Europaskolan Strängnäs

Gymnasiearbete

Dubbelpendeln och kaosteori

Oscar Landberg
KFSCI23b

Handledare:
Erik Waltersson

Första utkast inlämnad: 2025-11-03

Sammanfattning

Here is my abstract.

Innehåll

Inledning

1.1 Bakgrund

Pendeln är något som alltid har fascinerat mänskligheten genom tiderna. Redan under det första århundradet lyckades de gamla kineserna att utveckla en seismograf med hjälp av pendeln, vars funktion funktion var att aktivera ett säkerhetssystem vid jordbävningar [1]. Inte minst används också pendlar än idag; Mora-klockors tidhållning bygger på en svängande pendel, medan den klassiska metronomens tickande styrs av en inverterad variant. Det är därmed tydligt hur pendeln än idag är relevant.

På så sätt är det inte konstigt varför studiet av pendlar har länge vart en central del av fysikundervisningen, inte minst på gymnasiet. De flesta före detta (naturvetenskapliga) gymnasieelever känner säkert igen att de flesta enkla pendlarna kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, och att formeln för en pendels svängningstid är $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Tyvärr så ingår det ingen riktig fördjupning för pendlar inom gymnasiestudierna[1], och mycket av det som lärdes ut om pendlar gäller bara om startvinkeln θ är relativt liten. Det är bara när detta villkor är uppfyllt som pendlar kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, inte minst gäller detta även för svängningstidsformeln ovan.

På så vis kan en vanlig ”enkel” pendel bli rätt så komplicerad, långt utanför gymnasiefysikens gränser. Däremot finns det många fler sätt att vidareutveckla problemet, bland annat går det att skapa en så kallad *dubbelpendel* genom att koppla två enkla pendlar ihop. Det visar sig att dubbelpendeln kan väldigt enkelt visa kaotiska beteenden och bli väldigt svår att förutspå rörelsen vid, givet att startvärderna inte är helt matematiskt exakta. Därmed demonstrerar en dubbelpendel inte minst klassisk dynamik, men det är också en tydlig tillämpning på kaosteori.

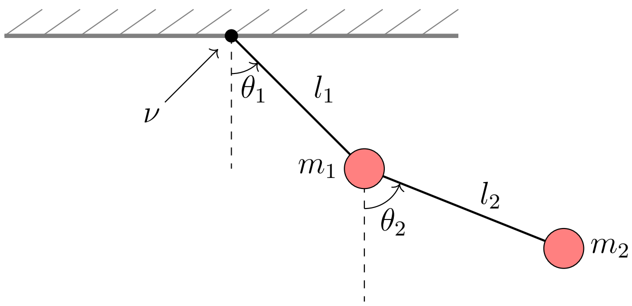
[1] Det går även att argumentera för motsatsen, det kanske är bättre att lämna det åt universitetsstudenter att lära sig...

1.2 Teoretisk genomgång

1.2.1 Dubbelpendeln

Om två vanliga enkla pendlar är sammankopplade sägs de bilda en dubbelpendel, se figur 1.1. Den första pendeln består av en masslös pinne med längden l_1 som sitter i en friktionslös vridpunkt. Vid änden av pinnen sitter även en punktformig massa m_1. Därefter kopplas en till masslös pinne med längden l_2 på m_1 så att pinnen kan rotera friktionsfritt. Dessutom finns en till punktformig massa m_2 tillkopplad på änden av pinnen med längden l_2. Eftersom pinnarna är masslösa och all friktion kan försummas, kan denna uppställning av en dubbelpendel beskrivas som en matematisk dubbelpendel. Låt vinklarna θ_1, θ_2 vara vinklarna normalen taket och pinnarna till för respektive enkel pendel. Den resulterande accelerationen på massorna m_1, m_2 är tyngdaccelerationen g.

Eftersom pinnarna är masslösa, massorna m_1, m_2 är punktformiga och all friktion försummas, sägs dubbelpendeln vara matematisk. Därmed kommer energin i hela system bevaras.



Figur 1.1: Schematisk figur över en matematisk dubbelpendel.

1.2.2 Lagrange-mekanik

Litteraturförteckning

[1] W. Scott Morton och Charlton M. Lewis. *China: Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2005, s. 70.