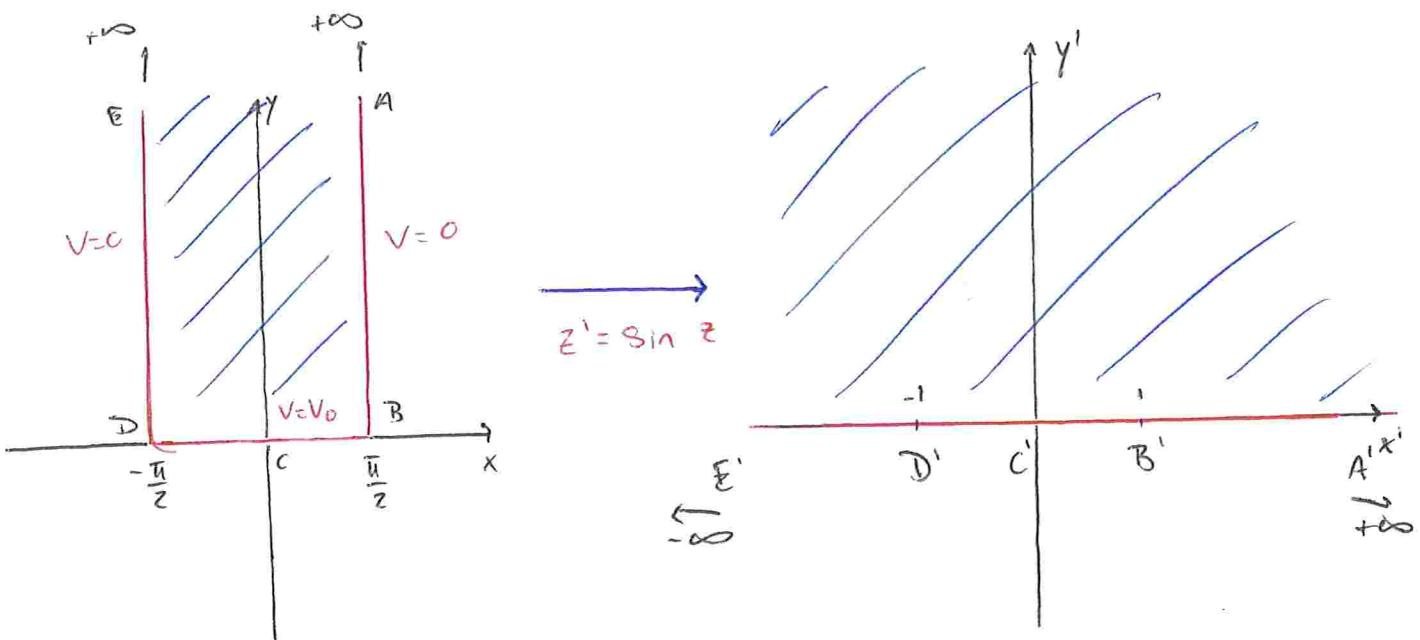
Outro exemplo: $V_0(y) = V_0 = \text{constante}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy \\ &= -\frac{2V_0}{a} \frac{a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Big|_0^a \\ &= -\frac{2V_0}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par}, \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{se } n \text{ ímpar}. \end{cases} \end{aligned}$$

Então

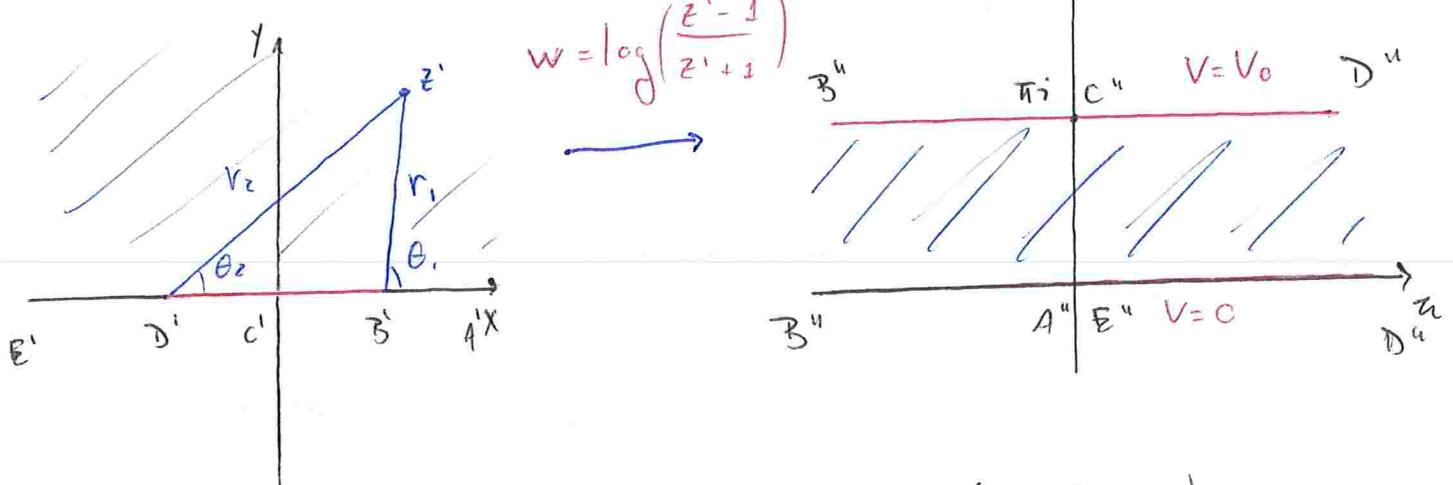
$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Neste caso específico, podemos ainda obter uma expressão elementar (sem séries) para o potencial. Para isso, faremos o uso de transformações conformes.



$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(e^{ix-y} - e^{-ix+y} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x) \right) \\ &= \frac{1}{i} \left[-\cos x \sinhy + i \sin x \cosh y \right] \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinhy \end{aligned}$$

$\sin(\pi/2 + iy) = \cosh y$



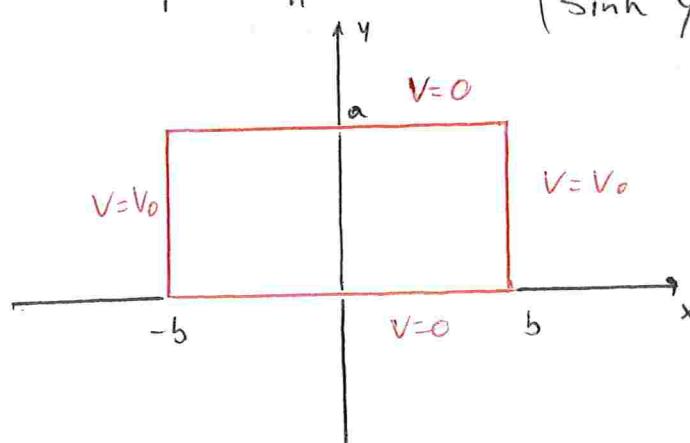
$$w = \log \left(\frac{z' - 1}{z' + 1} \right) = \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + i(\theta_1 - \theta_2) \begin{pmatrix} 0 < \theta_1 < \pi \\ 0 < \theta_2 < \pi \end{pmatrix}$$

$$V(\omega) = \frac{V_0 \omega}{\pi} = \frac{V_0}{\pi} u + i \frac{V_0}{\pi} v$$

$$\begin{aligned} w &= u + iv \\ &= \log \frac{|z^1 - z|}{|z^1 + z|} + i \arg \left(\frac{z^1 - z}{z^1 + z} \right) \\ &= \arg \left(\frac{x^1 z + y^1 z - 1 + i 2y^1}{(x^1 + 1)^2 + y^1 z} \right) \end{aligned}$$

$$v = \operatorname{atan} \left(\frac{2y^1}{x^1 z + y^1 z - 1} \right)$$

$$\therefore V(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{\cos x}{\sinh y} \right)$$



$$V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

$$\begin{cases} V=0, \quad y=0 \quad (1) \Rightarrow D=0 \\ V=0, \quad y=a \quad (2) \\ V=V_0, \quad x=-b \quad (3) \\ V=V_0, \quad x=b \quad (4) \end{cases}$$

por simetria

$$V(x, y) = V(-x, y) \Rightarrow A=B$$

$$V(x,y) = C \cosh kx \sin ky, \quad k = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$V_n(x,y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$V(b,y) = V_0$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

↓

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V_0$$

Do problema anterior

$$c_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi a} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Separação de Variáveis em Coordenadas Esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Assumiremos simetria azimuthal

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0.$$

para o caso geral,
ver qualquer livro
decente de Electromagnetism

Buscamos solução da forma $V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$.

$$\Theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0.$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \underbrace{\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}_{-\ell(\ell+1)} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \ell(\ell+1) R$$

$R(r) = r^\alpha \quad \xrightarrow{\text{ansatz}}$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \alpha r^{\alpha-1} \right) = \ell(\ell+1) r^\alpha$$

$$\alpha(\alpha+1) r^\alpha = \ell(\ell+1) r^\alpha$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \ell \\ \alpha &= -(\ell+1) \end{aligned} \Rightarrow R(r) = A r^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\ell(\ell+1) \sin \theta \quad \textcircled{H} \quad \xrightarrow{x = \cos \theta}$$

$$-\sin \theta \frac{d}{dx} \left(-\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) = -\ell(\ell+1) \sin \theta \quad \textcircled{H}$$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

é possível que
 \textcircled{H}' tenha uma singularidade para compensar a fato que $\textcircled{H}'' - 2x \textcircled{H}' + \underline{\ell(\ell+1)} \textcircled{H} = 0$
 $(1-x^2)$ se anula

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] = -\ell(\ell+1) \quad \textcircled{H}$$

equação de Legendre

$\lambda \rightarrow$ caso geral

método de

Frobenius

$$y'' - 2x y' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

→ não podemos assumir expansão em Taylor

$$\text{Ansatz: } y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{s+n}$$

↳ substituindo na equação de Legendre, obtemos
que $s=0$ ou $s=1$

↳ duas soluções, ambas divergentes
para $x=1$

Se $\lambda = l(l+1)$, $l \in \mathbb{Z}_+$,

ao menos um dos coeficientes

será preciso truncar a série
de alguma forma

da série irá se anular e
a série se reduz a um polinômio

↳ polinômios de Legendre

$$\textcircled{1}(x) = P_l(x), \quad l \in \mathbb{N}_0$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

⋮

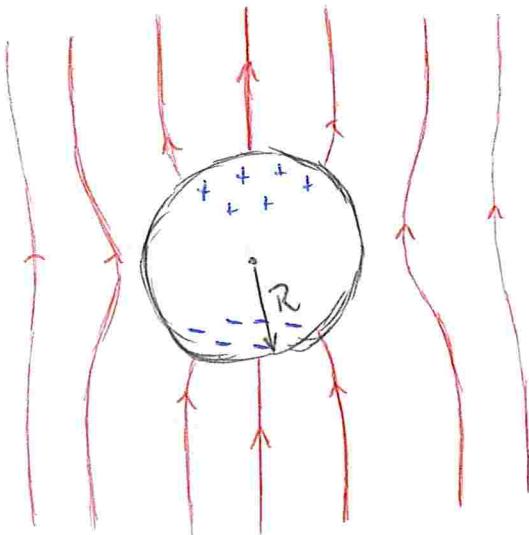
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad \text{↳ Fórmula de Rodrigues}$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \rightarrow \text{relação de ortogonalidade}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Exercício: esfera condutora neutra de raio R colocada numa
região de campo elétrico externo uniforme:

$$\vec{E}_{\text{ext}} = E_0 \hat{z}. \rightarrow E_0 \text{ constante}$$



Condições de contorno

$$\begin{cases} V(r=R) = C = 0 \\ V(r \gg R) = -E_0 z + D \\ = -E_0 z \\ = -E_0 r \cos \theta \end{cases}$$

$$\hookrightarrow V(z=0) = D = C$$

Sempre podemos tomar $C = 0$

$$V(r=R) = 0 = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \forall \theta \in [0, \pi]$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0}$

$$B_l = -R^{2l+1} A_l$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) A_l P_l(\cos \theta)$$

$$V(r \gg R) \approx \sum_{l=0}^{+\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \\ = -E_0 r x = -E_0 r P_1(x)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} A_l r^l \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = -E_0 r \int_{-1}^1 P_1(x) P_{l'}(x) dx$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{2}{2l+1} S_{ll'}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{2}{3} S_{1l'}}$

$$\frac{2}{2l'+1} A_l r^{l'} = -\frac{2 E_0 r}{3} S_{1l'} \Rightarrow A_l = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ -E_0, & l = 1 \end{cases}$$

$$V(r, \theta) = - \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) E_0 \cos \theta$$

$$= -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

)

potencial
devido ao
campo externo

potencial devido
às cargas
induzidas

Densidade de carga induzida

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

esfera condutora

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial r} \Big|_R - \frac{\partial V_{in}}{\partial r} \Big|_R = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

equipotencial

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -E_0 \cos \theta - 2E_0 \frac{R^3}{r^3} \cos \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_R = -3E_0 \cos \theta$$

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

positivo no hemisfério
noite e negativo no
hemisfério sol

$$\vec{E}(r) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{E}(r) = \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \cos \theta \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) E_0 \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{E}(r=R) = 3E_0 \cos \theta \hat{r}$$

$$\vec{E}(r \gg R) = E_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

$$= E_0 \hat{z}$$

Exercício: determinar o potencial no espaço todo devido a uma densidade superficial de carga $\sigma(\theta)$ sobre uma casca esférica de raio R

No interior da esfera, não queremos que o potencial seja infinito

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r \leq R.$$

No exterior da esfera, queremos que o potencial se anule no infinito

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r \geq R.$$

Como o potencial é contínuo, temos em $r=R$ que

$$\sum_{l=0}^{+\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\therefore B_l = A_l R^{2l+1}$$

A derivada radial de V sobre uma descontinuidade em $r=R$:

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} \right|_R - \left. \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} \right|_R = - \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} = \sum_{l=0}^{+\infty} l A_l r^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} = - \sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) \frac{R^{2l+1}}{r^{l+2}} A_l P_l(\cos \theta)$$

$$- \sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) R^{2l+1} A_l P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{+\infty} l R^{l-1} A_l P_l(\cos \theta) = - \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) R^{\ell-1} A_\ell P_\ell(\cos \theta) = \frac{\sigma(\epsilon)}{\epsilon_0}$$

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) R^{\ell-1} A_\ell \int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\epsilon) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$\frac{2}{2\ell+1} S_{\ell\ell'}$

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2\ell+1}{2\ell+1} R^{\ell-1} A_\ell \cdot 2 S_{\ell\ell'} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\epsilon) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$A_\ell = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_0^\pi \sigma(\epsilon) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Se $\sigma(\theta) = \cos 2\theta$, enteo

$$A_\ell = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_0^\pi \cos 2\theta P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\sigma(\theta) = 2x^2 - 1 = -\frac{1}{3} P_0(x) + \frac{4}{3} P_2(x)$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$= -\frac{1}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} P_2(\cos \theta)$$

$$A_\ell = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} P_2(x) - \frac{1}{3} P_0(x) \right) P_\ell(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} S_{2\ell} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{0\ell} \right)$$

$$A_0 = \frac{R}{3\epsilon_0} \Rightarrow B_0 = -\frac{R^2}{3\epsilon_0}$$

$$A_2 = \frac{4}{15\epsilon_0 R} \Rightarrow B_2 = \frac{4}{15\epsilon_0} R^4$$

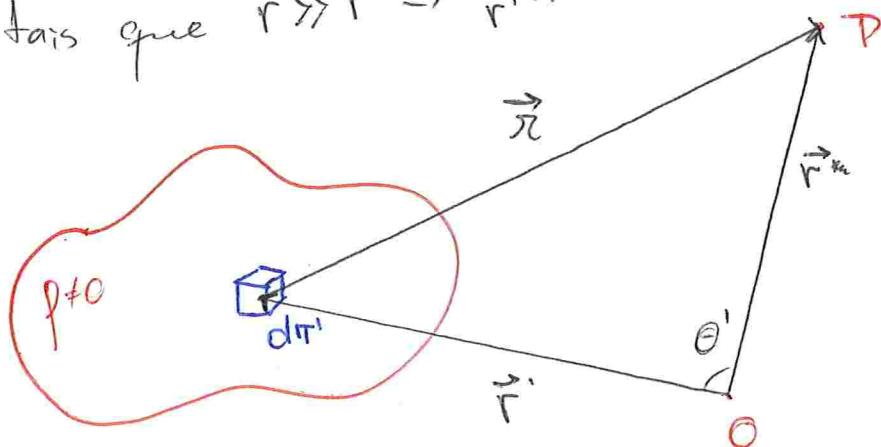
Então

$$V(r \leq R) = -\frac{R}{3\epsilon_0} + \frac{2}{15\epsilon_0} \frac{r^2}{R} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$V(r \gg R) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{r} + \frac{2}{15\epsilon_0} \frac{R^4}{r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

Expansão Multipolar

Estamos particularmente interessados em obter uma approximação para $V(\vec{r})$ para pontas distantes da distribuição de carga, ou seja, para pontas tais que $r \gg r' \Rightarrow \frac{r}{r'} \gg 1$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

Do Teorema dos Cossenos,

$$\begin{aligned} r^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta', \\ &= r^2 \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

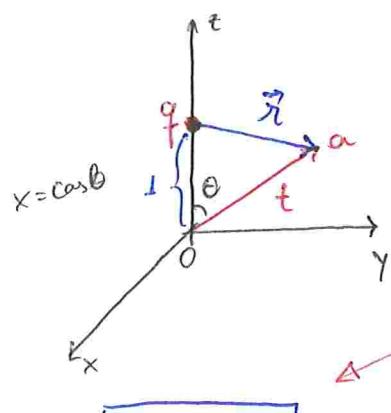
Definindo $t = \frac{r'}{r}$ e $x' = \cos\theta'$,

$$r^2 = r^2 \left[1 - 2x' + t^2 \right],$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-2x'+t^2}} = \frac{1}{r} G(x', t).$$

$$G(x', t) = \frac{1}{\sqrt{1-2x'+t^2}}$$

Se esquecermos o problema eletrostático original por um momento, veremos que $G(x,t)$ está relacionada a um outro problema de eletrostática. Mais precisamente, aquele de uma carga q de uma distância unitária da origem e sobre o eixo Z .



$$\begin{aligned} V(t,x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G(x,t) \end{aligned}$$

Desse forma, para todos os pontos do espaço, com exceção de $\vec{r} = \hat{z}$, teremos que

$$G(x,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(A_l t^l + \frac{B_l}{t^{l+1}} \right) P_l(x).$$

Nosso problema eletrostático de origem está associado a $+ \infty$. Essa região, no problema eletrostático associado, inclui a origem.

Logo, concluímos que $B_l = 0$, $\forall l$, e então

$$G(x,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l t^l P_l(x).$$

$$P_0(1) = 1$$

Para $x=1$, teremos que

$$G(1,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l t^l P_l(1) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{+\infty} t^l.$$

Segue que $A_\ell = 1$, $\forall \ell$, e concluimos que

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} t^\ell P_\ell(x).$$

Voltando ao problema original,

$$\frac{1}{r} = \frac{G(r, t)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos \theta').$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \left[\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos \theta') \right] p(\vec{r}') d\pi' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int r'^\ell P_\ell(\cos \theta') p(\vec{r}') d\pi'. \end{aligned}$$

só depende da distribuição de carga, e não de \vec{r}'

De forma explícita,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int p(\vec{r}') d\pi'} \rightarrow \text{monopolo} \\ &+ \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' p(\vec{r}') d\pi'} \rightarrow \text{dipolo} \\ &+ \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int r'^2 \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) p(\vec{r}') d\pi'} \rightarrow \text{quadropolo} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Termo de Monopolo

$$V_{\text{mono}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int p(\vec{r}') d\tau'$$

carga total

Termo de Dipolo

$$\begin{aligned} V_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int \underbrace{\vec{r}' \cos\theta'}_{\vec{r}' \cdot \hat{r}} p(\vec{r}') d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \int \vec{r}' p(\vec{r}') d\tau' \end{aligned}$$

propriedade da distribuição

momento de dipolo

caso discreto:

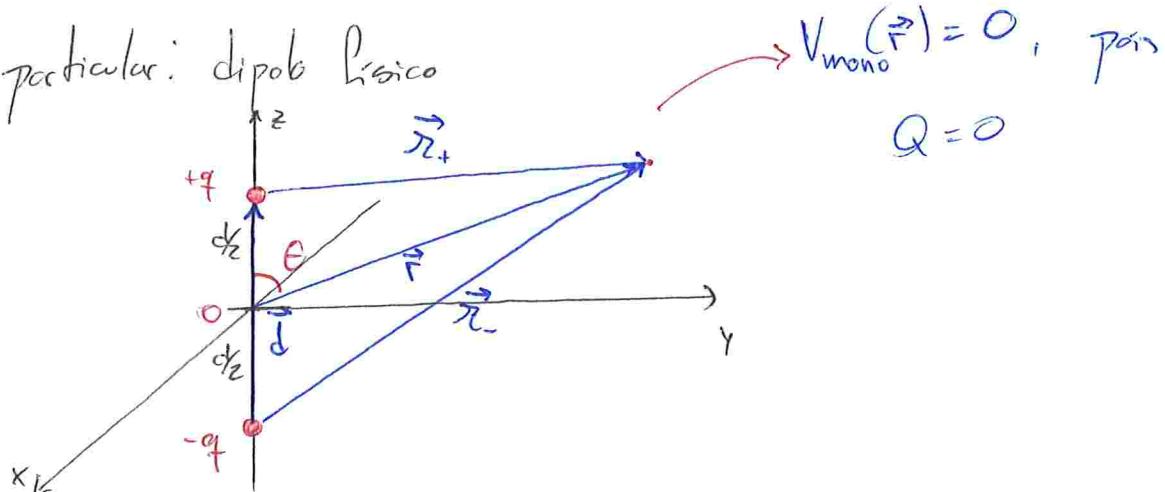
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

cai mais rápido com r do que V_{mono}

De acordo com a expressão em série, quanto maior l , mais rapidamente vai a zero o respectivo multipolo. Desse bema, muito longo da distribuição de carga ($\frac{r'}{r} \ll 1$), somente os multipolos mais baixos são relevantes. À medida que nos aproximamos da distribuição, termos de ordem cada vez maiores passam a ser importantes.

Caso particular: dipolo físico



$$\vec{P} = q(\vec{r}_+) - q(\vec{r}_-)$$

$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

$$= q d$$

$$= q d \hat{z}$$

$$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos \theta$$

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} q d \cos \theta$$

$$V(\vec{r}) \approx V_{\text{dip}}(\vec{r}) \quad p / r \gg d$$

O potencial completo deve incluir termos de ordem menor e maior que o termo principal. A aproximação acima será melhor quanto maior a distância r (ou quanto menor a distância d).

Para construir um dipolo "puro", i.e., um cujo potencial é dado de forma exata por

$$V(\vec{r}) = V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2},$$

pode-se tomar o limite $d \rightarrow 0$ juntamente com $q \rightarrow +\infty$, de forma que $qd = \|\vec{P}\|$ permaneça finito.

Campo elétrico de um dipolo puro

$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\nabla V_{\text{dip}}$$

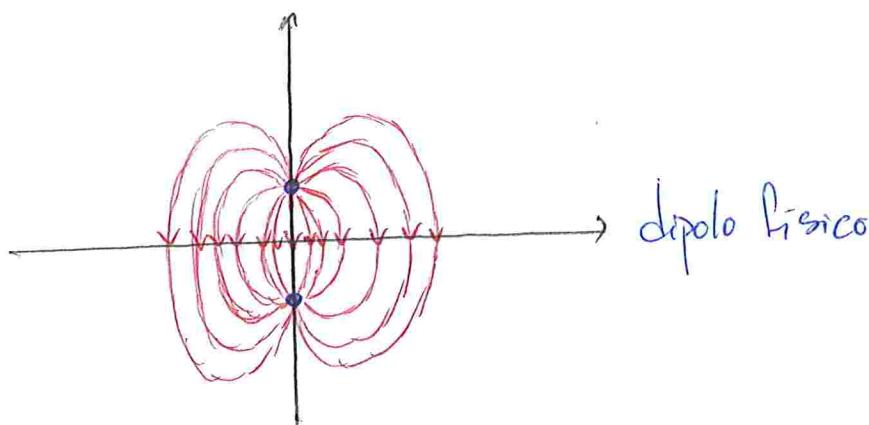
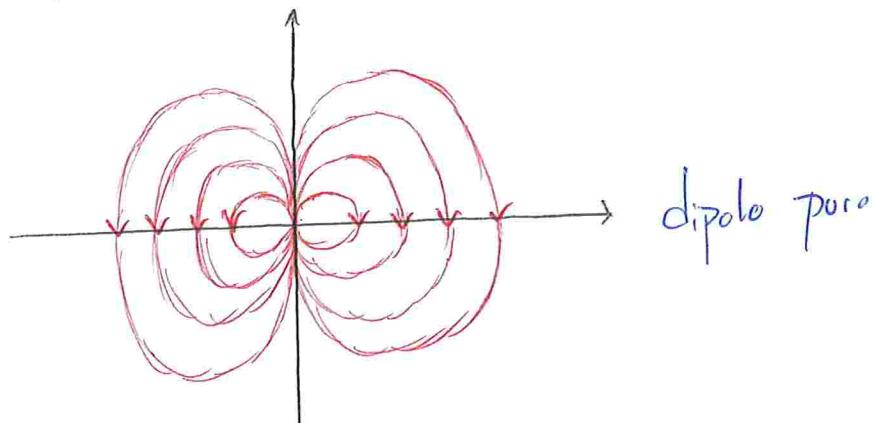
$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

↪ paralelo a \hat{r} nos pólos e a $\hat{\theta}$ no equador

$$\|\vec{E}_{\text{dip}}\| = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + 3\cos^2\theta)^{1/2} \rightarrow \text{máximo nas polos e mínimo no equador}$$



$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3 \underbrace{p \cos\theta}_{\vec{p} \cdot \hat{r}} \hat{r} - p \cos\theta \hat{r} + p \sin\theta \hat{\theta}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3 (\vec{p} \cdot \vec{r}) \hat{r} - \vec{p} \hat{z}]$$

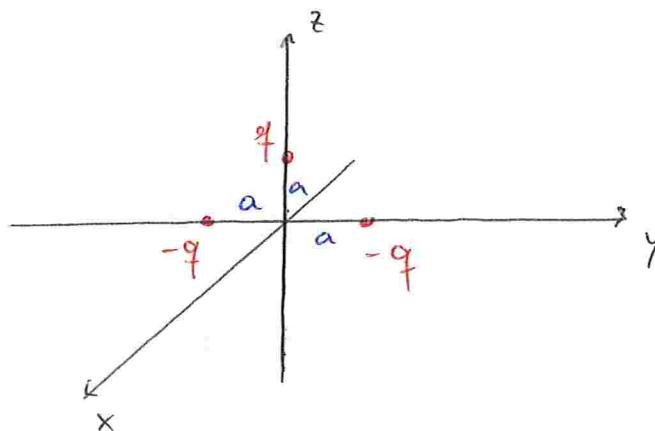
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3 (\vec{p} \cdot \vec{r}) \hat{r} - \vec{p}]$$

↪ forma independente do sistema de coordenadas

Exercício

$$V(\vec{r}) = ?$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = ?$$



Calcular os 2 termos de ordem mais baixa da expansão

$$V_{\text{mono}}(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= q a \hat{z} + (-q)(a \hat{y}) + (-q)(-a \hat{y}) \\ &= q a \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q a \cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &\approx -\nabla \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos\theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r} \right) - a \nabla \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\hat{r}}{r^2} - a \left[-\frac{2\hat{r}}{r^3} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{\theta} \right] \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{q a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \end{aligned}$$

O que ocorre com a expansão multipolar se mudarmos a origem do sistema de coordenadas?

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int p(\vec{r}') r'^l P_l(\cos\theta') d\Omega'$$

$$V_{\text{mono}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

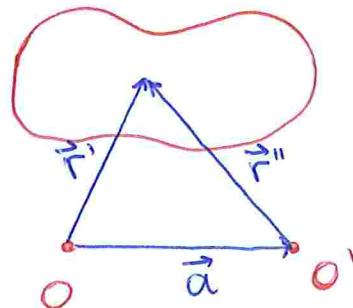
a expressão é igual (a menos de $r \rightarrow r'$)

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

↳ carga elétrica é invariante

Momento de dipolo

$$\vec{P} = \int \vec{r}' p(\vec{r}') d\Omega'$$



$$\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{a}$$

$$\vec{P}_{O'} = \int \vec{r}'' p(\vec{r}'') d\Omega''$$

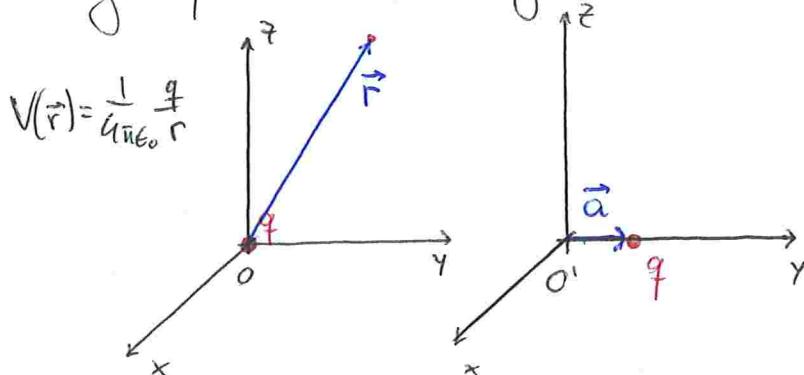
$$= \int (\vec{r}' - \vec{a}) p(\vec{r}') d\Omega'$$

$$= \vec{P} - \vec{a} \int p(\vec{r}') d\Omega'$$

$$= \vec{P} - Q \vec{a}$$

se $Q=0$, $\vec{P}_{O'} = \vec{P}$

Carga pontual na origem



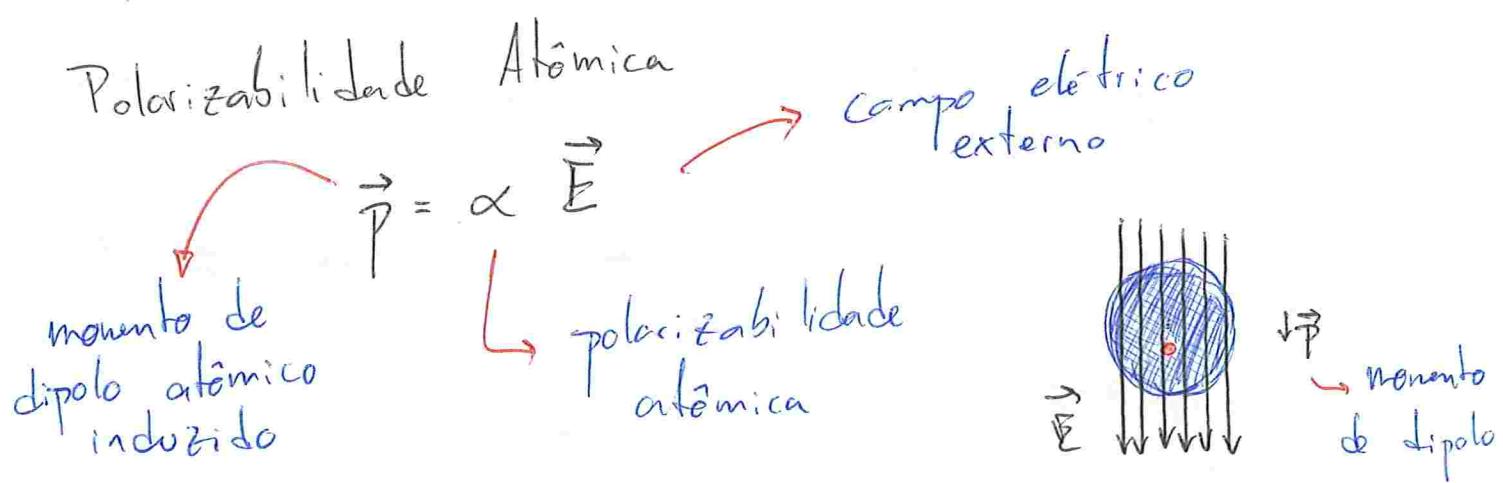
$$\vec{P}_{O'} = \int \vec{r}'' q \delta(\vec{r}'' - \vec{a}) d\Omega''$$

$$= q \vec{a}$$

↳ surge um momento de dipolo

A expansão multipolar acima depende do sistema de coordenadas. O único multipolo invariante é o termo do monopolo. O termo de dipolo só é invariante por mudanças do sistema de coordenadas se a carga total da distribuição é nula.

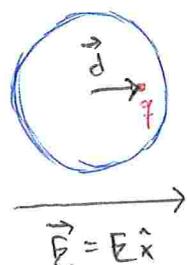
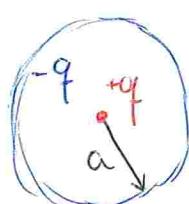
Campos Elétricos na Materia



$$[\alpha] = \frac{C^2 m}{N} \text{ (SI)}$$

Vamos estinar a ordem de magnitude de α usando um modelo atômico simplificado

para algo mais elaborado, precisaremos resolver a equação de Schrödinger



No equilíbrio

$$\vec{F}_{ext} = q \vec{E} = -\vec{F}_{e^-} = -q \vec{E}_{e^-}$$

campo derivado à eletratrilha na posição do núcleo

Suponho que a forma geométrica da eletratrilha não se altera

mais razoável quanto menor o deslocamento d

na prática, é uma função do raio atômico, então é uma aproximação adequada

$$\vec{E}_e = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{a^3} \hat{r} \quad \text{Lei de Gauss}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_e| \quad \vec{P}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{a^3} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3}$$

valores próximos
aos reais

$$P = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$$

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \alpha \quad \vec{E} = 3\epsilon_0 V \vec{E}$$

volume atómico

acerta ao menor
em ordem de
magnitude

Polarizabilidade Molecular



sem diferenças de
concentração de carga ou
oïcos do tipo

molecula apolar

sem momento de
dipolo natural/intrínseco



$$\vec{E}_{||}$$

$$\vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{P} = \alpha_{||} \vec{E}_{||} + \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp}$$

sem simetria estérica; responde de
maneiras distintas dependendo da
direção do campo

De modo geral, uma molécula apolar adquirirá um momento de dipolo num campo externo \vec{E} dado por

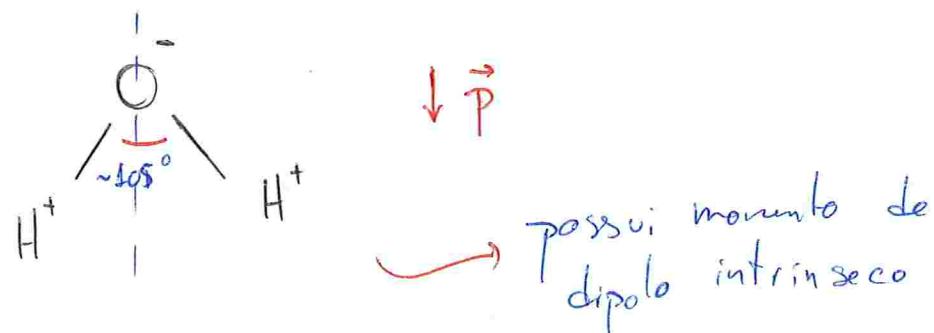
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

tensor de polarização

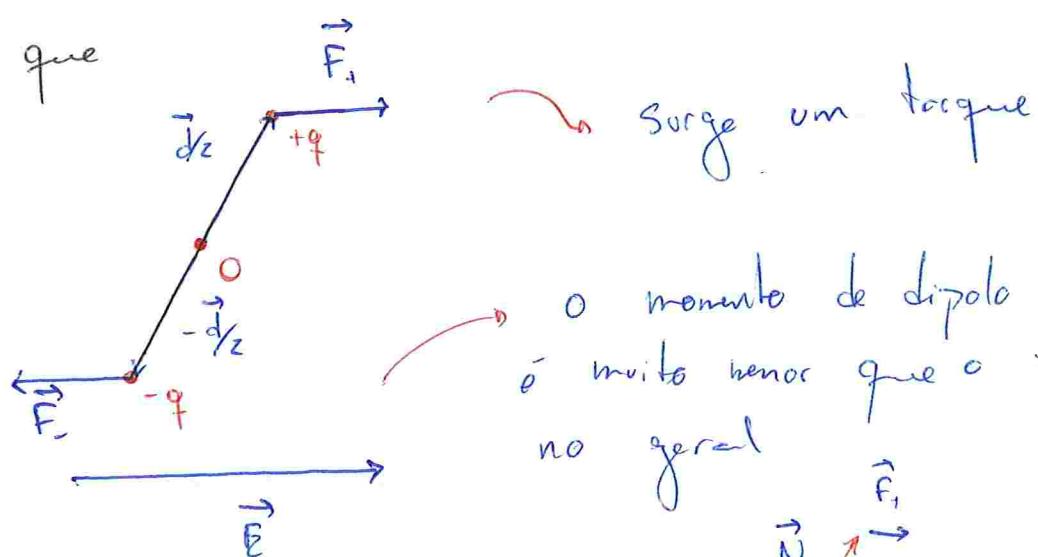
para moléculas apolares,
Sempre é possível obter um
sistema de coordenadas que
o diagonaliza

Moléculas Polares

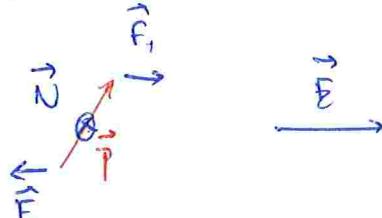
Exemplo: H_2O



Note que



o momento de dipolo induzido
é muito menor que o intrínseco,
no geral



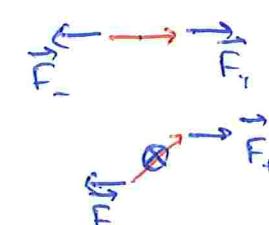
Torque:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \\ &= \frac{d}{2} \times q \vec{E} + \left(-\frac{d}{2}\right) \times (-q \vec{E}) \\ &= qd \times \vec{E}\end{aligned}$$

$$\downarrow \vec{P} = qd$$

$\vec{N} = \vec{P} \times \vec{E}$

as moléculas
tendem a girar
e se alinhar com
o campo elétrico



Para campo uniforme, a força resultante é nula

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q \vec{E} + (-q \vec{E}) = \vec{0}$$

Se o campo é não-uniforme

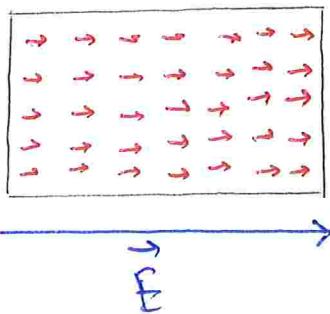
$$\vec{F} = q \vec{E}_+ - q \vec{E}_- = q \Delta \vec{E} \quad \vec{d}_x = \vec{d} \cdot \hat{x}$$

~~$$F_i = q \Delta E_i = q \frac{\partial E_i}{\partial x_i} d_i = q (\nabla E_i \cdot \vec{d})$$~~

$$\vec{F} = q \frac{\partial E_x}{\partial x} d_x \hat{x} + q \frac{\partial E_y}{\partial y} d_y \hat{y} + q \frac{\partial E_z}{\partial z} d_z \hat{z}$$

$$= (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} \quad \text{a molécula, além de girar, pode acelerar}$$

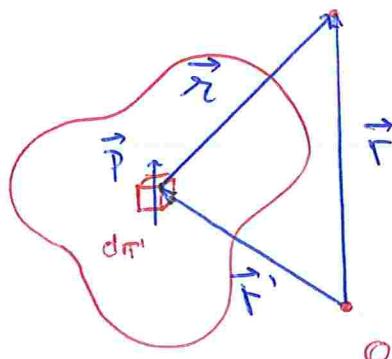
Após aplicar um campo elétrico num dieletrico, teremos



Surge uma polarização macroscópica, seja por indução de dipolos ou por girar os dipolos existentes

polarização

\vec{P} = momento de dipolo por unidade de volume



$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad \vec{P} = \vec{P} d\tau'$$

$$V(\vec{r}) = \int_V dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{r^2} d\tau'$$

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = \nabla' \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\pi'$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{r} + \vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\pi' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{r} d\pi'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{a}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left(-\nabla \cdot \frac{\vec{P}}{r} \right) d\pi'$$

potencial de uma distribuição superficial de carga com densidade

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

normal
à superfície

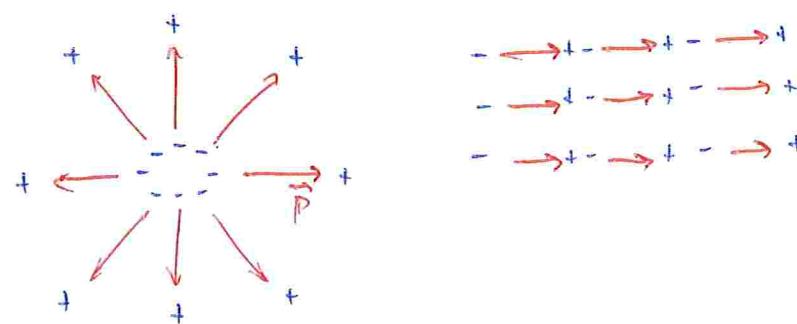
b : bounded

um contraste com free

potencial de uma distribuição volumétrica de carga com densidade

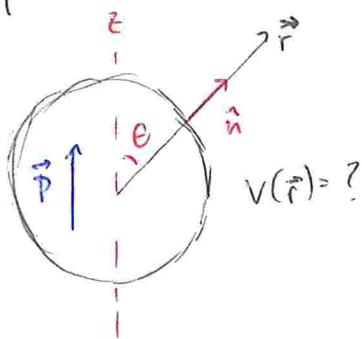
$$p_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Campos solenoidais ($\nabla \cdot \vec{P} = 0$) não induzem cargas volumétricas



σ_b e p_b podem ser interpretadas como cargas fictícias no material induzidas pela polarização

Exemplo: esfera com polarização uniforme



$$\vec{P} = c \hat{e}_r \Rightarrow P_b = 0$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta$$

$$V_s(r \gg R) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$V_s(r \leq R) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_s(R) = V_s(R) \Rightarrow B_l = A_l R^{2l+1}$$

$$\left. \frac{\partial V_s}{\partial r} \right|_R = - \sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta)$$

$$\left. \frac{\partial V_s}{\partial r} \right|_R = \sum_{l=0}^{+\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\left. \frac{\partial V_s}{\partial r} \right|_R - \left. \frac{\partial V_s}{\partial r} \right|_R = - \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta = \frac{P}{\epsilon_0} P_1(\cos \theta)$$

$$3 A_1 = \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow A_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r \leq R, \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r \geq R. \end{cases} \rightarrow V(r \leq R) = \frac{P}{3\epsilon_0} z$$

Campo elétrico:

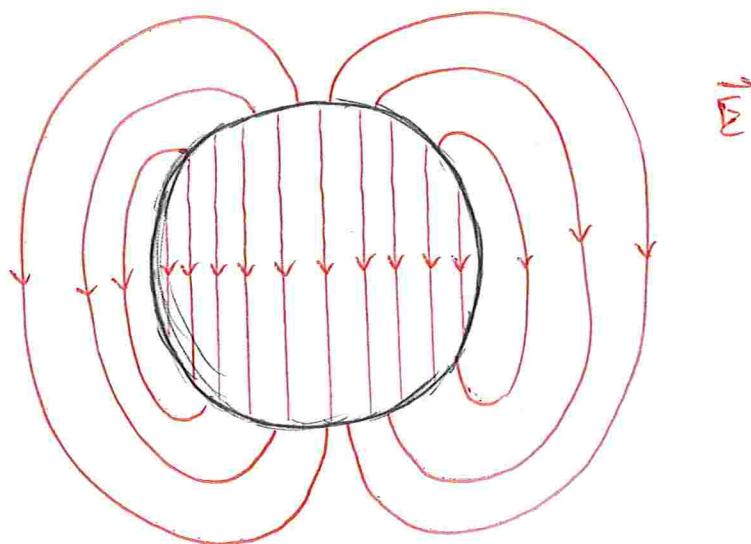
$$\vec{E}(r \leq R) = -\nabla V(r \leq R) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

dipolo puro na origem

$$\nabla(r \gg R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

↳ dipolo na origem

$$\vec{E}(r \gg R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cos\theta}{r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$



$$E_{\perp}^{\perp}(R) = -\frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{3\epsilon_0} = -\frac{P \cos\theta}{3\epsilon_0}$$

$$E_{\parallel}^{\perp}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^3} 2\cos\theta = \frac{2}{3\epsilon_0} P \cos\theta$$

$$\Delta E_{\perp} = \frac{P \cos\theta}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

Para um material polarizado neutro devemos ter
 $Q_s + Q_p = 0$

$$Q_s = \int_S \sigma_b d\alpha = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} d\alpha = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{a}'$$

$$Q_p = \int_V \rho_b d\tau' = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} d\tau' = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{a} = - Q_s$$

ATENÇÃO: você pode ficar tentado a usar $\sigma_b = \vec{D} \cdot \hat{n}$ para calcular a carga superficial num condutor. Entretanto, os processos de acumulo de carga superficial em dielétricos e condutores são completamente distintos, sendo que sequer faz sentido falar em campo de polarização para um condutor.

Faz sentido calcular o campo de uma esfera polarizada, se a polarização se deve a um campo externo?

↳ Campo exterior da esfera para ser contrário ao externo

↳ induzir a polarização com um campo forte ou baixas temperaturas, para que a polarização não se perca com flutuações térmicas

O Campo Macroscópico no Interior de um Dielétrico

Desde o inicio deste curso estamos trabalhando com o chamado campo macroscópico

↳ o chamado campo macroscópico \vec{E} é tomado como o campo nôrdio num volume grande e suficiente para conter um número significativo de moléculas, mas ao mesmo tempo pequeno em comparação às dimensões típicas do próprio objeto

↳ o campo microscópico será muito "delicado", explorando perto de níveis atômicos, elétrons, dependendo dos movimentos das partículas e etc

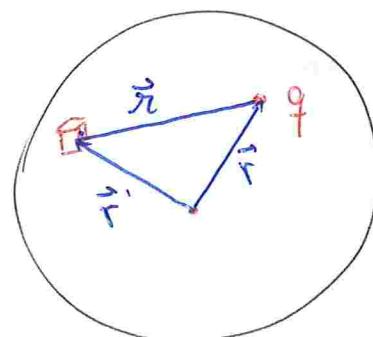
↳ muito mais informação do que desejamos

Nossa carga

$$\vec{E} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_{out}$$



campo dentro é constante
Jessa externa é constante
em razão da aproximação



Campo interno devido a uma carga q

$$\begin{aligned}\langle \vec{E}_{in}^{(q)} \rangle &= \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \int_{V_{in}} \vec{E}_q dV \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \int_{V_{in}} \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} dV \\ &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{V_{in}} \frac{(-q)}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{(-\vec{r})}{r^2} dV\end{aligned}$$

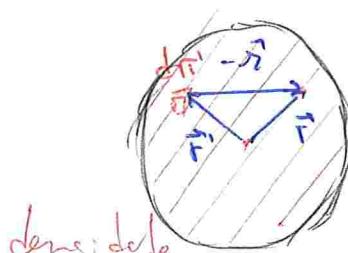
campo elétrico devido
a uma estrela uniformemente
corregada com densidade
 $\rho = -\frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$
na posição original da
carga q

Par Lei de Gauss

$$4 \pi r^2 \langle E_{in}^{(q)} \rangle = -\frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\langle E_{in}^{(q)} \rangle = -\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

$$\langle \vec{E}_{in}^{(q)} \rangle = -\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}$$



Densidade

$$\rho = -\frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

$$\langle \vec{E}_{in}^{(q)} \rangle = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3}$$

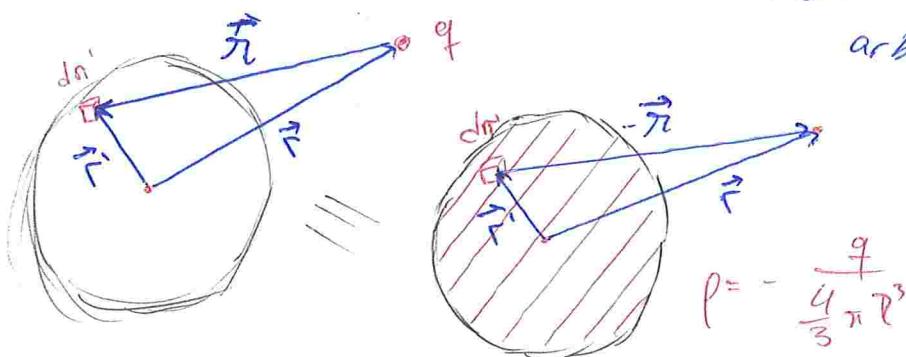
Generalizando para una distribución qualquier de cargas no interior de V_{in}

$$\vec{E}_{in} = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \quad \xrightarrow{\text{dipolo}} \vec{P} \text{ é o momento do dipolo das cargas no interior de } V_{in}$$

$$= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

o campo elétrico interno no interior de unha distribución de carga sí depende do seu momento de dipolo

distribución de carga arbitraria



$$4\pi r^2 \langle E_{out}^{(q)} \rangle = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\langle E_{out}^{(q)} \rangle = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\langle \vec{E}_{out}^{(q)} \rangle = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\hat{r})}{r^2}$$

campo elétrico que gera no centro na esfera

$$V_{out} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{out}} \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{r^2} dV$$

O termo deixado de fora na integral anterior é

$$\tilde{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{in}} \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{r^2} d\pi' \quad \text{R é grande e bastante para desprezar os termos multipolares}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{in}} \frac{\vec{P}}{r} \cdot d\hat{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{in}} \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{r} d\pi' \approx 0$$

potencial dividido a uma esfera unicamente polarizada

$$\tilde{V} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \cdot \vec{r} \Rightarrow \tilde{\vec{E}} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{R^3} = \vec{E}_{in}$$

Logo, o potencial eletrostático gerado por um material com polarização \vec{P} é

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{r^2} d\pi'$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\vec{f}_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Deslocamento Elétrico

Se no interior do dieletônico há também cargas livres com densidade ρ_f , então

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

De acordo com a Lei de Gauss

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f.$$

Logo,

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

\vec{D}

deslocamento
elétrico

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$

Usando o Teorema de Helmholtz,

$$\vec{D} = -\nabla V + \nabla \times \vec{W}$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{D}}{r} d\tau' \quad e \quad \vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{D}}{r} d\tau'$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \vec{D} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\nabla \times \vec{D}}{r} d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \rho_f \frac{3}{r^2} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\nabla \times \vec{D}}{r} d\tau'$$

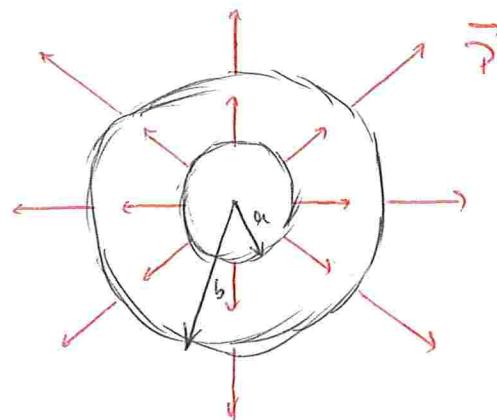
\hookrightarrow se $\nabla \times \vec{D} \neq \vec{0}$, não vale a "Lei de Coulomb" para \vec{D}

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P}$$

Exercício

$$\rho_f = 0$$

$$\vec{P} = \frac{k}{r} \hat{r}$$



Calcule \vec{E} em todo o espaço

$\hookrightarrow k$ é uma constante positiva

$$\sigma_a = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\vec{P} \cdot \hat{r} = -\frac{k}{a}$$

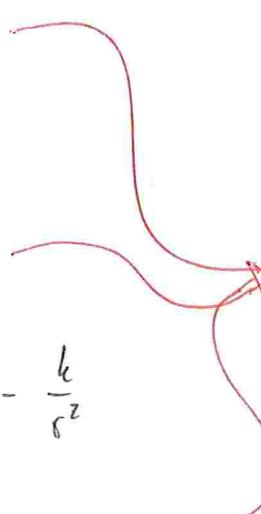
$$\hookrightarrow Q_a = -4k\pi a$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{k}{b}$$

$$\hookrightarrow Q_b = 4k\pi b$$

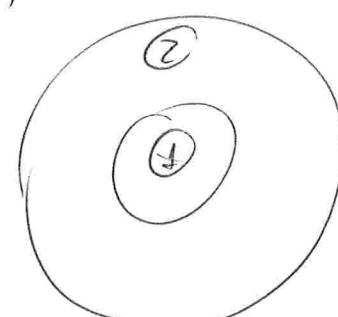
$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{k\hat{r}}{r} \right) = -\frac{k}{r^2}$$

$$Q_p = 4\pi \left(-k \int_a^b \frac{1}{r^2} r^2 dr \right) = -4k\pi(b-a)$$



$$Q_a + Q_b + Q_p = 0$$

③



$$\vec{E}_1 = \vec{0} \quad \vec{E}_3 = \vec{0}$$

\hookrightarrow lei de Gauss

~~$\frac{4\pi r^2 \rho_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$~~

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 4k\pi(a-r) - 4k\pi a = -\frac{4k\pi r}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{k}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Via vetor deslocamento \vec{D}

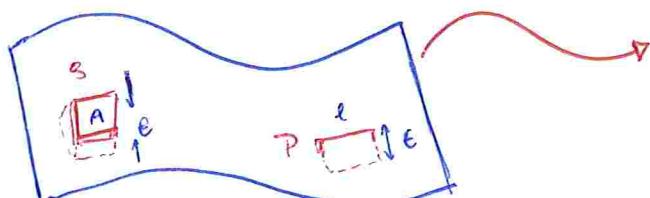
$$\rho_f = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0} \quad (\nabla \times \vec{D} = \vec{0})$$

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{0}, \vec{E}_3 = \vec{0}, \vec{E}_2 = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Condições de Contorno para \vec{D}



densidade superficial
de carga livre σ_f

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$

$$\oint_P \vec{D} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{D} \cdot d\vec{a}$$

$$D_{\uparrow}^+ \cdot A - D_{\downarrow}^+ \cdot A = \sigma_f \cdot A \Rightarrow \Delta D^+ = \sigma_f$$

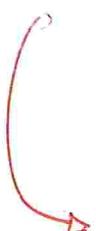
$$\oint_P \vec{D} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{P} \cdot d\vec{l} \quad \text{pode haver descontinuidade na componente paralela de } \vec{D}$$

$$D_{\uparrow}'' \cdot l - D_{\downarrow}'' \cdot l = P_{\uparrow}'' l - P_{\downarrow}'' l$$

$$\Delta D'' = \Delta P''$$

Exercício: Suponha que o campo dentro de um pedaço grande de dielétrico é \vec{E}_0 , de forma que $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$. Uma pequena cavidade esférica é cavada no material. Encontre o campo elétrico no centro da cavidade em função de \vec{E}_0 e \vec{P} . Escreva também \vec{D} no centro da cavidade em termos de \vec{D}_0 e \vec{P} .

$$\vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{P} = \vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{P} (\text{original}) + \vec{P}_{\text{cavidade}}$$

 Campo = Campo original + esfera com $-\vec{P}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{D}_{\text{est}} \Rightarrow \vec{D} = \vec{D}_0 + \epsilon_0 \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + (-\vec{P})$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 - \frac{2\vec{P}}{3}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P} - \frac{2\vec{P}}{3} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3}$$

 campo TOTAL

Dielétricos Lineares

χ_e é adimensional

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

 susceptibilidade elétrica do material

Em termos de deslocamento elétrico,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \underbrace{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{J} = \epsilon \vec{E}$$

permissividade elétrica
do material

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$$

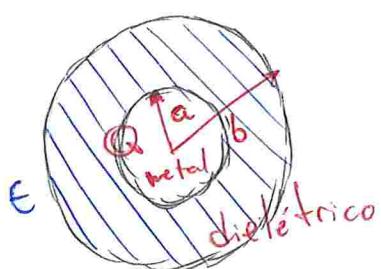
permissividade relativa
ou
constante dielettrica

Para dieletricos lineares, mas anisotropicas

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{tensor de susceptibilidade}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Exercício

Determinar o potencial no centro
do arranjo: $V(r=0) = ?$



$\Rightarrow Q$ é carga livre

$$\vec{E} = \vec{J} = \vec{P} = 0, \text{ para } r < a$$

$$r > a: 4\pi r^2 D = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$a < r < b: \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$\frac{1}{\epsilon_r}$ Cargacai
de $\frac{1}{\epsilon_r}$ quando
colocarmos o
dielettrico

$$r > b : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$V(r) = - \int_{+\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} V(0) &= - \int_{+\infty}^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 r} \Big|_{+\infty}^b + \frac{1}{\epsilon_r r} \Big|_b^a \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_b(a) &= \vec{P} \cdot \hat{n} \\ &= - \vec{P} \cdot \hat{r} \\ &= - \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \hat{r} \\ &= - \epsilon_0 \chi_e \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{a^2} = - \frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi a^2} \quad \frac{\chi_e}{\epsilon_r} < 1 \\ Q_b(a) &= - \frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} Q = - \frac{\chi_e}{\epsilon_r} Q \quad \downarrow \\ |Q_b(a)| &< Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_b(b) &= \vec{P} \cdot \hat{n} \\ &= \vec{P} \cdot \hat{r} \\ &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \hat{r} \\ &= \epsilon_0 \chi_e \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b^2} \Rightarrow Q_b(b) = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} Q = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} Q \end{aligned}$$

Dieletéticos Lineares e Homogêneos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$$

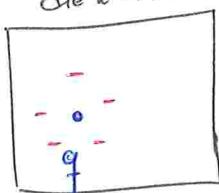
\$\nabla \times \vec{E} = 0\$ Sempre
em eletrostática

para dieletéticos lineares e homogêneos,

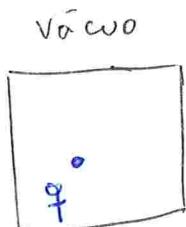
$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

\vec{E} vazio

DENTRO DO DIELETÉTICO



supondo $\rho_f > 0$



$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_r r^2} \hat{r} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

como se o dieletélico blindasse
parte da carga q

Por definição,

$$P_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$= -\nabla \cdot (\epsilon_0 \chi_e \vec{E})$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \rho_f$$

$$P_b = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \rho_f$$

No caso anterior,

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\epsilon_0 \chi_e \nabla \cdot \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\rho_b = -\epsilon_0 \chi_e \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0$$

num dielétrico linear homogêneo a menos que se implante cargas livres no material, todas as cargas ligadas estão na superfície

Logo, se $\rho_f = 0$ no interior do dielétrico linear homogêneo, $\rho_b = 0$, e vale a equação de Laplace no volume de material: $\nabla^2 V = 0$.

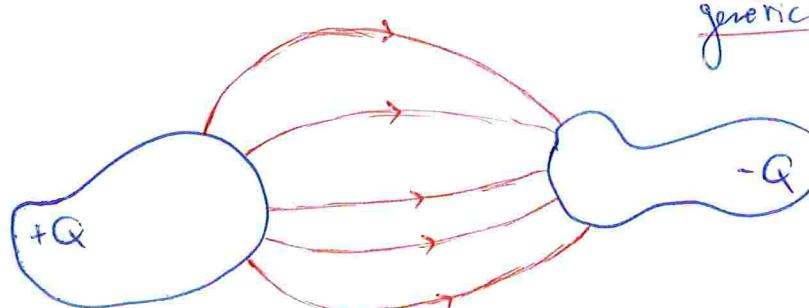
$$\rightarrow D_1^+ - D_1^- = \sigma_f$$

$$\epsilon_{\uparrow} E_{\uparrow}^+ - \epsilon_{\downarrow} E_{\downarrow}^- = \sigma_f$$

$$\epsilon_{\uparrow} \frac{\partial V_{\uparrow}}{\partial n} - \epsilon_{\downarrow} \frac{\partial V_{\downarrow}}{\partial n} = -\sigma_f$$

Capacitância

\vec{E}



Capacitor

genérico

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') \hat{r}}{r'^2} dV$$

condutor

Condutor

Diferença de potencial entre os condutores: $V = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Veja que tanto o campo elétrico quanto o potencial eletrostático são lineares em ρ . Além disso, sabemos que o potencial é determinado de maneira unívoca pelas cargas em todos os condutores.

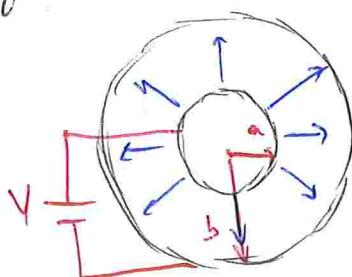
Logo, $V \propto Q$.

Definimos então a capacidade C como

$$C = \frac{Q}{V}$$

Depende da geometria do arranjo e de alguma propriedade do vácuo + ainda não estamos em materiais

Exemplo:



Lei de Gauss: $Z_{\text{nr}} r L E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma Z_{\text{nr}} a L}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \hat{r} \Rightarrow V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r} dr$$

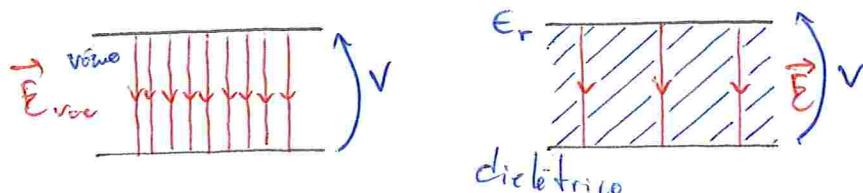
$$= \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$V = \frac{\sigma Z_{nh}}{Z_n L \epsilon_0} \log \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$= \frac{Q}{Z_n L \epsilon_0} \log \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$C = \frac{Z_n L \epsilon_0}{\log \left(\frac{b}{a} \right)} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{Z_n \epsilon_0}{\log \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Capacitância na Presença de Dielétricos



$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_{vac}$$

$$C_{vac} \rightarrow \epsilon_r C_{vac}$$

→ o campo elétrico é reduzido por $\frac{1}{\epsilon_r}$ na presença de dielétrico, e portanto é preciso haver mais carga de uma placa à outra para atingir a mesma diferença de potencial

Energia Elétrostática em termos da Capacitância

$$dW = V dq$$

$$W = \int dW = \int V dq = \int V C dV = C \int V dV$$

$$W = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow W_{vac} \rightarrow \epsilon_r W_{vac}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \rho v d\pi$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{m}^3} E^2 d\pi$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\pi \longrightarrow \epsilon_r \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\pi$$

$$\frac{\epsilon}{2} \int E^2 d\pi = \frac{1}{2} \int (\epsilon \vec{E}) \cdot \vec{E} d\pi$$

\Downarrow

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} d\pi$$

→ deve considerar tanto a energia gasta para trazer cargas livres quanto a gasta para orientar os dipolos das cargas ligadas com respeito ao campo elétrico

$$U = - \vec{P} \cdot \vec{E}$$

→ energia potencial de um dipolo \vec{P} na presença de um campo \vec{E}

Força sobre Dielétricos

Para um sistema conservativo com energia potencial eletrostática

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

podemos calcular uma força F

$$dW = f_{\text{ext}} dx = -F dx$$

$$F = - \frac{dW}{dx} = - \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

Mas para V se manter constante, carga precisa ser adicionada ou retirada do sistema pela bateria

$$dW = -Fd\mathbf{x} + VdQ$$

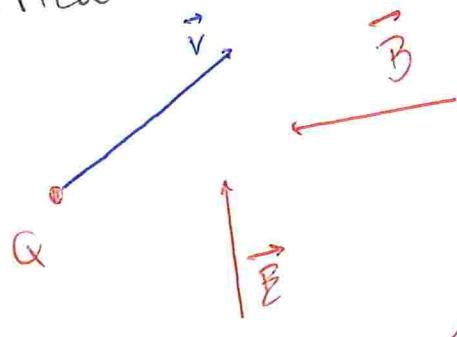
$$F = - \frac{dW}{dx} + V \frac{dQ}{dx}$$

$$= - \frac{dW}{dx} + V \frac{d}{dx}(CV)$$

$$= - \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} + V^2 \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

Magnetostática



→ depende do referencial
↓
o magnetismo surge naturalmente do campo elétrico e da Relatividade Restritiva

$$\vec{F}_{mag} = Q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

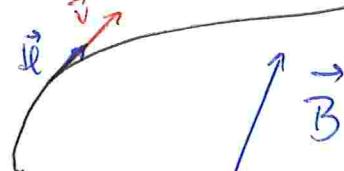
lei de Força

de Lorentz

Correntes e forças sobre

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Correntes



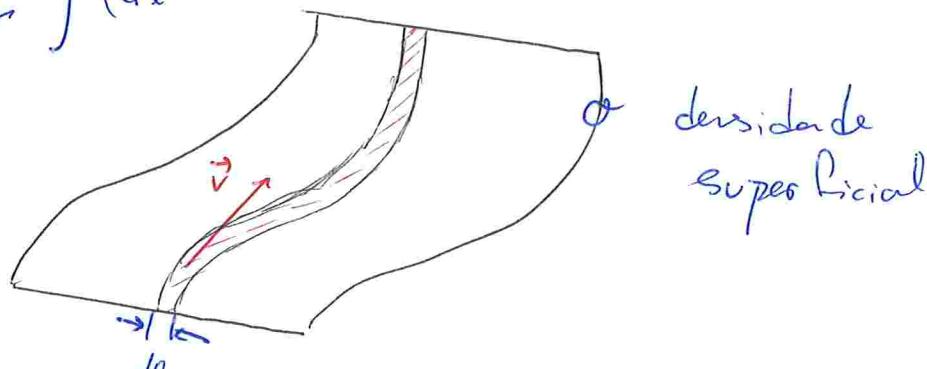
densidade linear
de carga λ

$$\begin{aligned}
 I &= \lambda \frac{dl}{dt} \\
 &= \lambda v \frac{dt}{dt} \\
 &= \lambda v
 \end{aligned}$$

podemos provar $I = a$
um vetor

$\boxed{I = \lambda \vec{v}}$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{mag}} &= \int \vec{v} \times \vec{B} dq \\
 &= \int \vec{v} \times \vec{B} \lambda dl \\
 &= \int \vec{I} \times \vec{B} \lambda dl \\
 &= \int I (\vec{dl} \times \vec{B}) \quad \begin{array}{l} \text{se } a \text{ corrente} \\ \text{for constante} \end{array} \\
 &= I \int (\vec{dl} \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

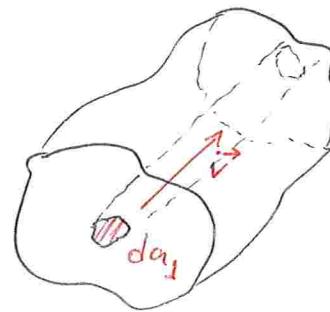


densidade
de corrente
superficial

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} = \frac{\sigma \vec{v} dt dl_{\perp}}{dt dl_{\perp}} = \sigma \vec{v}$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int \vec{v} \times \vec{B} dq = \int \vec{v} \times \vec{B} \sigma da = \int \vec{K} \times \vec{B} da$$

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\Pi}}{da_t}$$



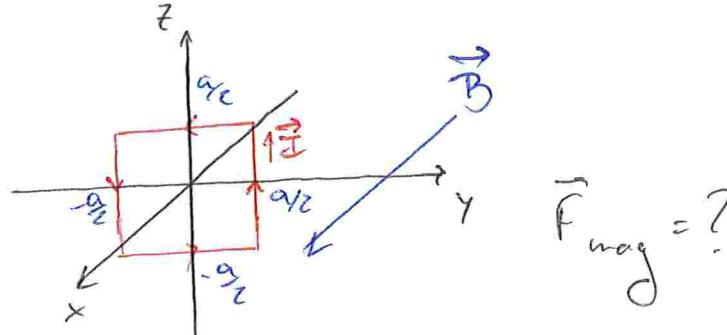
\vec{J} densidade volumétrica
de corrente

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \frac{dq \vec{v}}{dt da_t} = \frac{\rho d\pi \vec{v}}{dt da_t} \\ &= \frac{\rho \vec{v} dt da_t}{dt da_t} = \rho \vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{mag} &= \int \vec{v} \times \vec{B} dq = \int \vec{v} \times \vec{B} \rho d\pi \\ &= \int \vec{J} \times \vec{B} d\pi\end{aligned}$$

Exemplo

$$\vec{B} = k z \hat{x}, \quad k \text{ constante}$$



$$\begin{aligned}\vec{F}_{mag} &= I \int \vec{J} \times \vec{B} = I \left(\int_{-\alpha_z}^{\alpha_z} \hat{y} \times \vec{B} dz + \int_{-\alpha_z}^{\alpha_z} \hat{z} \times \vec{B} dy + \int_{-\alpha_y}^{\alpha_y} \hat{y} \times \vec{B} dy + \int_{-\alpha_y}^{\alpha_y} \hat{z} \times \vec{B} dz \right) \\ &= k I \alpha^2 \hat{z}\end{aligned}$$

Equação de Continuidade

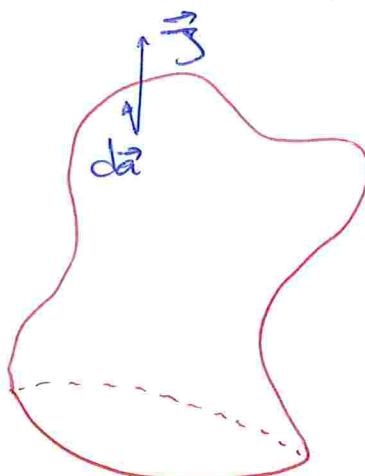
Definimos a densidade volumétrica do corrente por

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_s} \quad \text{área infinitesimal perpendicular a } \vec{I}$$

Assim, o corrente total atravessando uma superfície

S é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$



Case \$S\$ seja fechado, temos

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\tau^i$$

Por conservação de carga elétrica, a taxa de variação temporal da carga total no interior de \$V\$ deve ser igual à corrente fluindo através de \$S\$, i.e.,

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad q = \int_V p d\tau^i$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V p d\tau^i = \int_V \frac{\partial p}{\partial t} d\tau^i = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\tau^i$$

Logo, segue que

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Equação
de Continuidade

Consequência direta da conservação da carga elétrica

Lei de Biot-Savart

O campo magnético gerado por uma corrente estacionária

I é dado por

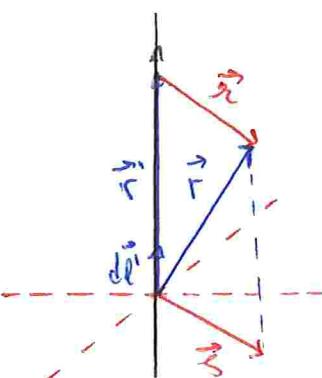
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2} d\vec{l}' \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

A lei de Biot-Savart se \vec{I} é a intensidade magnética é constante é a equivalente magnética da Lei de Coulomb

Para Z e 3 dimensões tensor

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} d\vec{l}', \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} d\tau'.$$

Exemplo: Fio infinito com corrente constante I



$$\vec{r} = s\hat{s} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = z'\hat{z}$$

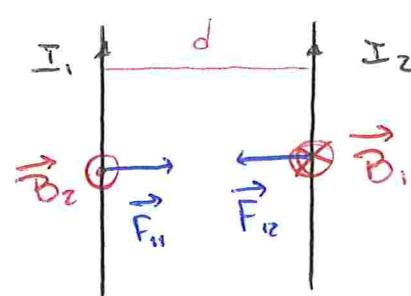
$$\vec{r} = s\hat{s} + (z-z')\hat{z}$$

$$d\vec{l}' = dz'\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2} = \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^3} = \frac{dz' \hat{z} \times (s\hat{s} + (z-z')\hat{z})}{\sqrt{s^2 + (z-z')^2}^3}$$

$$= \frac{s dz' \phi \hat{z}}{\sqrt{s^2 + (z-z')^2}^3}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} s \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{s^2 + (z-z')^2}^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{z}$$



$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int d\vec{l} \times \vec{B} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Logo, a força total exercida sobre um pedaço de fio de comprimento L

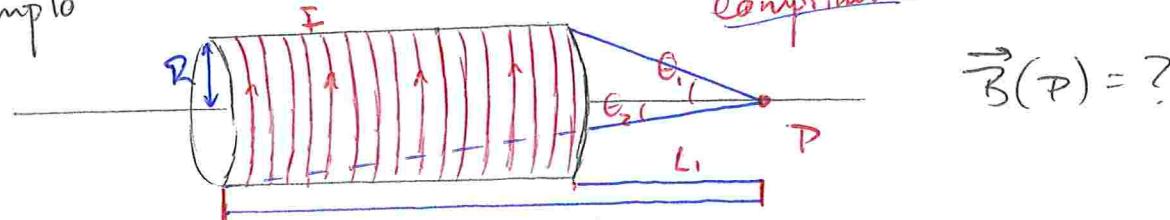
$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{l} \times \vec{B} = I_2 \int_{-L/2}^{L/2} (dz \hat{z}) \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{\phi} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{s} \int_{-L/2}^{L/2} dz = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \hat{s} \end{aligned}$$

A força por unidade de comprimento é então

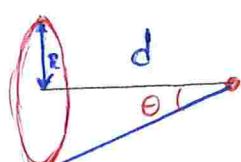
$$\frac{F_{12}}{L} \propto \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

n voltas por unidade de comprimento

Exemplo



O campo em P deve ser a sobreposição das componentes de场as de raio R



$$\vec{r} = d \cdot \hat{z}$$

$$\vec{r}' = s \hat{s} = R \hat{s}$$

$$\vec{r} = d \cdot \hat{z} - R \hat{s}$$

$$d\vec{l} = R d\phi \hat{\phi}$$

$$\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{rc^3} = \frac{R d\phi (d \cdot \hat{z} + R \hat{s})}{\sqrt{d^2 + R^2}^3}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{R \cdot d\phi}{\sqrt{d^2 + R^2}^3} \hat{z} + \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\phi}{\sqrt{d^2 + R^2}^3} \hat{s} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 \hat{z}}{\sqrt{d^2 + R^2}^3}$$

Pesta somar as espiras

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{z^2 + R^2}} n dz \hat{z}$$

número de espiras
entre z e $z+dz$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I R^2 n \hat{z}}{2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I n}{2} [\cos \theta_2 - \cos \theta_1] \hat{z}$$

Para uma bobina infinita, $\theta_2 \rightarrow 0$ e $\theta_1 \rightarrow \pi$. Assim,

$$\vec{B}(r) = \mu_0 I n \hat{z}.$$

mas estacionário

De volta ao caso geral, note que

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(r') \times \hat{r}}{r'^2} d\tau'$$

cálculo explícito

usando que

$$\frac{\hat{r}}{r'^2} = \frac{\hat{r}}{r'^3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}(r') \times \hat{r}}{r'^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}(r') \times \hat{r}}{r'^2} \right) = (\nabla \times \vec{j}) \cdot \frac{\hat{r}}{r'^2} - \vec{j} \cdot \nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r'^2} \right)$$

$\hookrightarrow \vec{j}$ depende de r' , mas
a derivada é em \vec{r}

Assim, segue que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^r d\tau'$$

"Lei de Gauss para
o Magnetismo"

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

\hookrightarrow forma diferencial

Para o rotacional teremos que

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r'^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} \right) = \left(\hat{r} \cdot \nabla \right) \vec{J} - (\vec{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} + \vec{J} \left(\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right) - \vec{J} \left(\nabla \cdot \vec{J} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r}) = 4\pi S^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$(\vec{J} \cdot \nabla) \vec{u} = \sum_i v_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Em nosso caso, $-(\vec{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} = (\vec{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{r}}{r^2}$. Lei de Gauss para o magnetismo em forma integral

Abrindo os parênteses e expandindo até a superfície com $\vec{J} = 0$, resta apenas o termo da delta de Dirac

~~$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} =$$~~

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int 4\pi S^3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') d\tau'$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$
Lei de Ampère na forma diferencial

Exemplo (Fio Infinito):

círculo de raio s

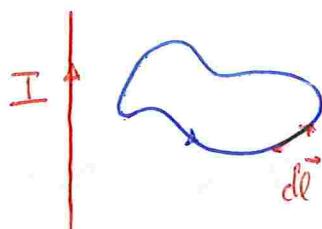
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_P dl = 2\pi s B = \mu_0 I$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}}$$

Forma integral

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

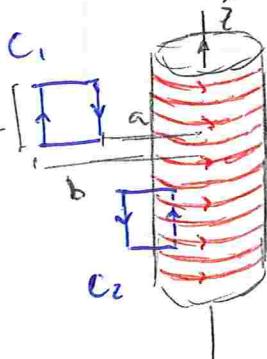
Aplicando a Lei de Ampère para um circuito não encerrado por corrente, a integral se anula



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_P \vec{B} \cdot (\hat{ds}\hat{s} + \hat{dx}\hat{x} + \hat{dy}\hat{y})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_P d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_A^B d\phi + \int_B^A d\phi \right) = 0$$

Solenóide



n laços por
unidade de
comprimento

Definimos $k = \frac{n l I}{l} = n I$, $\vec{k} = n I \hat{z}$.

Por simetria, \vec{B} aponta na direção \hat{z}
em qualquer ponto do espaço.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(a)L - B(b)L = 0$$

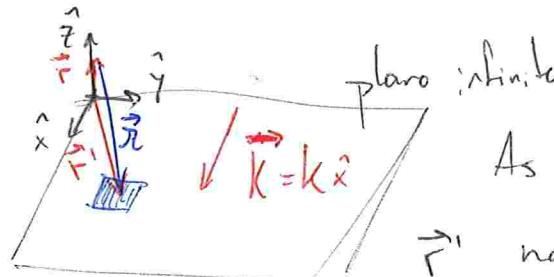
sem corrente

$$C_1 \quad B(a) = B(b)$$

(Como a distribuição é localizada em xy , o campo se anula no infinito e segue que $B(s) \approx 0$).

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 n L I \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

\vec{B} é uniforme no interior do solenóide



As contribuições de \vec{r} na direção \hat{z} são canceladas por outras componentes em outra região de plane

Potencial Vetor Magnético

Sabemos que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Garantir que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ao escrever $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Se $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ se anula suficientemente rápido.

teorema de Helmholtz fornece uma expressão fechada para

\vec{A} . Do contrário, são necessários argumentos de simetria.

Há uma ambiguidade na escolher de \vec{A} , pois $\vec{A} + \nabla \lambda$

com λ função escalar leva ao mesmo \vec{B}

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \lambda) = \nabla \times \vec{A} + \cancel{\nabla \times (\nabla \lambda)},$$

$$= \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

Podemos utilizar esta liberdade para fazer com que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Neste caso, teremos então que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

3 equações de Poisson

No caso eletrostático,

$$\nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{f(\vec{r}')}{\epsilon_0 r} d\tau'.$$

Por comparação,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} d\tau'.$$

Imagine que temos \vec{A}_0 tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_0$. Então construímos $\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla \lambda$ tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$:

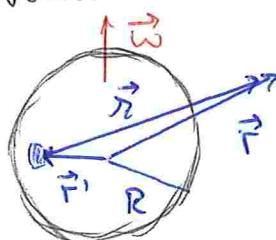
$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}_0 + \nabla^2 \lambda = 0$$

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \vec{A}_0 \quad \text{equação de Poisson}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{A}_0}{r} d\tau'$$

Exemplo

Casca esférica de raio R , densidade superficial de carga σ e velocidade de rotação $\vec{\omega}$. $\vec{A}(\vec{r}) = ?$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

$$\vec{\omega} = \omega \sin \psi \hat{x} + \omega \cos \psi \hat{y}$$

$$\vec{r}' = R \hat{r} = R \sin \theta \cos \phi \hat{x} + R \sin \theta \sin \phi \hat{y} + R \cos \theta \hat{z}$$

$$r = \sqrt{R^2 - r^2 - 2Rr \cos \theta'}$$

$$d\tau' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\begin{aligned} \vec{k} = \sigma \vec{v} &= \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}' = \sigma (-R \omega \cos \psi \sin \theta' \sin \phi) \hat{x} \\ &+ \sigma R \omega (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi - \sin \psi \cos \theta') \hat{y} \\ &+ \sigma R \omega \sin \psi \sin \theta' \sin \phi \hat{z} \end{aligned}$$

Após integrar em ϕ' , teremos

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \omega w \sin \psi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' \cos \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} \hat{y}_1$$

$$= -\frac{\mu_0 R^3 \omega w \sin \psi}{2} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr + u}} \hat{y}_1$$

$$- \frac{1}{3R^2 r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R-r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R+r)]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r \leq R, \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r > R. \end{cases}$$

independente do sistema de coordenadas

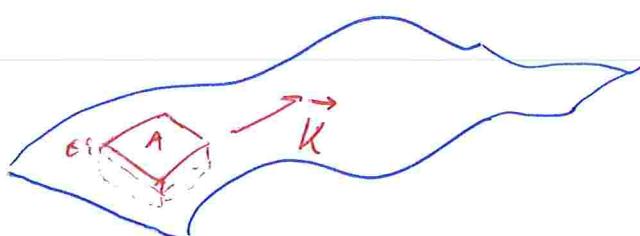
No sistema de coordenadas original,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R w \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi}, & r \leq R, \\ \frac{\mu_0 R^4 w \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}, & r > R. \end{cases}$$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Calculando \vec{B} para $r < R$, obtenas que \vec{B} é constante no interior da superfície.

Condições de Contorno em Magnetostática



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

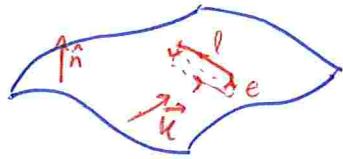
Para $\epsilon \rightarrow 0$

$$(\vec{B}_1^\perp - \vec{B}_1^\parallel) A = 0$$

$$\vec{B}_1^\perp = \vec{B}_1^\parallel$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Por outro lado



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I$$

corrente que
atravessa S

Para $\epsilon \rightarrow 0$

$$(\vec{B}_1'' - \vec{B}_2'')l = \mu_0 K l$$

$$\vec{B}_1'' - \vec{B}_2'' = \mu_0 K$$

De forma compacta,

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$$

Em termos do potencial vetor

$$0 = \nabla \cdot \vec{A} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad A_1^+ - A_2^+ = 0$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi_s$$

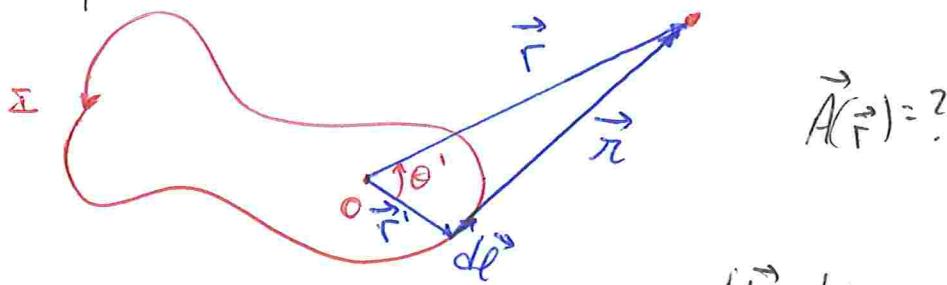
No limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$(A_1'' - A_2'')l = 0 \Rightarrow A_1'' = A_2''$$

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

Expansão Multipolar para o Potencial Vetor

4900x05



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{K da'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J d\tau'}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr\cos\theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta') \rightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta') dl' \quad \text{demonstrado no curso elétrico}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos\theta') dl'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \int dl' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta' dl' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \frac{r'}{2} (3\cos^2\theta' - 1) dl' +$$

↓
monópolo

↓
dipolo

↑
quadrupolo

demais
multipolares

$\int dl' = 0$ → o termo monopolar para um circuito fechado de corrente sempre se anula

→ o primeiro termo
→ o dipolo

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint (\vec{r}' \cdot \hat{r}) d\vec{l}'$$

↳ mais complexo

Apêndice Matemático

Seja $\vec{v} = \vec{c} f$, onde \vec{c} é um vetor constante e f uma função escalar

$$\int_S \nabla \times (\vec{c} f) \cdot d\vec{a} = \oint_P (\vec{c} \cdot f) \cdot d\vec{l}$$

$$\nabla \times (\vec{c} f) = f \nabla \times \vec{c} - \vec{c} \times \nabla f$$

$$- \int_S \vec{c} \times \nabla f \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{c} \cdot f \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$(\vec{c} \times \nabla f) \cdot d\vec{a} = \vec{c} \cdot (\nabla f \times d\vec{a})$$

$$- \vec{c} \cdot \int_S \nabla f \times d\vec{a} = \vec{c} \cdot \oint_P f d\vec{l} \quad \text{if } \vec{c} \text{ constante}$$

$$\int_S \nabla f \times d\vec{a} = - \oint_P f d\vec{l}$$

~~Tomenas agora $f = \vec{c} \cdot \vec{r}$~~

Tomemos $\oint \vec{C} \cdot d\vec{a}$. Teremos

$$\int_S \nabla(\vec{C} \cdot \vec{r}) \times d\vec{a} = - \oint_P (\vec{C} \cdot \vec{r}) d\vec{l}$$

$$\nabla \times \vec{r} = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{C} \cdot \vec{r}) &= \vec{C} \times (\nabla \times \vec{r}) + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{C}) + (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{C} \\ &= (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{r} \quad \left[(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{r} \right]_i = c_i \frac{\partial e_i}{\partial e_i} = c_i \\ &= \vec{C} \end{aligned}$$

$$\int_S \vec{C} \times d\vec{a} = - \oint_P (\vec{C} \cdot \vec{r}) d\vec{l}$$

$$\oint_P (\vec{C} \cdot \vec{r}) d\vec{l} = - \vec{C} \times \int_S d\vec{a} \quad \vec{C} = \hat{r}$$

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_S d\vec{a} \times \vec{r}$$

não precisa coincidir com a área do circuito

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \vec{m} \times \vec{r}$$

momento de dipolo magnético do circuito

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2} \quad \vec{V}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{m} = m \hat{z} \Rightarrow \vec{m} \times \hat{r} = m \hat{z} \times \hat{r} = m \sin \theta (\cos \phi \hat{y} - \sin \phi \hat{x}) \\ = m \sin \theta \hat{p}$$

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta}$$

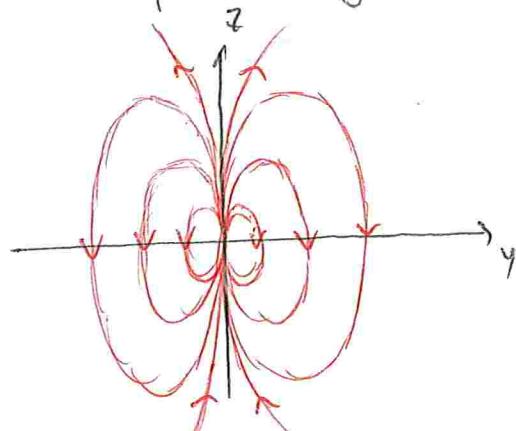
$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{\theta} \right]$$

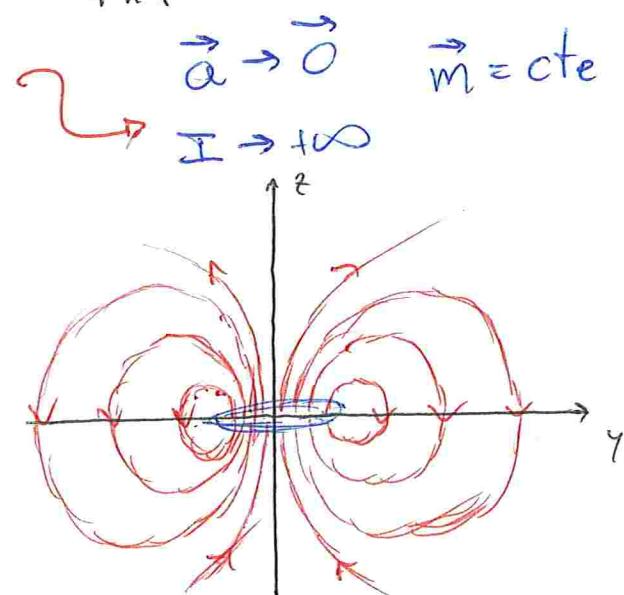
$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\frac{2}{r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{1}{r^3} \sin \theta \hat{\theta} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]$$

Exemplo: dipolo magnético $\vec{m}^{0,0}$

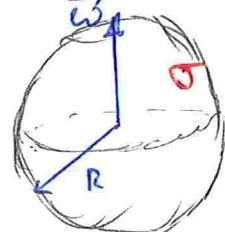


dipolo puro



dipolo físico

Aplicações: casca esférica girante



$$\vec{A}_{\text{dip}} = ?$$

$$\vec{m} = ?$$

procedimento: pilha de circuitos

$$\vec{dm} = dI \cdot \hat{\vec{a}}$$

$$\hat{\vec{a}} = \pi R^2 \sin^2 \theta \hat{\vec{z}}$$

$$dI = \frac{dq}{\Delta t} = \frac{\sigma da}{\Delta t} = \frac{\sigma (2\pi R \sin \theta) R d\theta}{\Delta t}$$

$$dI = \frac{dq}{2\pi/\omega} = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta$$

$$d\vec{m} = \pi \omega \sigma R^4 \sin \theta d\theta \hat{\vec{z}}$$

$$\vec{m} = \pi \omega \sigma R^4 \hat{\vec{z}} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \Rightarrow \vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \omega \hat{\vec{z}}$$

4/3

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4 \sin \theta}{3r^2} \hat{\phi}$$

Campos Magnéticos na Materia

Materiais Diamagnéticos, Paramagnéticos
e Ferrimagnéticos

↳ no exterior da esfera,
coincide com o resultado
exato calculado anteriormente

Lap. 105

- Qual é a conexão entre correntes elétricas e íons, bissolas, pólo Norte e etc?

↳ existem pequenos lagos de corrente na matéria, que em escala macroscópica podem ser simplificados como dipólos magnéticos

↳ elétrons orbitando átomos e spin

↳ em geral se cancelam devido à natureza aleatória

Ao ser aplicado um campo magnético, ocorre um alinhamento nôrdic destes dipólos

↳ polarização magnética ou magnetização

Diferentemente da polarização, a magnetização numa sempre ocorre na mesma direção do campo aplicado

Paramagnetismo: magnetização paralela a \vec{B}

Diamagnetismo: magnetização oposta a \vec{B}

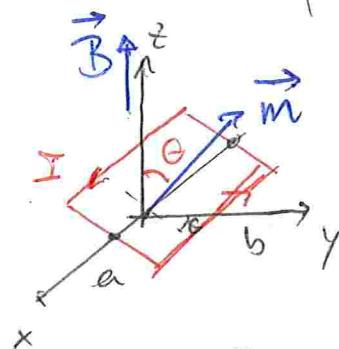
Ferromagnetismo: mantém magnetização mesmo após a remoção de campo aplicado

↳ e.g. ferro

↳ mais complexo que os outros dois casos

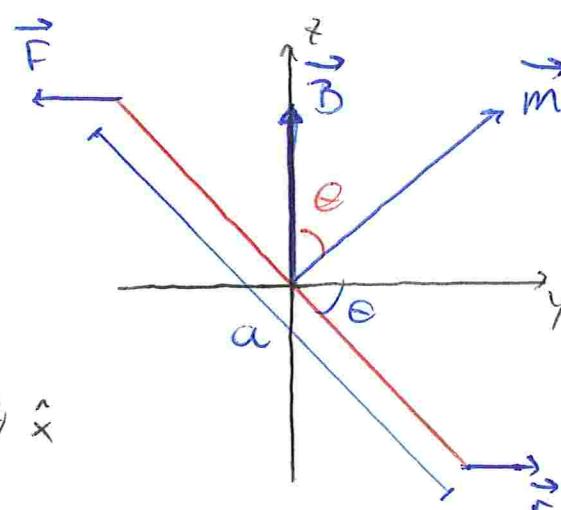
Torques e Forças em Dipólos Magnéticos

Modelo: lago quadrado de corrente



$$\vec{N} = \alpha F \sin \theta \hat{x}$$

$$F = Ib\vec{B}$$



$$\vec{N} = I ab B \sin \theta \hat{x} = m B \sin \theta \hat{x}$$

$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$

análogo a

$$\vec{N} = \vec{P} \times \vec{E}$$

↳ para \vec{B} uniforme, fornece o torque para qualquer distribuição de carga localizada
 ↳ Se \vec{B} não é uniforme, vale para dipolo ideal

Como todo elétron pode ser visto como um dipolo, é esperado que o paramagnetismo seja uma propriedade universal

↳ por analogia com o caso elétrico

↳ embora este torque seja responsável pelo efeito, o princípio de exclusão de Pauli em geral neutraliza os torques por pares de elétrons com spins opostos

↳ em geral, materiais paramagnéticos têm um número ímpar de elétrons, mas as efetas térmicas aleatórias ainda anulam, em geral, este alinhamento

Força resultante sobre o dipolo ↳ i.e. força quadrada

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

↳ Se \vec{B} uniforme

Força não-uniforme

$$d\vec{F} = I \left(dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, 0) + dz \hat{z} \times \vec{B}(0, 0, z) - dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, \epsilon) - dz \hat{z} \times \vec{B}(0, 0, \epsilon) \right)$$

$$d\vec{F} = I \left(-dy \hat{y} \times [\vec{B}(0, y, \epsilon) - \vec{B}(0, y, 0)] + dz \hat{z} \times [\vec{B}(0, \epsilon, z) - \vec{B}(0, 0, z)] \right)$$

$\epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ $\epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$

$$= I e \left(\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dz - \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dy \right)$$

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \left| dz \approx e \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right|_{(0,0,0)}$$

$$\vec{F} = I e^2 \left(\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} - \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \rightarrow \vec{m} = I e^2 \hat{x}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

↑

$$= m \left(\hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \hat{x} \frac{\partial B_y}{\partial y} - \hat{x} \frac{\partial B_z}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$= m \left[\hat{x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{m} = m \hat{x}$$

Efeitos de Campos Magnéticos em Órbitas Atômicas

↳ elétrons não apenas apresentam spin, mas também revolucionam em torno do núcleo

↳ o princípio, não é uma corrente estacionária, mas na prática o período é tão curto que pode ser tratada como

$$I = \frac{-e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$$

$$\vec{m} = I\pi R \hat{z} = -\frac{1}{2} evR \hat{z}$$

Na presença de campo magnético, observa um torque, mas é muito mais difícil inclinar a órbita do que esperar o spin.

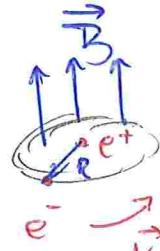
No entanto, o elétron acelera no desacelera e depender da orientação do campo magnético

$$\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} \neq \vec{0}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + ev' B = m_e \frac{v'^2}{R}$$

\downarrow
Fórga de Coulomb
 \downarrow
Fórga centrípeta

\downarrow
Fórga de Lorentz



$$ev'B = \frac{m_e(v'^2 - v^2)}{R} = \frac{m_e(v' + v)(v' - v)}{R}$$

$$\text{assumindo } \Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{eRB}{2m_e}$$

$\Delta v = v' - v$ pequeno

\downarrow implica alteração no momento de dipolo

ou mudanças em
 \vec{m} se existe um
campo magnético

origem do diamagnetismo → na presença de um campo, os momentos de dipolo em geral orientados tentam a se alinhar contra \vec{B}

$$\Delta \vec{m} = -\frac{1}{2} e(\Delta v) R \hat{z} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}$$

Este efeito é ainda mais fraco que o paramagnetismo e em geral se torna relevante em átomos com vínculo por de elétrons

OBSERVAÇÃO: o argumento anterior se baseia na suposição de que o formato da órbita não se altera, e é falso neste aspecto. Contudo, está qualitativamente correto o faz pouco sentido refinar os detalhes, visto que o dia magnetismo é inherentemente quântico

é inherentemente quântico
Na presença de um campo magnético, pela razão que
lou, a matéria se torna magnetizada e conveniente
definir a quantidade de

definir \vec{M} quantidade de momento de dipolo magnético por unidade de volume

No seguinte, não há preocupações com a origem de magnetização e as fontes como dada

Campo de um Objeto Magnetizado

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{r}_2}{r'^2} dV, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\pi} \right) = \frac{\pi}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}) \times \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{r'} - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r'} \right) d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{r'} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{a}'}{r'}$$

Se assemelha ao
potencial de uma
corrente volumétrica

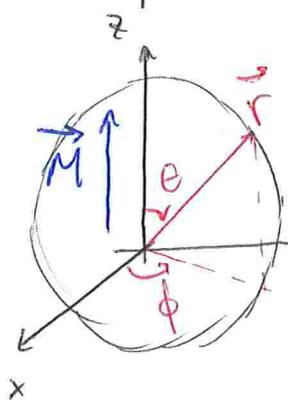
$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

correntes
ligadoras

Se assemelha ao
potencial de uma corrente
superficial
 $\vec{k}_b = \vec{M} \times \hat{n}$

análogo a
 P_b e σ_b

Exemplo: campo magnético de esfera uniformemente carregada



$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}$$

$$\vec{k}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

Conclui-se que a densidade de corrente superficial
de uma lâmina estérica em rotação é dada por

$$\vec{k} = \sigma \vec{v} = \sigma w R \sin \theta \hat{\phi}$$

Por analogia ($\sigma w R \rightarrow M$), temos

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

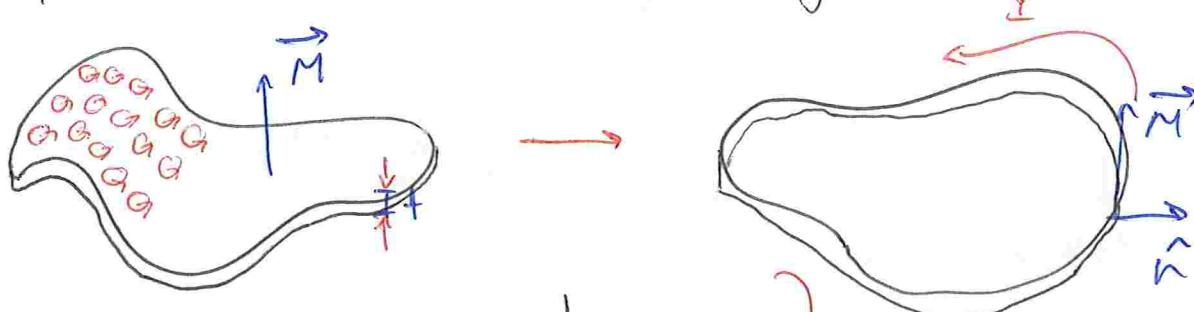
campo
uniforme

no interior, com o campo de um dipolo perfeito

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^2 \vec{M}$$

no exterior

Interpretação Física de Correntes Ligadas



Se ~~os~~ os laços de corrente forem diretos a e espessura t, o momento de dipolo será dado por $m = M \cdot a \cdot t$. Em termos da corrente resultante, no entanto, $m = I a$

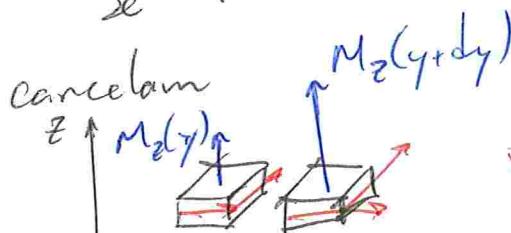
$$M \cdot a = I a \quad \text{corrente superficial:}$$

$$I = M \cdot t \Rightarrow k_b = I/t = M$$

Em termos vetoriais, $\vec{k}_b = \vec{M} \times \hat{n}$

- Nenhuma carga percorre todo o percurso de \vec{k}_b , pois cada carga está ligada a um átomo específico. O efeito, no entanto, é uma corrente macroscópica.

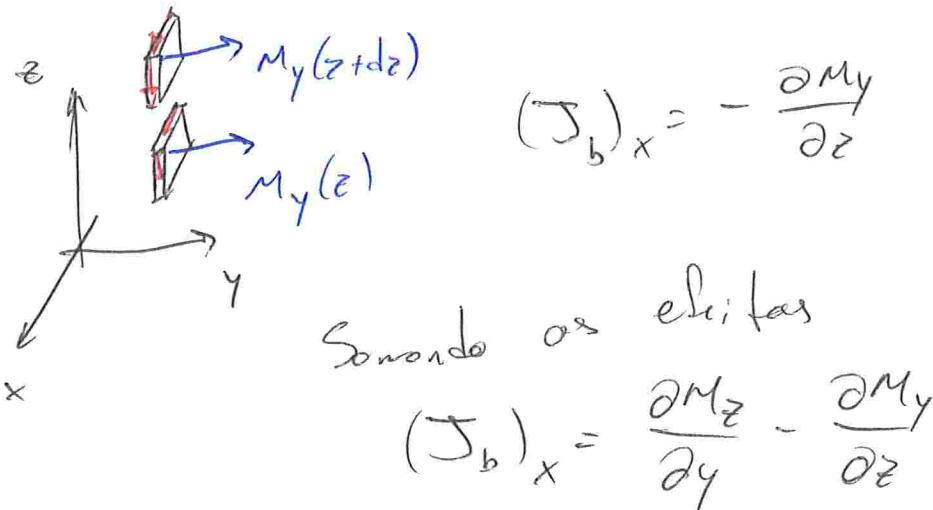
Se \vec{M} é não unidirecional, as correntes internas não se cancelam



na superfície de corte haverá uma corrente resultante na direção \hat{x}

$$I_x = [M_z(y+dy) - M_z(y)] dz = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

$$\therefore (J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$



Em geral,

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_b = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{M}) = 0$$

Campo Magnético Macrocópico

Como no caso elétrico, podemos falar em um campo microscópico ou macroscópico. Do caso macroscópico.

\hookrightarrow Sistemas conservados para correntes estacionárias

Seguimos falando apenas

Campo Auxiliar \vec{H} \hookrightarrow correntes "livres"

$$\vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f$$

Lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J}_b + \vec{J}_f$$

$$= \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

instiga definir
uma nova
quantidade

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

Exemplo: Fio de cobre, com corrente livre \vec{I}
diamagnético



$$H \cdot 2\pi s = I_f = I \frac{\pi s^2}{\pi R^2}$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} s \hat{\phi}, \quad s \leq R$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad s > R$$

Para $s > R$, $\vec{M} = \vec{0}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$. Tom

$s \leq R$, não podemos determinar \vec{H} diretamente

OBSERVAÇÃO: na prática, \vec{H} é mais útil que \vec{D} e mais
frequentemente mencionado em laboratório

↳ medirmos correntes livres, que indicam \vec{H} . Mas
não medirmos cargas livres, e sim diferenças
de potencial, que indicam \vec{D} , mas \vec{B}

Pelc Teorema de Helmholtz, temos

$$\vec{H} = -\nabla V + \nabla \times \vec{W}$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{H}}{r} d\tau'$$

$$\vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{H}}{r} d\tau'$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \vec{H}}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\nabla' \times \vec{H}}{r} \right) d\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \vec{H}}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{J}_f}{r} - \vec{J}_f \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

\vec{J}_f depende das coordenadas com ligaçāo

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_f \times \hat{r}}{r^2} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{J}_f}{r} d\tau' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \vec{H}}{r} d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_f \times \hat{r}}{r^2} d\tau' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \vec{H}}{r} d\tau'$$

Se $\nabla' \cdot \vec{H} \neq 0$, nāo vale a

"Lei de Biot-Savart" para \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 - \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

(Contrário) Exemplo: cilindro de ferro com magnetização permanente \vec{M} e sem correntes livres

Usando as equações elegantes, teríamos

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}} = 0$$

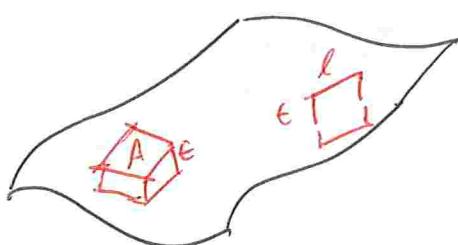
$$\vec{H} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 \vec{m} \quad \text{no interior}$$

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{no exterior}$$

claramente falso

Condição de Contorno em Materiais Magnéticos



$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{H} \cdot dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV$$

$$= - \oint_S \vec{M} \cdot d\vec{a}$$

$$H_{\uparrow}^{\perp} - H_{\downarrow}^{\perp} = -(M_{\uparrow}^{\perp} - M_{\downarrow}^{\perp}) \Rightarrow \Delta H^{\perp} = -\Delta M^{\perp}$$

logo perpendicular a \vec{k}

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_V \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

e então paralelo

$$I(\vec{H}_{\uparrow}'' - \vec{H}_{\downarrow}'') = \vec{K}_f \times \hat{n} \Rightarrow \Delta \vec{H}'' = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

Em situação com $\vec{J}_f = \vec{0}$ em todo o espaço nós temos que $\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$ todo espaço

\downarrow Helmholtz

$$\vec{H} = -\nabla W$$

\downarrow

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = -\nabla^2 W$$

$$\boxed{\nabla^2 W = \nabla \cdot \vec{M}}$$

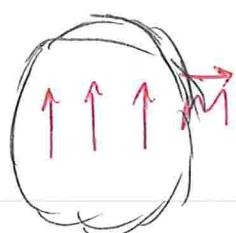
\rightarrow equação de Poisson

W é chamado de potencial escalar magnético

para regiões com

$\nabla \cdot \vec{M} = 0$ obtemos
novamente uma equação
de Laplace

Exemplo: esfera uniformemente magnetizada



$$\vec{M} = M \hat{z}$$

\hookrightarrow constante

$$\vec{J}_b = \vec{0}$$

$$\vec{k}_b = M \hat{z} \times \hat{r} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

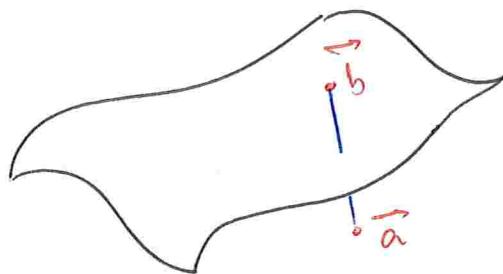
No interior temos

$$W(r < R) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

No exterior

$$w(r)R = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos \theta).$$

Precisamos ainda obter as condições de contorno para w .



$$\int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \nabla w \cdot d\vec{l} = -(w(b) - w(a))$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} = w(a) - w(b) = 0$$

W é contínuo

Usando $\Delta H^+ = -\Delta M^+$, temos que

$$H_+^+ - H_-^+ = M_+^+ - M_-^+$$

$$-\underbrace{\frac{\partial w_+}{\partial n}}_{\partial w} + \underbrace{\frac{\partial w_-}{\partial n}}_{\partial w} = M_+^+ - M_-^+$$

$$\underbrace{\frac{\partial w_+}{\partial n}}_{\partial w} - \underbrace{\frac{\partial w_-}{\partial n}}_{\partial w} = M_+^+ - M_-^+$$

Tensos en la

$$\sum_{l=0}^{+\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \Rightarrow B_l = R^{2l+1} A_l$$

$$M_{\uparrow}^+ = 0, \quad M_{\downarrow}^- = \vec{M} \cdot \hat{r} = M \hat{z} \cdot \hat{r} = M \cos \theta$$

$$- \sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{+\infty} l R^{l-1} A_l P_l(\cos \theta) = -M \cos \theta$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{+\infty} l R^{l-1} A_l P_l(\cos \theta) = M \cos \theta$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) R^{l-1} A_l P_l(\cos \theta) = M P_1(\cos \theta)$$

$$A_l = 0, \quad \forall l \neq 1$$

$$3 A_1 = M \Rightarrow A_1 = \frac{M}{3}$$

$$B_1 = R^3 A_1 = \frac{R^3 M}{3}$$

$$w(r < R) = \frac{1}{3} M r \cos \theta = \frac{M z}{3}$$

$$w(r > R) = \frac{R^3 M}{3} \frac{1}{r^2} \cos \theta$$

$$\vec{H}(r < R) = -\nabla W = -\frac{M \hat{z}}{3} = -\frac{1}{3} \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \left(-\frac{\vec{M}}{3} + \vec{M} \right) = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}$$

$$\vec{H}(r > R) = -\nabla W$$

$$= -\frac{R^3 M}{3} \nabla \left(\frac{1}{r^2} \cos \theta \right)$$

\vec{B} é uniforme no interior da esfera

$$= -\frac{1}{3} R^3 M \left(-\frac{2}{r^2} \cos \theta \hat{r} - \frac{1}{r^3} \sin \theta \hat{\theta} \right)$$

$$= \frac{R^3}{3r^3} M \left(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right)$$

$$= \frac{R^3}{3r^3} M \left(3 \cos \theta \hat{r} - \cancel{\cos \theta \hat{r}} + \sin \theta \hat{\theta} \right)$$

$$= \frac{R^3}{3r^3} \left(3M \cos \theta \hat{r} - M \hat{z} \right)$$

$$= \frac{R^3}{3r^3} \left(3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{M} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3} M}_{m} \cdot \frac{1}{r^3} \left(3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m} \right)$$

Campo de um dipolo magnético ideal com

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m} \right]$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{M}$$

Meios Magnéticos Lineares

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H})$$

$$= \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{H}$$

$$= \mu \vec{H}$$

↳ permeabilidade magnética do meio

$$\mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$$

↳ permeabilidade relativa

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m > 0$ se paramagnético

$\chi_m < 0$ se diamagnético

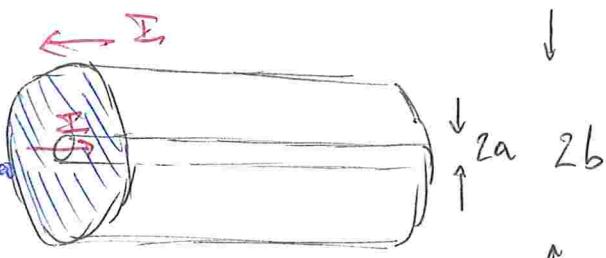
Em meios lineares e homogêneos,

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \nabla \times \vec{H} = \chi_m \vec{J}_f$$

$$\vec{J}_b = \chi_m \vec{J}_f$$

Exemplo:

meio linear e homogêneo com susceptibilidade χ_m .



$$\vec{B} = ?$$

4302003
susceptibilidade magnética

mais conveniente que
 $\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}$,
pois \vec{H} , e não \vec{B} , é
medido no laboratório

Podemos calcular \vec{H} usando a Lei de Ampère e obter os demais campos usando a linearidade do meio.

Ferromagnetismo: spins vizinhos interagem entre si e tendem a se manter alinhados depois de terem sido afetados por um campo

→ a "história magnética" do material é relevante

Eletrodinâmica

Lei de Ohm Microscópica

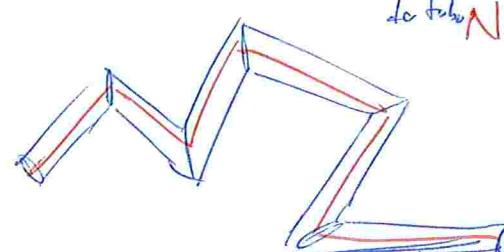
Um elétron na banda de condução de um metal a temperatura T deve realizar uma caminhada aleatória com uma velocidade quase constante média, de acordo com o Teorema da Equipartição, dando por

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Par outro lado, o livre caminho médio entre duas colisões consecutivas é λ e dada por

$$\lambda = \frac{l}{n \sigma_c} \cdot \text{seg de choque da colisão}$$

↓
densidade numérica



$$N = n \sigma_c V \Delta t$$

de interior de tubo
verso transversal

$$\lambda = \frac{V \Delta t}{N} = \frac{l}{n \sigma_c}$$

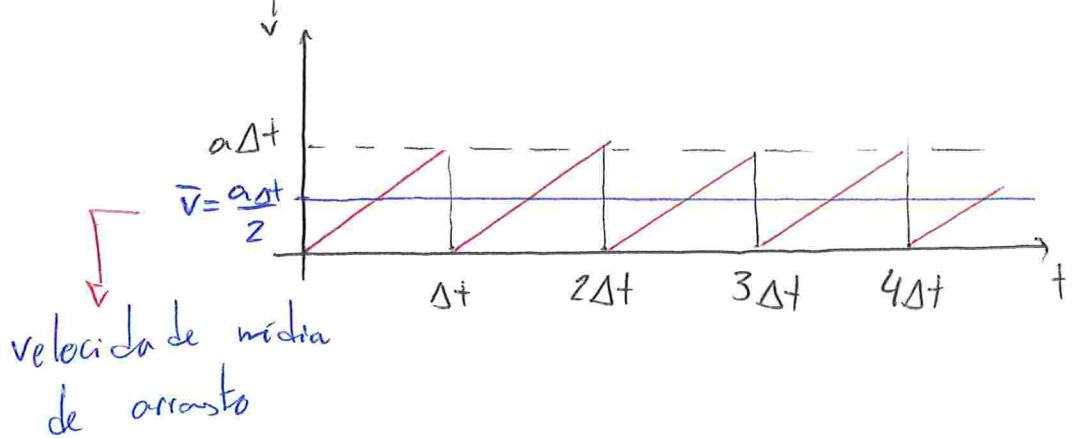
Se aplicarmos um campo elétrico externo \vec{E} , o é ficará sujeito a

$$\vec{F} = -e \vec{E},$$

e portanto a uma aceleração

$$\vec{a} = -\frac{e}{m} \vec{E}.$$

Assumindo que o elétron perde estenograficamente toda sua energia cinética após cada colisão, temos



$$\Delta t = \frac{1}{V_{rms}} = \frac{1}{n \sigma_c} \sqrt{\frac{m}{3kT}},$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \left(-\frac{e}{m} \vec{E} \right) \frac{1}{n \sigma_c} \sqrt{\frac{m}{3kT}},$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{e \vec{E}}{n \sigma_c} \frac{1}{\sqrt{3mkT}}$$

Por outro lado, temos para a densidade de corrente

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = -n f e \vec{v}$$

f número de elétrons por
área da banda de
condução

$$\vec{J} = -f f e \left(-\frac{1}{2} \frac{\vec{e} \cdot \vec{E}}{k T_c} \right) \frac{1}{\sqrt{3m k T}}$$

$$= + \frac{1}{2} \frac{f e^2}{\sigma_c \sqrt{3m k T}} \vec{E}$$

A lei de Ohm é uma expressão empírica válida para muitos materiais, entre a proporcionalidade entre \vec{J} e \vec{E}

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

Conduktividade

$$[\rho] = \Omega \text{ m}$$

↓
SI

Para o cobre,

$$\begin{aligned} v_{rms} &= \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3N_A kT}{m N_A}} \\ &= \sqrt{\frac{3RT}{m N_A} \frac{m_{Cu}}{m_{Cu}}} \\ &= \sqrt{\frac{3RT}{M_{Cu}} \frac{m_{Cu}}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Cu} &= 64 \text{ g/mol} \\ m_{Cu} &= 64 \text{ m}_p = 64 \cdot 2000 \text{ m}_e \\ T &= 300 \text{ K} \\ R &= 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

$$\sim \Theta (10^5 \text{ m/s}).$$

densidade volumétrica de cobre (β_{Cu})

$$I = JA = \rho v \pi r^2$$

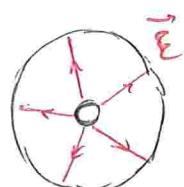
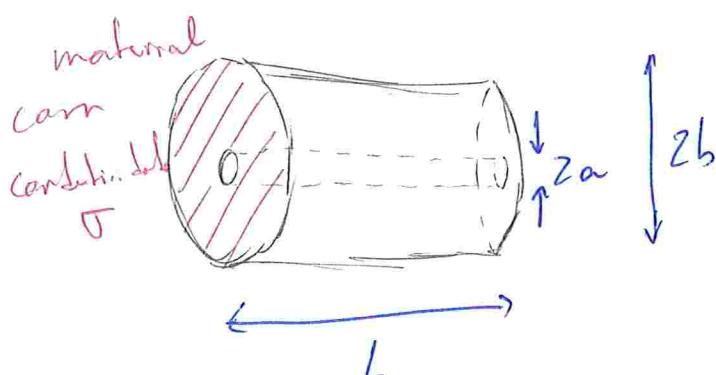
$$\begin{aligned} V &= \frac{I}{\rho \pi r^2} \xrightarrow{f=1} \\ \rho &= \frac{N_e}{V} e = \frac{N_{Cu}}{V} e = \frac{N_A}{V_{mol}} e = \left(\frac{N_A M_{Cu}}{V_{mol}} \right) \frac{e}{m_{Cu}} = \frac{\beta_{Cu} N_A e}{M_{Cu}} \end{aligned}$$

Para $V = 0.5 \text{ mm}$, $I = 1 \text{ A}$, $\rho_{\text{cu}} = 9 \text{ g/cm}^3$, $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ temos

$$V \approx 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s.}$$

Lei de Ohm Macroscópica

Assumimos uma geometria específica



$$2\pi s L E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{s} \hat{s}$$

Segundo a Lei de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \frac{1}{s} \hat{s}, \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(b/a)}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{CV}{L} \right) \frac{1}{s} \hat{s},$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(b/a)} \frac{V}{s} \hat{s},$$

$$= \frac{\sigma V}{s \log(b/a)} \hat{s}.$$

Lei de Ohm
Macroscópica

$$I = J A_1 = J 2\pi s L = \frac{2\pi\sigma L}{\log(b/a)} V$$

$$V = RI \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\log(b/a)}{2\pi\sigma L}$$

A potência dissipada é dada por

$$P = VI = RI^2.$$

Segundo a lei de Ohm,

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}.$$

Os valores típicos de σ podem ser até 10^{22} mhos/mas para condutores que para isolantes, Na prática, podemos tomar $\sigma \rightarrow +\infty$ e obter $\vec{E} \rightarrow 0$.

Da Equação de Continuidade, podemos obter ainda

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{para corrente estacionária}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E}}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

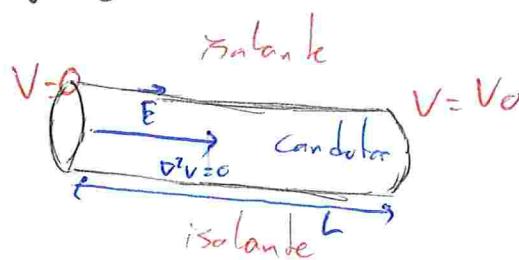
estacionário aliado condutividade uniforme

No regime

vale que

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = - \nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$$

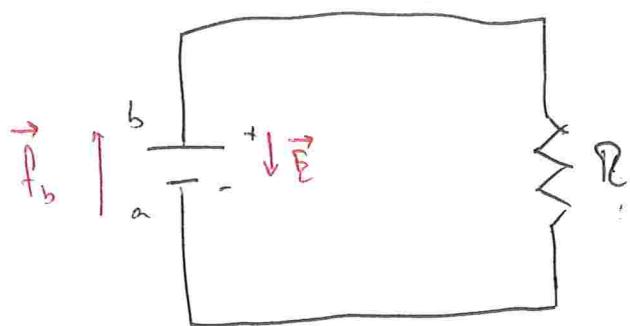


$$V = \frac{V_0 x}{L}$$

Uniforme!

$$\therefore \vec{E} = \frac{V_0}{L} \hat{x}$$

Força Eletromotriz



\vec{f}_b : Força por unidade de carga

Força resultante por unidade de carga nesse circuito

$$\vec{F} = \vec{f}_b + \vec{E}$$

$$E = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_b \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

↳ Força eletromotriz ↳ só age entre os terminais da bateria

$$E = \int_a^b \vec{f}_b \cdot d\vec{l}$$

$$V = - \int_a^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

No interior de uma bateria ideal

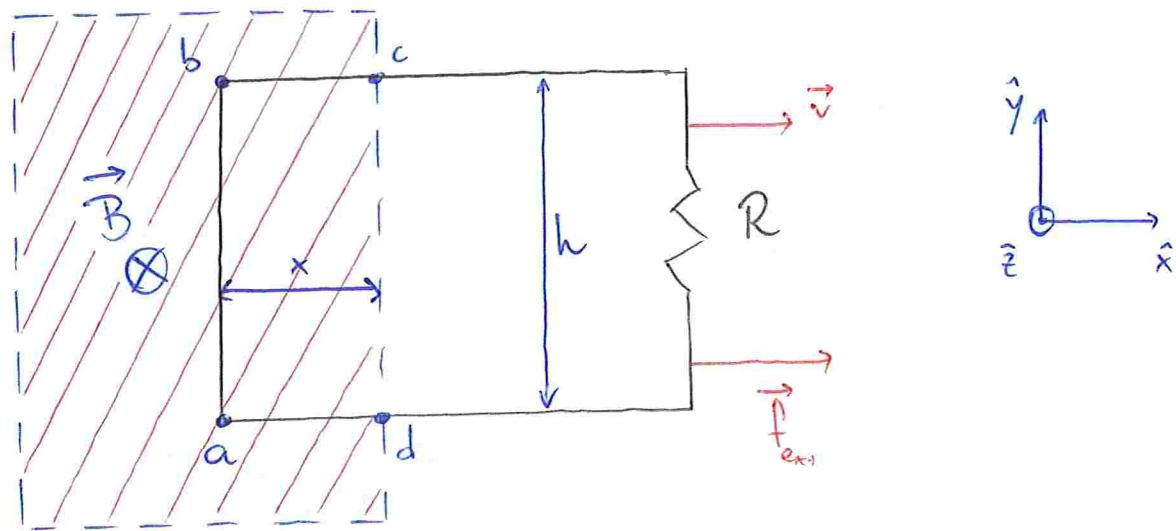
$$\vec{f}_b + \vec{E} = 0$$

resistência interna nula

$$V = \int_a^b \vec{f}_b \cdot d\vec{l} = E$$

Para uma resistividade interna finita,

$$V = E - rI$$



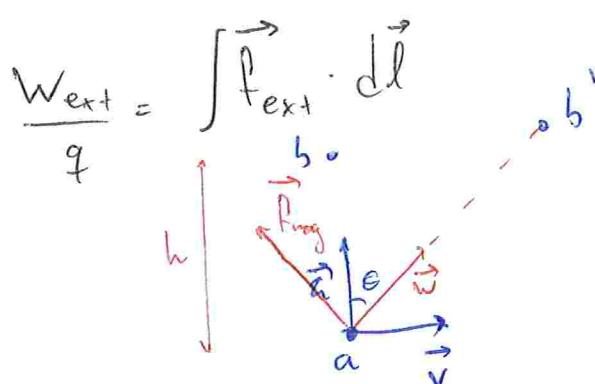
Então

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{mag}} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$E = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_a^b v B dy = v B h$$

\vec{f}_{mag} não realiza trabalho, entao isto precisa ser derivado a \vec{F}_{ext}

- trabalho por unidade de carga feito pelo agente externo



$$v = u \tan \theta$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{f}_{\text{mag}} = v B \hat{y} - u B \hat{x}$$

$$\therefore \vec{F}_{\text{ext}} = u B \hat{x}$$

$$\frac{W_{ext}}{q} = nB \int_a^{b'} dx \sin \theta = nBh \tan \theta \\ = (n \tan \theta) Bh = vBh = E.$$

Outra forma de escrever E é por meio do fluxo magnético

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

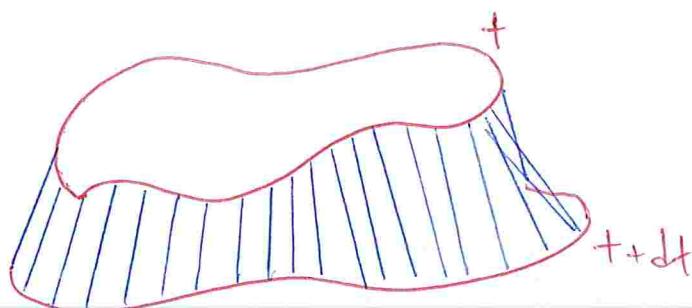
Neste circuito específico, $\Phi_B = Bhx$. Veremos então que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bh \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-v} = -Bhv = -E$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -E$$

válida no caso geral (i.e., para circuito de ferroto arbitrário e mesmo com ferroto variável)

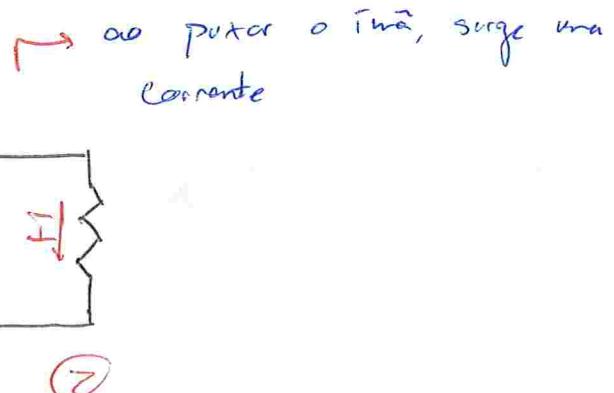
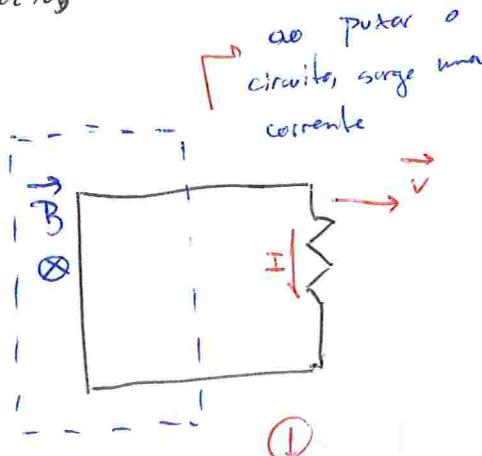
$$d\Phi = \Phi(t+dt) - \Phi(t)$$



a diferença $d\Phi$ está associada ao fluxo pelas laterais do volume

Indução Electromagnética

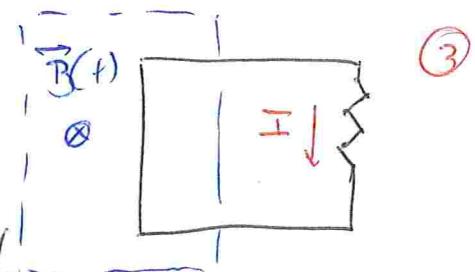
$$E = \oint \vec{f}_{mag} \cdot d\vec{l}$$



A força sobre os elétrons é de natureza magnética

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Para interpretar os resultados anteriores e o de um terceiro, Faraday postula que um campo magnético variável gera campo elétrico



ao variar o campo no tempo, surge uma corrente

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad \text{F5}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

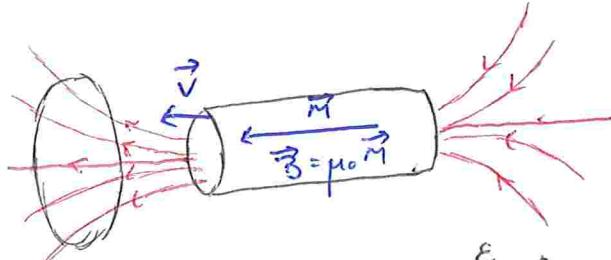
Lei de Faraday
em forma diferencial

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Lei de Faraday em
forma integral

Lei de Lenz

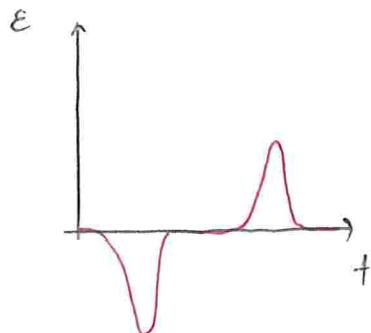
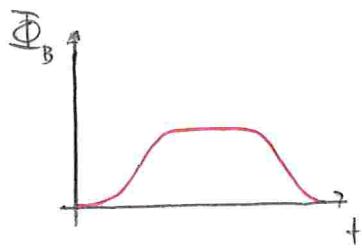
A corrente que se estabelece no circuito quando há variação de fluxo magnético tende a gerar um fluxo que compõe, em parte, $\frac{d\Phi_B}{dt}$



a natureza

abomina

mudança de fluxo



$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

passo usar métodos de
magnetostática

Exemplo:

$$\vec{B} = B_0$$

$$\vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

\Rightarrow

$$\vec{B} = \vec{0}$$

densidade
de cargas 1

$$\vec{E} = ?$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi b E = -\pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\frac{a^2}{2b} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\phi}$$

Torque infinitesimal sobre o trecho $d\vec{l}$

$$d\vec{N} = \vec{s} \times d\vec{F} = (b\hat{s}) \times (\lambda dl \vec{E}) = -b\hat{s} \times \lambda dl \frac{a^2}{2b} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\phi}$$

$$= -\frac{\lambda a^2}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dl \hat{z}$$

$$\vec{N} = \int d\vec{N} = -\frac{\lambda a^2}{2} \hat{z} \int \frac{\partial B}{\partial t} dl$$

$$d\vec{N} = b\lambda E \hat{z} dl$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \int d\vec{N} = b\lambda \hat{z} \int \vec{E} dl \\ &= b\lambda \hat{z} \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -b\lambda \frac{d\vec{B}}{dt} \hat{z} \\ &= \hat{z} \left[-b\lambda \pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t} \right] = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{Se } \vec{L}(+c) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_0^t \frac{d\vec{l}}{dt} dt = -\hat{z} b\lambda \pi a^2 \int_0^t \frac{\partial B}{\partial t} dt \\ &= b\lambda \pi a^2 B_0 \hat{z} = b\lambda \pi a^2 \vec{B}_0 \end{aligned}$$

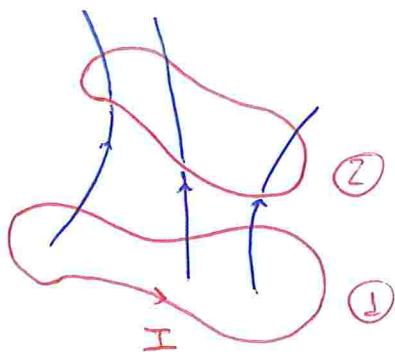
o momento angular não parece estar sendo conservado
os campos eletromagnéticos corregem momento angular

mais detalhes em

Eletromagnetismo II

$$\vec{\omega} = \frac{\pi a^2 \lambda}{M b} \vec{B}_0$$

Indutância



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2$$

Perceba que $\Phi_2 = M_{21} I$

*indutância
mútua*

*apenas depende das propriedades
geométricas dos dois circuitos*

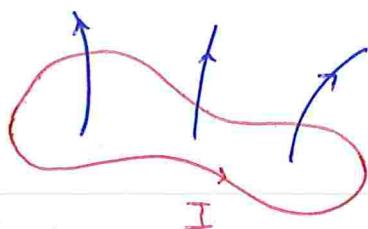
$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 \\ &= \int \nabla \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{a}_2 \\ &= \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \\ &= \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{r} \cdot d\vec{l}_2\end{aligned}$$

$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \right) I$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= M I \rightarrow I \text{ em } 1 \\ \Phi_1 &= M I \rightarrow I \text{ em } 2\end{aligned}$$

*se o circuito
oposto tem corrente
 I , o fluxo é $M I$,
por mais distantes que
os circuitos sejam*



$$\Phi = L I$$

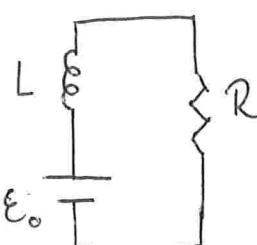
auto-indutância

$$[M] = [L] = H = \frac{V \cdot s}{A}$$

Henry

$$E_o - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$E_o = L \frac{dI}{dt} + RI$$



$$E_o = L \frac{dI}{dt} + RI$$

↗ trabalho por unidade de carga realizada pela bateria
 ↗ energia por unidade de carga armazenada no circuito
 ↗ energia por unidade de carga no resistor

$$E_o dq = L \frac{dI}{dt} dq + RI dq \quad \rightarrow I = \frac{dq}{dt}$$

$$E_o I = L I \frac{dI}{dt} + RI^2$$

↗ potência injetada pela bateria
 ↗ potência dissipada

↗ potência armazenada no circuito

$$\frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

$$W = L \int_0^+ I \frac{dI}{dt} dt \quad \rightarrow I(t=0) = 0$$

$$= L \left(I^2 - \int I \frac{dI}{dt} dt \right)$$

$$ZW = LI^2$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

energia armazenada num circuito de auto-indutância L
 quando percorrido por corrente I

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = LI$$

$$\therefore W = \frac{I}{2} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{I} dl$$

Para uma densidade volumétrica de corrente temos então

$$w = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{J} d\tau,$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \oint \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) d\tau,$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B},$$

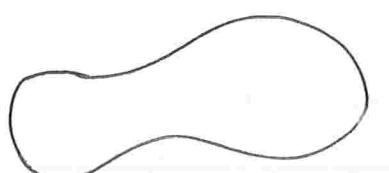
$$= \|\vec{B}\|^2 - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}.$$

$$w = \frac{1}{2\mu_0} \left(\int \|\vec{B}\|^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left(\int \|\vec{B}\|^2 d\tau - \oint \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{a} \right)$$

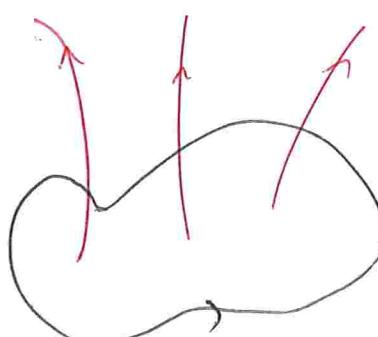
$$= \frac{1}{2\mu_0} \int \|\vec{B}\|^2 d\tau$$

Considerando agora



$$I = 0$$

$$\Phi = 0$$



$$I \neq 0$$

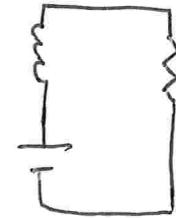
$$\Phi \neq 0$$

$$\Phi = L I \Rightarrow E = -L \frac{dI}{dt}$$

↳ auto-indutância

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E_0}{L} - \frac{RI}{L} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E_0}{R} \right)$$

\tilde{H}



$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = -\frac{R}{L} \tilde{I}$$

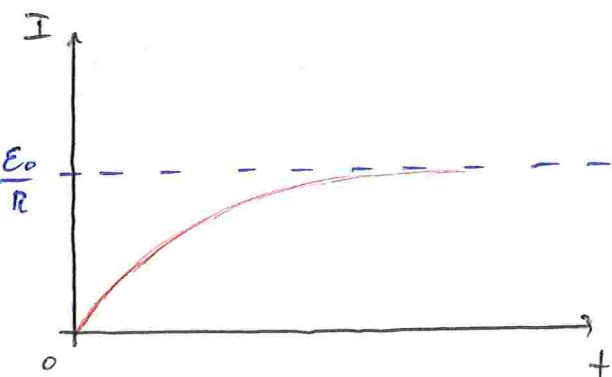
$$\tilde{I}(t) = c e^{-\frac{Rt}{L}} = c e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = \frac{RL}{R}$

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + c e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I(0) = 0 = \frac{E_0}{R} + c$$

$$I(t) = \frac{E_0}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$



Perceba que o tempo de resposta característico τ é diretamente proporcional a L , i.e., L representa uma inércia associada a variações de corrente.

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E_0}{R} \right)$$

análogo mecânico

massa
inercial

farga constante

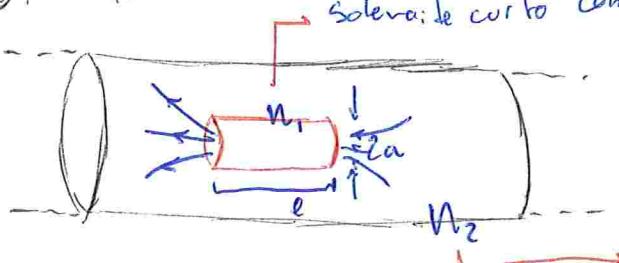
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + F_0$$

$$L \frac{dI}{dt} = -RI + E_0$$

$$L \frac{dq^2}{dt^2} = -R \frac{dq}{dt} + E_0$$

farga de
resistência proporcional
à velocidade

Exemplo: indutância mútua solenóide curto com densidade de espiras N_1 ,



solenóide longo com densidade linear de espiras N_2

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} = ?$$

$$= \int \nabla \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{a}_z$$

$$M = M_{12} = M_{21}$$

$$= \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int \int \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \right) \right] I = M I$$

complexo

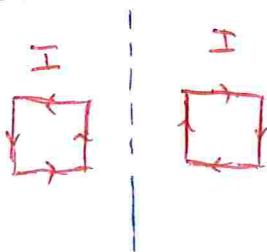
$$\vec{B}_z = \mu_0 n_z I \hat{z}$$

$$\oint \vec{B}_z = \oint_+ = \int \vec{B}_z \cdot d\vec{a}_1$$

$$\Phi_{\text{expt}} = B_z \pi a^2 = \mu_0 n_z I \pi a^2$$

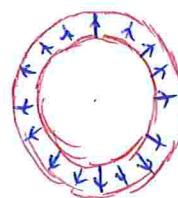
$$\Phi_2 = n_1 l \Phi_{\text{espirou}} = \frac{\mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l}{M} I$$

Auto-indutância de um solenóide circular com seção retangular

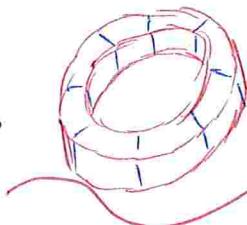


eixo de
simetria

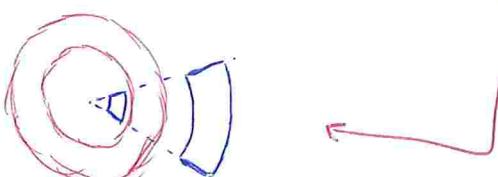
N espiras
ao
todo

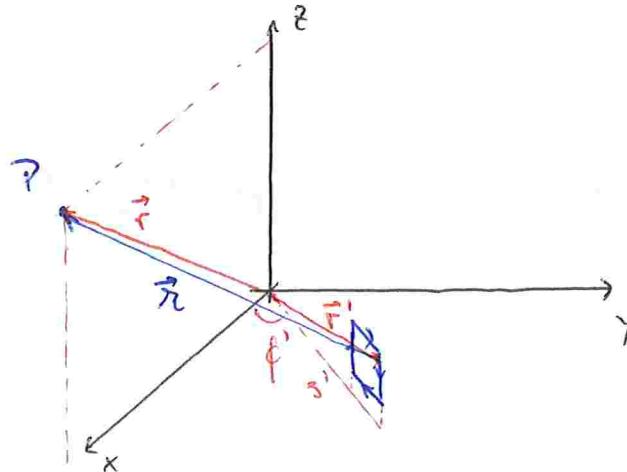


Obteremos o campo magnético
via Lei de Biot - Savart



→ é passível usar a
Lei de Ampere em
sistemas toroidais. Ver
Griffiths





$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{r^2} d\ell' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{r^3} d\ell'$$

$$\vec{I} = I_s \hat{s} + I_e \hat{z}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{r}' = x \hat{x} + z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = s \hat{s} + t \hat{z} = s \cos \phi \hat{x} + s \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\vec{I} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_x & I_y & I_z \\ x - s \cos \phi & -s \sin \phi & z \end{vmatrix}$$

$$= [s \sin \phi (I_s(z - z') + s I_e)] \hat{x}$$

$$+ [I_e(x - s \cos \phi) - I_s \cos \phi (z - z')] \hat{y}$$

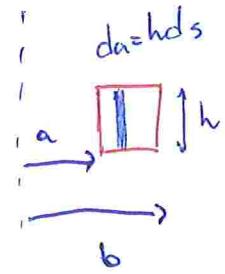
$$+ [-I_s \times s \sin \phi] \hat{z}$$

as contribuições de ϕ' e
 $-\phi'$ cancelam as componentes
 x e z

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\phi}, & \text{dentro} \\ \vec{0}, & \text{fora} \end{cases} \quad \text{em } P, \quad \hat{y} = \hat{\phi}$$

$$\oint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{a} =$$

$$\Phi_{\text{espira}} = \frac{\mu_0 N I}{Z_{\pi}} \int_a^b \frac{da}{s}$$



$$= \frac{\mu_0 N I h}{Z_{\pi}} \int_a^b \frac{ds}{s}$$

$$\therefore \Phi = N \Phi_{\text{espira}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 h}{Z_{\pi}}}_{L} \log\left(\frac{b}{a}\right) I$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{Z_{\pi}} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Equações de Maxwell

Até agora temos as seguintes leis

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{p}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Lei de Gauss}$$

\rightarrow ausência de monopólos magnéticos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

\rightarrow Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

\rightarrow Lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B})^0 = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = - \mu_0 \frac{\partial p}{\partial t}$$

\hookrightarrow Equação de Continuidade

Alcancamos uma inconsistência, pois para correntes não-estacionárias tem-se

que $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$ \hookrightarrow como generalizar o Eletromagnetismo para correntes não-estacionárias?

Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}),$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

$$\nabla \cdot \left[\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = 0.$$

Maxwell então introduziu uma correção à Lei de Ampère

Lei de Ampère - Maxwell
em forma diferencial

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lei de Ampère - Maxwell
em forma integral

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

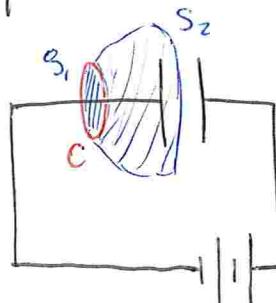
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_d$$

$\hookrightarrow \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

corrente de deslocamento

Exemplo: capacitor sendo carregado

Pela Lei de Ampère,



a corrente não é

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \text{ em } S_1$$

estacionária

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ em } S_2$$

com acréscimo de carga, a Lei de Ampère falha

Consideremos agora o que ocorre ao utilizarmos a Lei de Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}.$$

O campo elétrico entre as placas é

$$E = \frac{I}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 A}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}}_{\begin{array}{l} \neq 0 \text{ para } S_1 \\ = 0 \text{ para } S_2 \end{array}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}}_{\begin{array}{l} = 0 \text{ para } S_1 \\ \neq 0 \text{ para } S_2 \end{array}} = \mu_0 I \quad \text{para ambas}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equações de Maxwell
em forma integral

Equações de Maxwell
em forma diferencial

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Monopólos Magnéticos

Maxwell na ausência de cargas elétricas.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Simetria:

$$\begin{aligned}\vec{E} &\rightarrow \vec{B} \\ \vec{B} &\rightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \vec{E}\end{aligned}$$

não altera as equações

Para as equações não-lorágineas, devido ao sistema de simetria é quebrada, a não unidades e ser que se considere ~~um~~ densidades de cargas e correntes magnéticas, fornecendo

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{P_e}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 P_m,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_m = - \frac{\partial P_m}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_e = - \frac{\partial P_e}{\partial t}$$

Contudo, estas cargas magnéticas nunca foram observadas, uma pena, pois Dirac mostrou que a existência de monopólos magnéticos explicaria o porquê da quantização da carga elétrica

aparentemente, Dous simplesmente não criav nenhum monopolo magnético

vácuo



Equações de Maxwell na Matéria

$$P_b = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

conhecidas do campo estático

No caso dinâmico ainda devemos considerar os correntes devido às mudanças na polarização elétrica

A polarização induzida de causa um fluxo \vec{J}_p . Se P é de carga ligada e cresce ligeiramente, a carga nas pontas aumenta e surge uma corrente resultante.

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_1 = \frac{\partial P}{\partial t} da_1.$$

não é uma corrente ligada

↳ correntes ligadas são dadas ao spin e órbitas das eletrons

$$\nabla \cdot \vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{P}) = - \frac{\partial P_b}{\partial t}$$

satistaz conservação

Mudanças na magnetização alteram $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$, mas não há outras elitas.

Segue então que

$$P = P_f + P_b = P_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (P_f - \nabla \cdot \vec{P}) \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = P_f$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Como a Lei de Gauss Magnética e a Lei de Faraday são equações homogêneas, permanecem inalteradas.

Temos então

$$\nabla \cdot \vec{D} = P_f$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Equações de Maxwell na Materia em forma diferencial

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{a}$$

Equações de Maxwell na Materia em forma integral

Esta forma das Equações de Maxwell precisa ser complementada com a relação constitutiva entre \vec{E} e \vec{D} e entre \vec{B} e \vec{H} . Para meios lineares,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}.$$

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad \mu = (1 + \chi_m) \mu_0$$

Condições de Contorno

Utilizando as metodologias usuais, obtemos

$$D_1^+ - D_2^+ = \sigma_f,$$

$$B_1^+ - B_2^+ = 0,$$

$$\vec{E}_1'' - \vec{E}_2'' = \vec{0},$$

$$\vec{H}_1'' - \vec{H}_2'' = K_f \times \hat{n}.$$

} Condições de contorno gerais da Eletrodinâmica

Para meios lineares,

$$\epsilon_1 E_1^+ - \epsilon_2 E_2^+ = \sigma_f, \quad \vec{E}_1'' - \vec{E}_2'' = \vec{0},$$

$$B_1^+ - B_2^+ = 0, \quad \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1'' - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2'' = K_f \times \hat{n}.$$

Observação:

Na ausência de cargas e correntes lineares,

$$\epsilon_1 E_1^+ - \epsilon_2 E_2^+ = 0, \quad \vec{E}_1'' - \vec{E}_2'' = \vec{0},$$

$$B_1^+ - B_2^+ = 0, \quad \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1'' - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2'' = \vec{0}.$$

estas equações são a base para a teoria de reflexão e refração

Leis de Conservação

Equação de Continuidade

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d\tau$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

cargas que deixam
o volume

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\tau$$

conservação local de

ρ é
independente
de Maxwell

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{J}$$

carga

\hookrightarrow global: carga total
no Universo é
constante

\hookrightarrow ρ e \vec{J} são
totalmente arbitrários

Teorema de Poynting

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

\hookrightarrow energia necessária para
"montar" uma distribuição de
cargas

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

\hookrightarrow trabalho necessário para
correntes vencerem uma força
eletromotriz de resposta

Estas equações sugerem, para a desidada de energia
criada nas cargas,

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \rightarrow \text{a confirmar}$$

Trabalho feito pelas cargas eletronegativas sobre uma distribuição de cargas em tempo dt

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$$

$$= q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

$$= p \vec{E} \cdot \vec{v} dt dV$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{J} dt dV$$

$$dW = \vec{E} \cdot \vec{J} dt dV$$

toda cam que se realiza trabalho

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad \text{sobre as cargas num volume } V$$

potência por unidade de volume

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad \left(\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} = - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2), \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

energia armazenada nos campos

Fluxo transferido para fora pelos campos

$$\therefore \frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \oint_S \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Teorema de Poynting \rightarrow "Teorema Energia-Trabalho" da Eletrodinâmica

O trabalho exercido sobre as cargas pela força eletromagnética é igual à queda da energia armazenada nos campos mas é menor ou energia que escapava pela "superfície"

Vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

energia por unidade de tempo por unidade de área transportada pelos campos

$$\vec{S} \cdot d\vec{a}$$

energia por unidade de tempo atravessando a superfície infinitesimal de

densidade de fluxo de energia

Fluxo de energia

$$u_{ei} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

u_{ei} é a densidade de energia eletrromagnética no interior de V. Têm as

$$\frac{d}{dt} (U_{ne} + U_{ei}) = - \oint \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

$$U_{ne} = \int_V u_{ne} d\tau$$

$$U_{ei} = \int_V u_{ei} d\tau$$

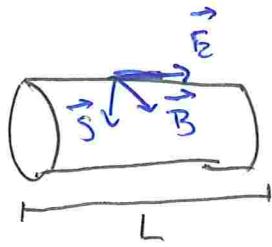
$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (u_{ei} + u_{ne}) d\tau = - \int_V \nabla \cdot \vec{S} d\tau + V$$

$$\nabla \cdot \vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} (u_{ne} + u_{ei})$$

equação de conservação

expressão da conservação local de energia

Exemplo



fio de comprimento L
ddp V

$$E = \frac{V}{L} \quad \text{Corrente } I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{na superfície}$$

$$\therefore S = \frac{1}{\mu_0} \frac{V}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{VI}{2\pi aL} \quad \begin{matrix} \text{aponta radialmente} \\ \text{para dentro} \end{matrix}$$

Energia deixando o fio por unidade de tempo

$$\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = S \cdot 2\pi aL = VI.$$

Como esperado

