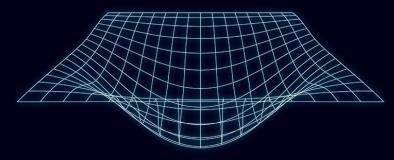




Representações, Algebras de Lie e Geradores dos Grupos de Lorentz e Poincaré



Alunos: Caio César Rodrigues Evangelista

Professor: Dr. Roberto Vinhaes Maluf

Observação

• Representação de Poincaré

$$P^{\mu}\,=\,i\partial^{\mu}$$

Conhecendo a Notação:

$$J_{\mu
u}\,=\,i(x_\mu\partial_
u\,-\,x_
u\partial_\mu)$$

$$J_i \, = \, rac{1}{2} arepsilon_i^{jk} J_{jk} \,
ightarrow \, {
m Geram \ rotações}$$

O que permite definir:

$$N_i^+ \,=\, J_i\,+\,iK_i$$

$$N_i^- = J_i \, - \, i K_i$$

$$K_i = J_{0i} \; o \; ext{Geram boosts na direção} \; x^i$$

Pela última definição, podemos fazer agora uma investigação da algebra e por consequência da representação.

Relações de Comutação

$$egin{split} \left[N_i^+,\,N_j^+
ight] &= \left[rac{1}{2}(J_i\,+\,iK_i),\,rac{1}{2}(J_i\,-\,iKi)
ight] \ &= rac{1}{4}([J_i,\,J_i]\,+\,i[J_i,\,K_j]\,+\,i[K_i,\,J_j]\,-\,[K_i,\,K_j]) \end{split}$$

$$\iff \left[N_i^+,\,N_j^+
ight] \ = \ rac{1}{4}(iarepsilon_{ijk}J_k\,-\,arepsilon_{ijk}K_k\,+\,arepsilon_{jik}K_k\,+\,iarepsilon_{ijk}J_k) \ = \ rac{i}{2}arepsilon_{ijk}(J_k\,+\,iK_k)$$

$$\iff \left[N_i^+,\,N_j^+
ight] \;=\; rac{i}{2}arepsilon_{ijk}N_k^+ \quad \Rightarrow \left[N_i^-,\,N_j^-
ight] \;=\; rac{i}{2}arepsilon_{ijk}N_k^-$$

Relações de Comutação

$$\left[N_i^+,\,N_j^-
ight] \,=\, rac{1}{4}[J_i\,+\,iK_i,\,J_j\,-\,iK_j] \,=\, rac{1}{4}([J_i,\,J_j]\,-\,i[J_i,\,K_j]\,+\,i[K_i,\,J_j]\,+\,[K_i,\,K_j])\,.$$

$$\iff \left[N_i^+,\,N_j^-
ight] \,=\, rac{1}{4}(iarepsilon_{ijk}J_k\,+\,arepsilon_{ijk}K_k\,-\,iarepsilon_{ijk}J_k)$$

$$\iff \left[N_i^+,\,N_j^-
ight]\,=\,0$$

Então as relações são ao todo dadas por:

$$egin{align} \left[N_i^+,\,N_j^+
ight] \, &= \, rac{1}{2} arepsilon_{ijk} N_k^+; & \left[N_i^-,\,N_j^-
ight] \, &= \, rac{1}{2} arepsilon_{ijk} N_k^-; \ \left[N_i^+,\,N_j^-
ight] \, &= \, 0 \end{split}$$

Relações de Comutação

$$\therefore SO(1,3) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$$

Isto é um resultado impressionante! Uma conclusão a partir disto é que se houver um espaço de Hilbert de dimensão finita invariante sobre a relatividade restrita. Então, é possível representar o grupo de Lorentz em termos de pares das representações usuais de rotação do **SU(2)**.

$$\mathfrak{so}(1,3) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$$

- Representação Trivial:
 - Hilbert 1-dimensional
 - Span por objetos de única componente
 - Representada por spin (0,0)
 - Se "transformam" por **SO(1,3)**, da forma:

$$\phi
ightarrow \phi'; \qquad \phi' = \Lambda \phi$$

$$\phi' = \Lambda \phi \Longrightarrow \phi' = 1 \cdot \phi \iff \phi' = \phi$$

- Representação Spinorial:
 - \circ (½, 0) \longrightarrow spinor esquerdo \longrightarrow se transforma somente sobre **SU(2)** L.H
 - \circ (0, $\frac{1}{2}$) \longrightarrow spinor direito \longrightarrow se transforma somente sobre **SU(2)** R.H
 - Spinores de Weyl
 - Com cobrimento duplo de Spin(1, 3) sobre SO(1,3)

$$\mathrm{Spin}(1,\,3)\,\cong\,SL(2,\,\mathbb{C})\,\Longrightarrow\,D(\mathrm{SO}(1,\!3))\,=\,D(SL(2,\mathbb{C}))$$

$$\psi_lpha\,
ightarrow\,\left(rac{1}{2},\,0
ight);\;\;\;\;\psi_lpha\,=\,M_lpha^eta\psi_eta,\;\;\;M\,\in\,SL(2,\,\mathbb{C})$$

• Representação Spinorial:

$$M \,=\, \exp\left(-rac{i}{2}\omega_{\mu
u}S^{\mu
u}
ight); \;\;\; S^{\mu
u} \,\equiv\, D(SL(2,\mathbb{C}))$$

$$S^{ij} \,=\, rac{i}{2} {
m exp} \left(arepsilon^{ijk} \sigma^k
ight) \qquad {
m e} \qquad \qquad S^{0i} \,=\, -rac{i}{2} \sigma^i$$

$$ilde{\psi}_{\dot{lpha}} \,
ightarrow \, (M^*)^eta_lpha ilde{\psi_eta}; \hspace{0.5cm} M^* \, \in \, SL(2, \, \mathbb{C})^*$$

$$\psi_lpha^*
ightarrow \; (M^*)^eta_lpha \psi_eta^*; \;\;\;\; M^* \; \in \, SL(2,\, \mathbb{C})^*$$

$$\iff \psi_{lpha}^* = ilde{\psi}_{\dot{lpha}}$$

Representação Spinorial:

$$M = \exp\left(-rac{i}{2}\omega_{\mu
u}S^{\mu
u}
ight); \quad S^{\mu
u} \equiv D(SL(2,\mathbb{C}))$$
 $\psi_{\dot{lpha}}^*
ightarrow (M^*)_{lpha}^{eta}\psi_{eta}^*; \quad M^* \in SL(2,\mathbb{C})^*$ $\psi_{\dot{lpha}}^*
ightarrow (M^*)_{\dot{lpha}}^{eta}\psi_{\dot{eta}}^*; \quad M^* \in SL(2,\mathbb{C})^*$ $\psi_{\dot{lpha}}^*
ightarrow (M^*)_{\dot{lpha}}^{eta}\psi_{\dot{eta}}^*; \quad M^* \in SL(2,\mathbb{C})^*$ $\Leftrightarrow \psi_{\dot{lpha}}^* = \tilde{\psi}_{\dot{lpha}}^*$ $\Leftrightarrow \psi_{\dot{lpha}}^* = \tilde{\psi}_{\dot{lpha}}^*$ $\Leftrightarrow \psi_{\dot{lpha}}^* = \tilde{\psi}_{\dot{lpha}}^*$ $\Leftrightarrow \psi_{\dot{lpha}}^* = \tilde{\psi}_{\dot{lpha}}^*$

Representação Spinorial:

$$arphi \cdot \cdot \cdot \psi^{lpha} = \epsilon^{lphaeta}\psi_{eta} \qquad \qquad ilde{\psi}^{\dot{lpha}} = \epsilon^{\dot{lpha}\dot{eta}} ilde{\psi}_{eta} \ \psi_{lpha} = \epsilon_{lpha\dot{eta}}\psi^{eta} \qquad \qquad ilde{\psi}^{\dot{lpha}} = \epsilon_{lpha\dot{eta}}\dot{\psi}^{eta}$$

$$\psi_lpha \,=\, M_lpha^eta \psi_eta \,\Longrightarrow\, \psi_lpha' \,=\, \epsilon^{\sigmalpha} M_lpha^eta \epsilon_{eta\gamma} \psi^\gamma$$

$$\epsilon^{\sigmalpha}M_{lpha}^{eta}\epsilon_{eta\gamma} = \left(M^{-1}
ight)_{\gamma}^{\sigma} \implies \psi_{lpha}' = \left(M^{-1}
ight)_{\gamma}^{\sigma}\psi^{\gamma} \implies ilde{\psi_{\dot{lpha}}'} = \left(\left(M^{st}
ight)^{-1}
ight)_{\gamma}^{\sigma}\psi^{st\gamma}$$

$$\therefore \, \chi^{\dot{lpha}} \, \equiv \, ilde{\psi_{\dot{lpha}}}$$

$$\Longrightarrow \chi^{\dot{lpha}} \, o \, \left((M^*)^{-1}
ight)^{\dot{eta}}_{\dot{lpha}} \chi^{\dot{eta}} \, \iff \chi'^{\dot{lpha}} \, = \, \left((M^*)^{-1}
ight)^{\dot{eta}}_{\dot{lpha}} \chi^{\dot{eta}}; \,\, M^* \, \in \, SL(2, \, \mathbb{C})$$

- Representação Spinorial:
 - Não invariante sobre paridade
 - Ex: Particula de spin ½
 - Electron

$$egin{cases} J o J \ K o -K \end{cases} \implies N o N^T$$

$$\psi = egin{pmatrix} 1 \ 0 \end{pmatrix} &
ightarrow ext{Spin Up} \ \chi = egin{pmatrix} 0 \ 1 \end{pmatrix} &
ightarrow ext{Spin Down} \end{cases}$$

Algumas Outras Representações

- Representação Vetorial:
 - Representação fundamental(irredutivel) para o grupo de Lorentz
 - Dada por (½, ½)
 - Vetor potencial eletromagnetico

$$x'^lpha = \Lambda_lpha^eta x^lpha \iff x'^lpha = \exp\left(\left(rac{i\omega_{\mu
u}J^{\mu
u}}{2}
ight)
ight)_lpha^lpha x^lpha; \qquad x^lpha = \left(egin{matrix} x^1 \ x^2 \ x^3 \end{matrix}
ight)$$

 $\mathbf{E}\mathbf{x}$:

$$A'^{\gamma} \, = \; \exp \left(\left(rac{i \omega_{\mu
u} J^{\mu
u}}{2}
ight)
ight)^{
ho}_{\gamma} A^{\gamma};$$

Algumas Outras Representações

- Representação Tensorial:
 - Obedece a transformação de tensores

$$T^{(
ho\sigma)'} = \Lambda_
ho^{
ho'} \Lambda_\sigma^{\sigma'} T^{
ho\sigma} \quad ext{que pode ser rescrito como } T^{(
ho\sigma)'} = rac{\partial x^{
ho'}}{\partial x^
ho} rac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\sigma} T^{
ho\sigma}$$

$$A^{
ho\prime} \,=\, rac{\partial x^{
ho\prime}}{\partial x^{
ho}} A^{
ho}; \;\; B^{\sigma\prime} \,=\, rac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}} B^{\sigma} \implies A^{
ho\prime} B^{\sigma\prime} \,=\, rac{\partial x^{
ho\prime}}{\partial x^{
ho}} rac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}} A^{
ho} B^{\sigma}$$

$$\therefore \Lambda_{
ho\sigma}^{
ho\prime\sigma'} = rac{\partial x^{
ho\prime}}{\partial x^{
ho}} rac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}}$$

Representações de Dimensão Infinita

- Representações de Campo:
 - Considerando um campo dependente de coordenadas do espaço-tempo
 - Se transforma pelo grupo de Lorentz da forma:

$$\Phi_a \, o \, M_a^b(\Lambda) \Phi_b$$

$$\Phi_a(x) \, o M_a^b(\Lambda) \Phi_big(\Lambda^{-1} xig); \;\; M \, = \; \expigg(rac{-i\omega_{\mu
u}J^{\mu
u}}{2}igg) \, .$$

Representações de Dimensão Infinita

• Representações de Campo:

$$\therefore \; \exp\left(rac{-i\omega_{\mu
u}L^{\mu
u}}{2}
ight)\Phi(x) \, = \, \Phi\left(\Lambda^{-1}x
ight)$$

 $\iff \mathcal{L}^{\mu\nu} \Phi(x) = i(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\Phi(x)$

Considerando então uma transformação infinitesimal com termos de ordem superior desconsideraveis

$$igg(1-rac{i}{2}\omega_{\mu
u}L^{\mu
u}igg)\Phi(x) \,=\, \Phi((1-\omega)x) \iff L^{\mu
u}\Phi(x) \,=\, -rac{2i[\Phi(x)\,-\,\Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu
u}}$$

$$\mathcal{L}^{\mu
u} = rac{1}{2}(L^{\mu
u}-L^{
u\mu}) \iff \mathcal{L}^{\mu
u} \Phi(x) = rac{1}{2}igg[-rac{2i[\Phi(x)-\Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu
u}} + -rac{2i[\Phi(x)-\Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{
u\mu}}igg] \iff \mathcal{L}^{\mu
u} \Phi(x) = -rac{i[\Phi(x)-\Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu
u}x^{
u}}x^{
u} + -rac{i[\Phi(x)-\Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{
u\mu}x^{
u}}x^{
u}$$

Representações de Dimensão Infinita

Representações de Campo:

$$\Phi(x) \,
ightarrow \, \exp\left(rac{-i\omega_{\mu
u}J^{\mu
u}}{2}
ight) \exp\left(rac{-i\omega_{\mu
u}\mathcal{L}^{\mu
u}}{2}
ight) \Phi(x)$$

"A ciência é feita de fatos, assim como uma casa é feita de tijolos, mas um amontoado de fatos não é ciência, assim como um amontoado de tijolos não é uma casa." - Henri Poincaré.

