



EUROPASKOLAN STRÄNGNÄS

GYMNASIEARBETE

Dubbelpendeln och kaosteori

*Oscar Landberg
KFSCI23b*

Handledare:

Erik Waltersson

Första utkast inlämnad: 2026-02-08

Abstract

Here is my Triangle.

Innehåll

Inledning	1
1.1 Introduktion och bakgrund	1
1.2 Syfte och frågeställning	2
Teoretisk bakgrund	3
2.1 Lagrange-mekanik	3
2.1.1 Principen om minsta verkan	3
2.2 Dubbelpendeln	4
2.2.1 Härledning av dubbelpendels rörelseekvationer	4
2.3 Teori inför numerisk simulering	7
2.3.1 Eulers stegmetod	7
2.3.2 Runge-Kuttametoden (RK4-metoden)	8
Metod/Numerisk simulering	10
3.1 Behandling av rörelseekvationerna för simulering	10
3.2 Numerisk simulering	11
Resultat	13
Diskussion	20
Litteraturförteckning	21
Appendix	I

A - Härledning av Euler-Lagrange ekvationen (2.3)	I
B - Kod för simulering av dubbelpendeln	I

Inledning

1.1 Introduktion och bakgrund

Pendeln är något som alltid har fascinerat mänskligheten genom tiderna. Redan under det första århundradet lyckades de gamla kineserna att utveckla en seismograf med hjälp av pendeln, vars funktion var att aktivera ett säkerhetssystem vid jordbävningar [1]. Inte minst används också pendlar än idag; Mora-klockors tidshållning bygger på en svängande pendel, medan den klassiska metronomens tickande styrs av en inverterad variant. Det är därmed tydligt hur pendeln är relevant än idag.

Det är därför inte förvånande att pendeln länge har varit en central del av fysikundervisningen, inte minst på gymnasiet. De flesta före detta naturvetenskapliga gymnasieelever känner säkert igen att majoriteten av de enkla pendlarna kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, och att formeln för en pendels svängningstid är $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

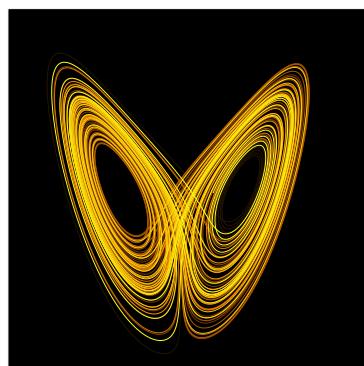
Tyvärr så ingår det ingen större fördjupning för pendlar inom gymnasiestudierna¹, och mycket av det som lärs ut om pendlar gäller bara om begynnelsevinkeln θ är relativt liten. Det är bara när detta villkor är uppfyllt som pendlar kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, inte minst gäller detta även för svängningstidsformeln ovan.

På så vis kan en till synes ”enkel” pendel bli förhållandevise komplicerad, långt utanför gymnasiefysikens gränser. Det finns dock flera olika sätt att vidareutveckla problemet, bland annat går det att skapa en så kallad *dubbelpendel* genom att koppla två enkla pendlar ihop. Mycket forskning har redan skett på dubbelpendeln, och idag används dubbelpendeln ofta som klassiskt exempel inom *kaosteorin* (CITE).

Kaosteori är nämligen det tvärvetenskapliga området inom fysiken och matematiken som studerar deterministiska system vars långsiktiga beteende blir praktiskt oförutsägbara (CITE). En av de tidiga pionjärerna inom kaosteori var metrologen Edward Lorenz, som år 1961 försökte simulera väderprognoser tillsammans med Ellen Fetter och Margaret Hamilton. Det var här som Lorenz och hans kollegor upptäckte att minimala skillnader i begynnelsevillkoren för simuleringen orsakade

¹Det går även att argumentera för motsatsen, det kanske är bättre att lämna det åt universitetsstudenter...

drastiskt olika väderprognoser. Lorenz, som blev väldigt fascinerat av atmosfärens kaotiska system, bestämde sig för att förenkla hans modeller till ett system av tre linjära ordinära differentialekvationer. Lösningen till detta system är vad som grafiskt brukas kallas ”Lorenz-atraktorn”, se figur 1.1. Lorenz lyckades visa att denna atraktor kommer alltid att divergera och att lösningarna till ekvationssystemet aldrig kommer att återupprepa sig. Dessutom, det som Lorenz blev mest känd för, var självaste formen av en fjäril i atraktorn. Detta, tillsammans med titeln på ett av hans tal² från 1972, är ursprunget till det populärvetenskapliga uttrycket ”fjärilseffekten” – att fladdrandet av en fjärils vinge i Brasilien kan orsaka en tromb i Texas³.



Figur 1.1: Exempel på en Lorenz-atraktor. Notera utseendet av en fjäril. Bildkälla: *Lorenz system simulation*. Bild av Wikimol, 2005, Wikimedia Commons.

Även om en dubbelpendlar kanske inte orsakar tromber i Texas, gäller principen om fjärilseffekten och kaos fortfarande: dubbelpendlar är extremt känsliga för sina begynnelsevillkor. Många experiment har gjorts på dubbelpendlar, och ofta betraktas dubbelpendeln som en introduktion till kaotiska system. Däremot går det att analysera dubbelpendeln vidare, och frågan kvarstår om går det att hitta något mönster i dess kaotiska natur.

1.2 Syfte och frågeställning

Syftet med detta arbete är därmed att undersöka dubbelpendelns kaotiska egenskaper. Genom att härleda dubbelpendelns rörelseekvationer med Lagrange-mekanik, kommer vi numeriskt simulera en dubbelpendel genom Eulers-stegmetod och Runge-Kuttametoden av fjärde ordningen, och sedan dra analyser utifrån dess egenskaper. Därmed har gymnasiearbetet gått ut på att besvara frågeställningarna: ’Hur och vad är den bästa metoden för att simulera en dubbelpendel?’, samt ’Vilka slutsatser går det att dra utifrån dubbelpendelns kaotiska egenskaper?’.

²Ursprungstitel på engelska ’Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?’. Talet hölls inför det 139:de årsmötet av American Association for the Advancement of Science (AAAS) [2].

³För vidare läsning om Lorenz attraktorn, se [2, 3].

Teoretisk bakgrund

2.1 Lagrange-mekanik

För att lösa mer komplexa problem, som exempelvis en beskrivning dubbelpendeln, är det oftare lättare att använda Lagrange-mekanik för att beskriva dess rörelse. Även om det är teoretiskt sätt möjligt att beskriva en dubbelpendels rörelse med klassisk newtonsk mekanik, kan det fort bli mödosamt och onödigt krångligt. Lagrange-mekanik är egentligen bara en annan matematisk metod för att beskriva omvärlden, vilket i en viss typ av problem, blir betydligt lättare att lösa.

2.1.1 Principen om minsta verkan

Lagrange-mekanik bygger sin grund på *principen om minsta verkan*, eller ibland även kallad *principen om stationär verkan* [4]. Denna princip säger att ett objekt kommer alltid att sträva efter att färdas den väg som minimerar den fysikaliska *verkan* [4, s.2]. Givet att vi har ett objekt Q som rör sig längs $x(t)$, där Q har startpunkten $x(t_1)$ och slutpunkten $x(t_2)$, samt att $T(t)$ och $V(t)$ är objektets rörelse respektive kinetiska energi, definieras verkan S inom tidsintervallet $t_1 \leq t \leq t_2$ som [4, s.10]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - V(t)) dt. \quad (2.1)$$

Denna storhet har enheten [Js] och har dimensionerna (Energi \times Tid) [5, s.221]. Själva differensen $T(t) - V(t)$ visar sig vara så relevant inom fysiken, att den har fått namnet 'the Lagrangian' och brukar betecknas \mathcal{L} [5, s.218], det vill säga:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.2)$$

Principen om minsta verkan säger att fysikens lagar alltid kommer att sträva efter att förminka ekvation (2.1)¹. Detta är så fysikaliskt grundläggande, att nästan all fysik kan härledas ur detta grundläggande antagande [4].²

¹Egentligen, rent matematiskt, strävar verkan S att hitta ett stationärt värde av S , det vill säga en lokal extrem- eller terrasspunkt till grafen av S . Detta är anledningen varför principen även kallas för *principen om stationär verkan* [5, s.222].

²Men varför vill naturen alltid förminka S ? Problemet med att besvara denna fråga är att svaret innefattar kvantmekanik, vilket ligger utanför denna rapportsyfte/omfattning. För en enklare förklaring om varför principen om minsta verkan, se [5, s. 225].

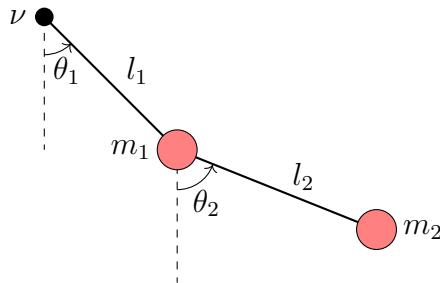
För att bestämma ett objekts väg som minimerar verkan S används *Euler-Lagrange ekvationen* [5, s. 222], se ekvation (2.3). I ekvation (2.3) är $i = 1, 2, 3, \dots$, och normalt sätt betecknar de olika koordinataxlar, eller i detta fall olika vinklar. Härledning av (2.3) ges i appendix A.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.3)$$

2.2 Dubbelpendeln

Om två vanliga enkla pendlar är sammankopplade sägs de bilda en dubbelpendel, se figur 2.1. Den första pendeln består av en punktformig massa m_1 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_1 , vilket sitter i en friktionslös rotationspunkt ν . Den andra pendeln består också av en punktformig massa m_2 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_2 . Denna andra pendeln har sin friktionslösa rotationspunkt tillkopplad i m_1 . Den enda kraften som verkar på respektive massa är tyngdkraften och alla annan friktion från t.ex luftmotstånd försummas.

Låt vinklarna θ_1, θ_2 vara vinklarna mellan den lodräta linjen från rotationspunkten och den faktiska positionen av pendeln, se figur 2.1. Vinklarna θ_1 och θ_2 är inte begränsade mellan $-\pi \leq \theta_{1,2} \leq \pi$, dvs de kan rotera fritt hur många varv som helst runt rotationspunkterna. Det antas även här att varje pendel inte kan kollidera med varandra.



Figur 2.1: Schematisk figur över en matematisk dubbelpendel.

2.2.1 Härledning av dubbelpendels rörelseekvationer

Härledningen utgår från figur 2.1, där dubbelpendeln ritats in i ett koordinatsystem där origo utgår från vrädpunkten ν . De punktformiga massorna m_1 och m_2 har koordinaterna (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2) .

Vi kan beskriva punkterna x_1 , x_2 , y_1 och y_2 genom trigonometriska samband enligt:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (2.4)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (2.5)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2.6)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (2.7)$$

Eftersom tidsderivatan av position är hastighet, kan vi få hastigheterna \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , \dot{x}_2 och \dot{y}_2 enligt:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \quad (2.8)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.10)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2. \quad (2.11)$$

Vi kan därmed definiera dubbelpendelns potentiella energi V som summan av den potentiella energin för respektive massa. Detta ger:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$$(2.5), (2.7) \Rightarrow V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \quad (2.12)$$

Vi kan också bestämma dubbelpendelns kinetiska energi T enligt:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$(2.8) - (2.11) \Rightarrow = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \right.$$

$$+ 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1$$

$$\left. + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 \right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \right.$$

$$\left. + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right).$$

Eftersom $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ och $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ (trigonometriska ettan respektive subtraktionsformeln för cosinus) kan vi förenkla uttrycket till:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right). \quad (2.13)$$

Nu när vi har uttryckt V och T som funktioner av θ_1 och θ_2 , kan vi beräkna \mathcal{L} . Enligt (2.2), (2.12) och (2.13) får vi att:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad - (-(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2) \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Tillämpning av Euler-Lagrange ekvationen

Vi ska nu använda ekvation (2.14) i Euler-Lagrange ekvationen (2.3) för att lösa ut ekvationen som beskriver vinklarna θ_1 och θ_2 i dubbelpendeln. Vi beräknar för fallet för $q_i = \theta_1$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}$ och $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right)$ ger:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1}$ ger:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1.\tag{2.16}$$

Insättning av (2.15) och (2.16) i (2.3) ger:

$$\begin{aligned}0 &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \Leftrightarrow 0 &= (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)g\sin\theta_1.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Därmed är (2.17) ekvationen som beskriver vinkeln θ_1 i dubbelpendeln. Nu ska Euler-Lagrange ekvationen (2.3) lösas fast för $q_i = \theta_2$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}$ och $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right)$ ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}$ ger:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2. \quad (2.19)$$

Insättning av (2.18) och (2.19) i (2.3) ger:

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \Leftrightarrow 0 &= m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Detta innebär att (2.20) är den ekvation som beskriver vinkeln θ_2 i dubbelpendeln. Därmed har vi nu funnit våra två ekvationer som enligt Euler-Lagrange ekvationen (2.3) beskriver dubbelpendelns rörelse, se ekvationssystemet (2.21):

$$\begin{cases} 0 &= (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1. \\ 0 &= m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{cases} \quad (2.21)$$

2.3 Teori inför numerisk simulering

Differentialekvationerna i (2.21) är icke-linjära och av andra ordningen, vilket gör de omöjligt att lösa rent analytiskt. Därmed måste ekvationerna lösas numeriskt. Detta arbete berör två typer av numeriska lösningsmetoder för differentialekvationer: *Eulers stegmetod* och *Runge-Kuttametoden* av fjärde ordningen.

2.3.1 Eulers stegmetod

Eulers stegmetod är den enklaste explicita metoden för att bestämma lösningar till differentialekvationer med begynnelsevillkor. Metoden grundar sig i att dela in en differentialekvationen i flera tidsintervall h . Eftersom Eulers stegmetod är en metod av första ordningen, innebär det att felet vid varje tidsteg är proportionell mot kvadraten av tidssteget h .

Definition av Eulers stegmetod

Givet en differentialekvation på formen $y' = f(t, y)$ med det kända begynnelsevillkoret $y(t_0)$ och det tidssteget $h > 0$, definieras nästa värde y_{n+1} enligt:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \cdot h \quad (2.22)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (2.23)$$

Alternativt, om vi har ett system av ordinära differentialekvationer av grad n , kan vi definiera en tillståndsvektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]$ som beskriver ett systems rörelse, där begynnelsevillkoret \mathbf{Y}_0 även är känt. Låt även $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ vara en vektor med funktioner som beskriver systemets rörelseförändring, det vill säga $\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y})$. Då kan Eulers stegmetod definieras enligt:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \mathbf{f}(t_n, \mathbf{Y}_n) \cdot h \quad (2.24)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (2.25)$$

2.3.2 Runge-Kuttametoden (RK4-metoden)

Runge-Kuttametoden av fjärde ordningen³ är annan vanlig metod för att lösa differentialekvationer, dock till bättre precision än exempelvis Eulers stegmetod. Metoden bygger på att approximera lösningen stegvis med ett litet tidssteg h , men istället för att bara beräkna nuvarande lutningen (det som sker i Eulers stegmetod), så beräknas flera mellanliggande lutningar, där ett viktad medelvärde istället dras. Konsekvensen blir att felmarginalen blir betydligt mindre hos RK4-metoden än hos Eulers stegmetod.

Definitionen av RK4-metoden

Givet en differentialekvation på formen $y' = f(t, y)$ med det kända begynnelsevillkoret $y_0(t_0)$ och tidssteget $h > 0$, definieras nästa y_{n+1} enligt:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n}) \quad (2.26)$$

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad (2.27)$$

³Egentligen är Runge-Kuttametoderna en familj av metoder, då den innefattar ett flertal olika metoder, bland annat Eulers stegmetod. Däremot brukas RK4-metoden menas med benämningen ”Runge-Kuttametoden”, vilket är den som användes här. För vidare förklaring, se [6].

där k_{1n} , k_{2n} , k_{3n} och k_{4n} definieras som:

$$k_{1n} = f(t, y_n) \quad (2.28)$$

$$k_{2n} = f\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{1n}\right) \quad (2.29)$$

$$k_{3n} = f\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{2n}\right) \quad (2.30)$$

$$k_{4n} = f(t + h, y_n + hk_{3n}). \quad (2.31)$$

Alternativt, om vi har ett system av ordniära differentialekvationer av grad n , kan vi definiera en tillstånds vektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]$ som beskriver ett systems rörelse, där begynnelsevillkoret \mathbf{Y}_0 även är känt. Låt även $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ vara en vektor med funktioner som beskriver systemets rörelseförändring, det vill säga $\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y})$. Då kan RK4-metoden definieras enligt:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{6} (\mathbf{K}_{1n} + 2\mathbf{K}_{2n} + 2\mathbf{K}_{3n} + \mathbf{K}_{4n}) \quad (2.32)$$

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad (2.33)$$

där \mathbf{K}_{1n} , \mathbf{K}_{2n} , \mathbf{K}_{3n} och \mathbf{K}_{4n} definieras som:

$$\mathbf{K}_{1n} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}_n) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{K}_{2n} = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_{1n}\right) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{K}_{3n} = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_{2n}\right) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K}_{4n} = \mathbf{f}(t + h, \mathbf{Y}_n + h\mathbf{K}_{3n}). \quad (2.37)$$

Numerisk simulerings och metod

3.1 Behandling av rörelseekvationerna för simulerings

Som visades i sektion 2.2.1, ekvation (2.21), har rörelseekvationerna för dubbelpendeln härletts med hjälp av Lagrange-mekanik. Dessa är:

$$\begin{cases} 0 = (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1. \\ 0 = m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

För att däremot kunna använda (3.1) med Runge-Kuttametoden, måste de skrivas om till ordinära differentialekvationer på formen $y' = f(t, y)$. Därför genomfördes substitutionen $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ och $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, vilket gav:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ 0 = (m_1 + m_2) l_1 \dot{\omega}_1 + m_2 l_2 \dot{\omega}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 \\ 0 = m_2 l_2 \dot{\omega}_2 + m_2 l_1 \dot{\omega}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Däremot är fortfarande tredje och fjärde ekvationerna i (3.2) sammankopplade (på engelska, 'coupled'). För att kunna använda (3.2) i Runge-kuttametoden gjordes följande substitution enligt (3.3).

$$\begin{cases} \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \\ \alpha = (m_1 + m_2) l_1 \\ \beta = m_2 l_2 \cos(\Delta\theta) \\ \gamma = m_2 l_1 \cos(\Delta\theta) \\ \delta = m_2 l_2 \\ \epsilon = -m_2 l_2 \omega_2^2 \sin(\Delta\theta) - (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 \\ \zeta = m_2 l_2 \omega_1^2 \sin(\Delta\theta) - m_2 g \sin \theta_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Det går nu skriva om ekvationssystemet (3.2) med hjälp av substitutionerna i (3.3) enligt:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ 0 = \alpha\dot{\omega}_1 + \beta\dot{\omega}_2 - \epsilon \\ 0 = \delta\dot{\omega}_2 + \gamma\dot{\omega}_1 - \zeta. \end{cases} \quad (3.4)$$

Därmed kan nu tredje och fjärde ekvationerna i (3.4) skrivas om som ett system av ekvationer i matrisform enligt:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \zeta \end{pmatrix}^1 \quad (3.5)$$

Multiplikation med inversen av $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ i (3.5) ger:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \zeta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \zeta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta\epsilon - \beta\zeta \\ -\gamma\epsilon + \alpha\zeta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\delta\epsilon - \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \frac{\alpha\zeta - \gamma\epsilon}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Det går därmed att avläsa från (3.6) nya, icke-sammankopplade uttryck för $\dot{\omega}_1$ och $\dot{\omega}_2$, vilket ger ett ekvationssystemet (3.7) som beskriver dubbelpendelns rörelse i ordinära, icke-sammankopplade differentialekvationer.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{\delta\epsilon - \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{\alpha\zeta - \gamma\epsilon}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Numerisk simulerings

För att utnyttja Runge-kuttametoden definierades en tillståndsvektor $\mathbf{X} = [\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2]$, vilket därmed ger att $\dot{\mathbf{X}} = [\omega_1, \dot{\omega}_1, \omega_2, \dot{\omega}_2]$. Ett program skrevs sedan i Python med hjälp av dessa tillståndsvektorer, först med Eulers-stegmetod, sedan med Runge-Kuttametoden, för att simulera en dubbelpendel. Dessa jämfördes för att demonstrera effektiviteten av respektive metod.

¹Detta eftersom matrismultiplikation ger att $\alpha\dot{\omega}_1 + \beta\dot{\omega}_2 = \epsilon$ och $\gamma\dot{\omega}_1 + \delta\dot{\omega}_2 = \zeta$, vilket är de ursprungliga ekvationerna.

Sedan skrevs kod där två pendlar simulerades med RK4-metoden, där den andra pendelns hade 0.00001% större begynnelsevinklar relativt den första pendeln. Detta genomfördes för tre huvudsakliga energitillstånd² under 30 sekunder genom att starta vinklarna med vinklarna enligt tabell (TODO).

Därefter plottades vinklarna θ_1 och θ_2 parametriskt mot varandra enligt startvinklarna i tabell (TODO). Dessutom plottades vinklarna tillsammans mot varandra som funktion av tiden enligt samma värden i tabell (TODO).

Sedan simulerades en dubbelpendel med RK4-metoden under 30 sekunder enligt startvinklarna i tabell (TODO), där vinklarna θ_1 och θ_2 plottades parametriskt mot varandra. Dessutom plottades även samma vinklar tillsammans som funktion av tiden, enligt samma begynnelsevinklar i tabell (TODO).

För alla pendlar antogs att pendlarna släpptes från vila, det vill säga att ω_1 och $\omega_2 = 0$ vid $t = 0$ s. Dessutom antogs att båda massorna $m_1, m_2 = 1$ kg, längderna $l_1, l_2 = 1$ m, samt att $g = 9.82$ m/s². All simuleringskod som skrevs sammanställdes i appendix B.

θ_1	θ_2	'Energinivå'
0.5	0.5	Låg
2.5	2.5	Hög

Tabell 3.1: Tre begynnelsevinklar för θ_1 och θ_2 , där θ_1 och θ_2 motsvarar vinklarna i figur 2.1. Vinklarna har även angetts med respektive 'energinivå', det vill säga pendelns ungefärliga mängd potentiella energi som de hade vid startläget.

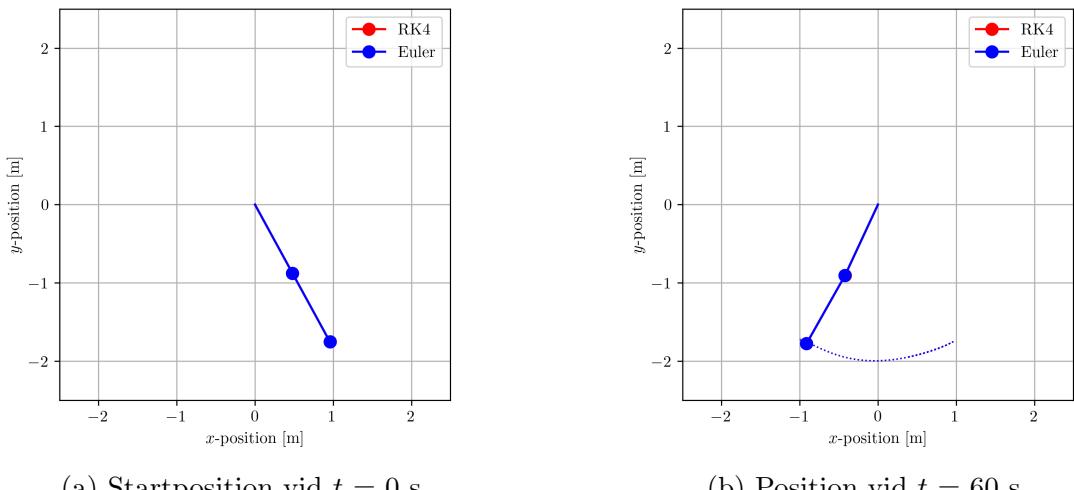
θ_1	θ_2
0.5	0.5
1.6	1.6
2.5	2.5
-0.5	0.3
2.119	1.623
2.899	1.913
2.9	3.1
-1.5	1.0

Tabell 3.2: Flera olika begynnelsevinklar för θ_1 och θ_2 , där θ_1 och θ_2 motsvarar vinklarna i figur 2.1.

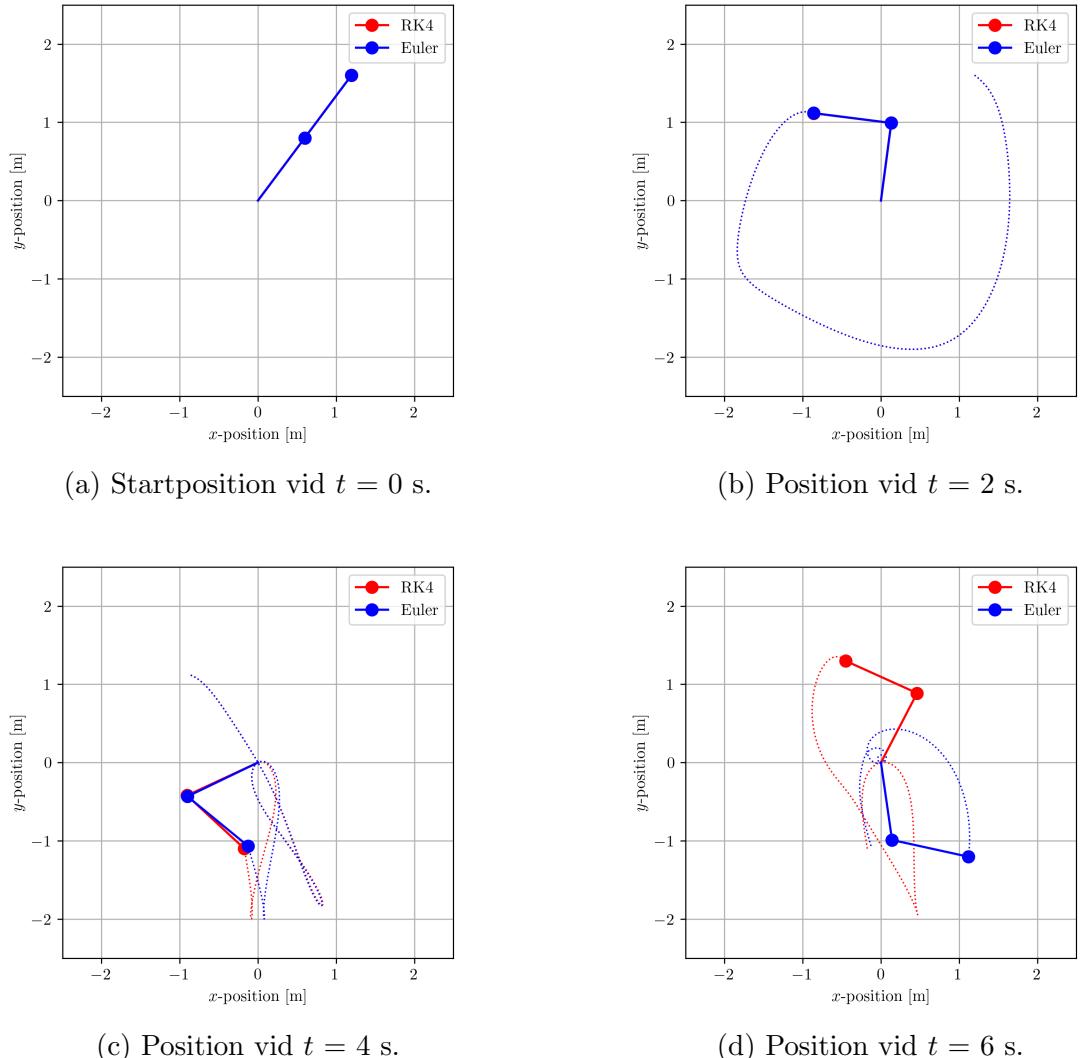
²Det vill säga att de startades med olika vinklar, sådan att de får olika mängd potentiell energi. Ju större startvinklar, desto större blir potentiella energin i systemet

Resultat

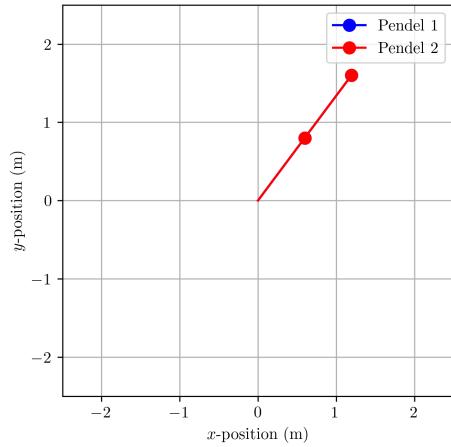
Resultatet av simuleringarna som beskrevs i sektion 3.2 redovisades i figurerna nedan. Första simuleringen, där Eulers-stegmetod och Runge-Kuttametoden jämfördes, redovisades i figur (TODO). Simuleringen där två pendlar simulerades med RK4-metoden, där den andra pendeln hade 0.001% större begynnelsevinklar, redovisades i figur (TODO). Resultatet från de parametriska plotarna av θ_1 och θ_2 , samt plotarna av vinkelarna θ_1 och θ_2 som funktion av tiden, redovisas i figur (TODO) respektive figur (TODO).



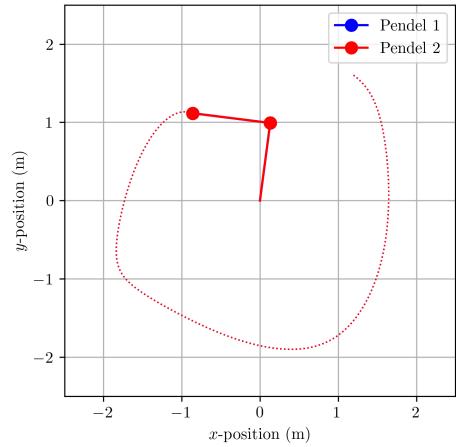
Figur 4.1: Jämförelse mellan Eulers stegmetod och RK4-metoden, den blåa pendeln representerar Eulers stegmetod och den röda pendeln representerar RK4-metoden. Båda pendlarna hade startvinkelarna $\theta_1 = 0.5$ rad och $\theta_2 = 0.5$ rad, enligt tabell 3.1. Eftersom metoderna aldrig divergerar märkbart går det inte att se den röda pendeln. Steglängden för båda metoderna var 0.00005 s. Streckade linjerna motsvarar färdvägen av pendeln de senaste två sekunderna



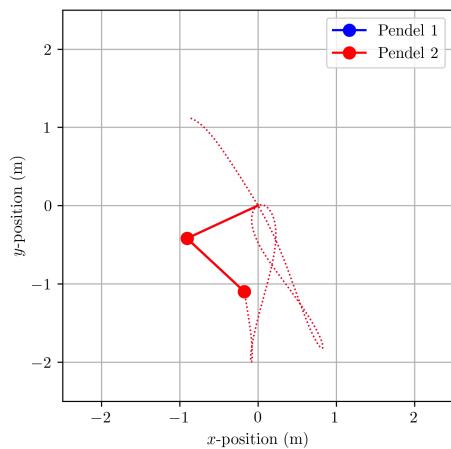
Figur 4.2: Jämförelse mellan Eulers stegmetod och RK4-metoden, där den blåa pendeln representerar Eulers stegmetod och den röda pendeln representerar RK4-metoden. Båda pendlarna hade startvinkelarna $\theta_1 = 2.5$ rad och $\theta_2 = 2.5$ rad enligt tabell 3.1. Vid simuleringen hade båda metoderna steglängden 0.00005 s. De streckade linjerna representerar färdvägen för pendeln under de senaste 2 sekunderna.



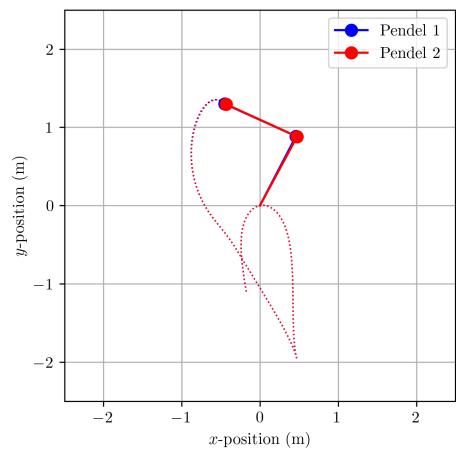
(a) Startposition vid $t = 0$ s.



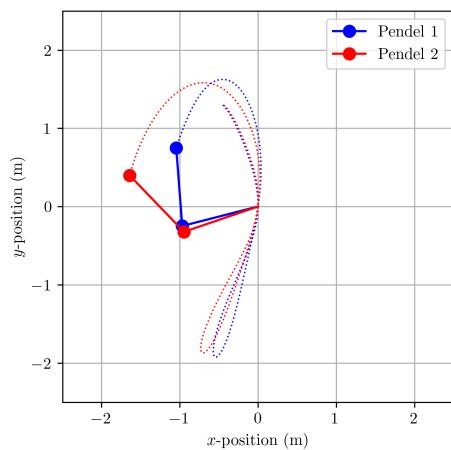
(b) Position vid $t = 2$ s.



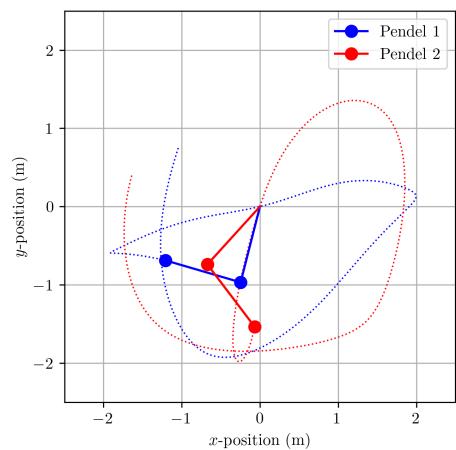
(c) Position vid $t = 4$ s.



(d) Position vid $t = 6$ s.

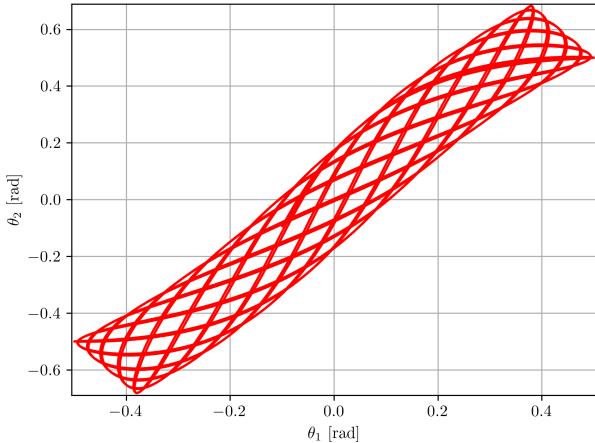


(e) Position vid $t = 8$ s.

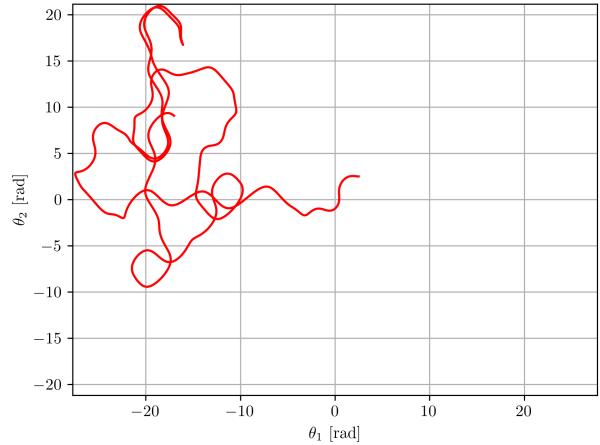


(f) Position vid $t = 10$ s.

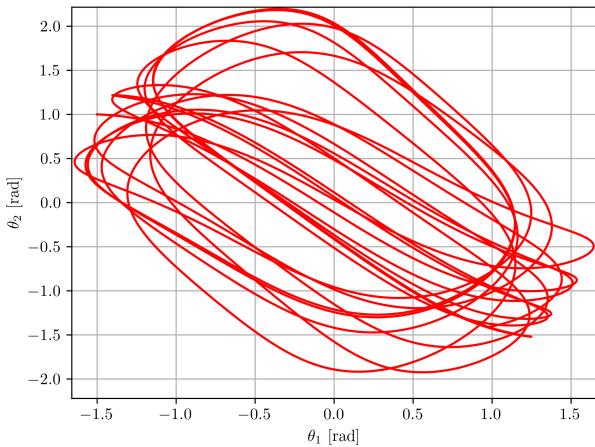
Figur 4.3: Simulering av två pendlar med RK4-metoden. För den första pendeln (blåa) var begynnelsevinklarna $\theta_1 = 2.5$ rad och $\dot{\theta}_1 = 0$, medan för den andra pendeln (röda) var begynnelsevinklarna 0.00001% större relativt den första pendeln. De streckade linjerna representerar färdvägen för pendlarna under de senaste 2 sekunderna.



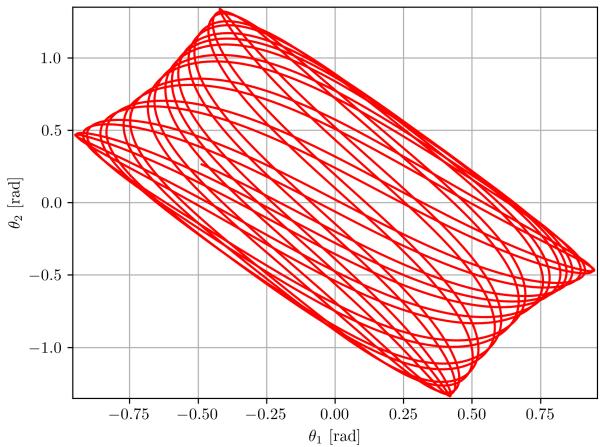
(a) Startvinklar: $\theta_1 = 0.5$ och $\theta_2 = 0.5$ [rad].



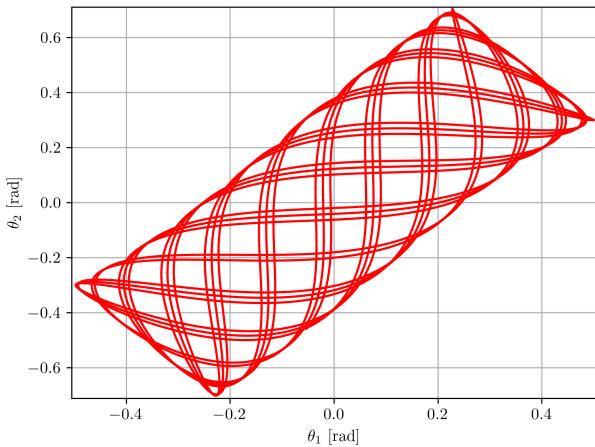
(b) Startvinklar: $\theta_1 = 2.5$ och $\theta_2 = 2.5$ [rad].



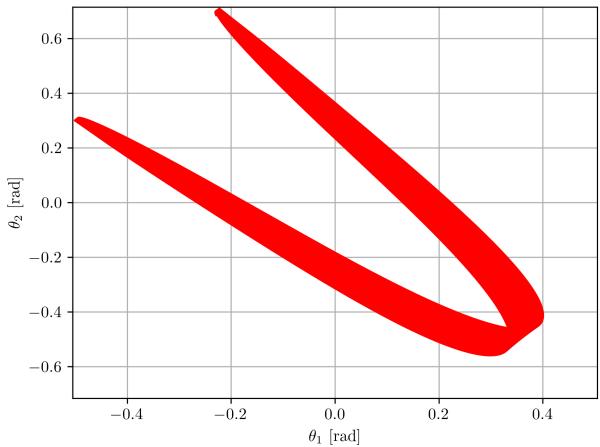
(c) Startvinklar: $\theta_1 = -1.5$ och $\theta_2 = 1.0$ [rad].



(d) Startvinklar: $\theta_1 = 0.42$ och $\theta_2 = -1.337$ [rad].

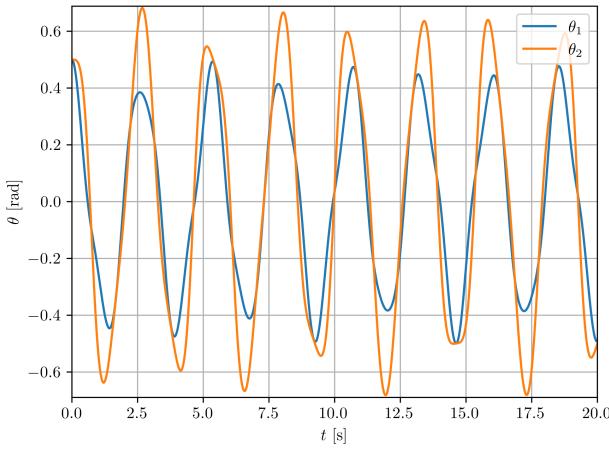


(e) Startvinklar: $\theta_1 = 0.5$ och $\theta_2 = 0.3$ [rad].

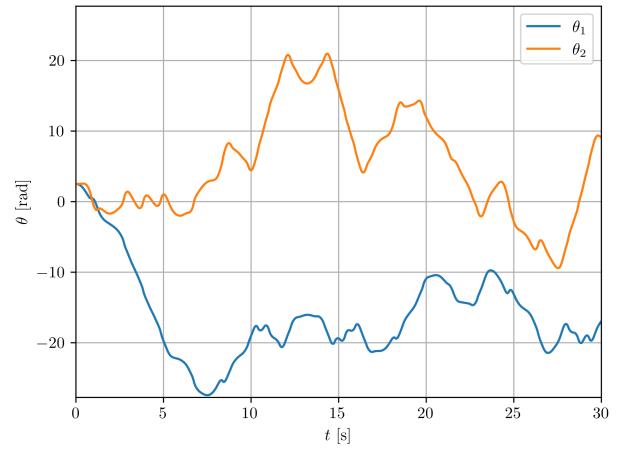


(f) Startvinklar: $\theta_1 = -0.5$ och $\theta_2 = 0.3$ [rad].

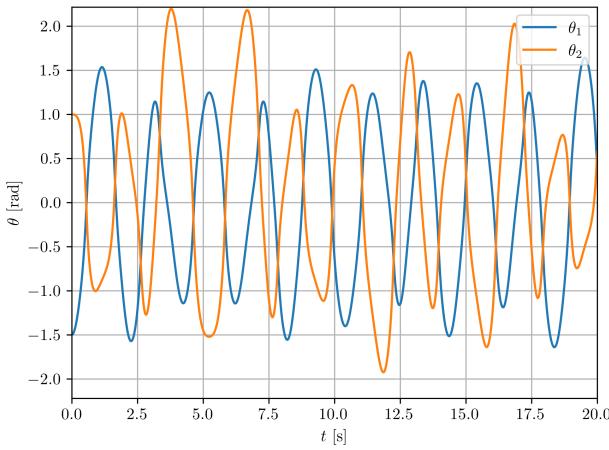
Figur 4.4: Parametrisk plot av vinklarna θ_1 och θ_2 som funktion av tiden för dubbelpendlar som simulerades 30 s med RK4-metoden. Startvinklarna för θ_1 och θ_2 anges i respektive bildtext.



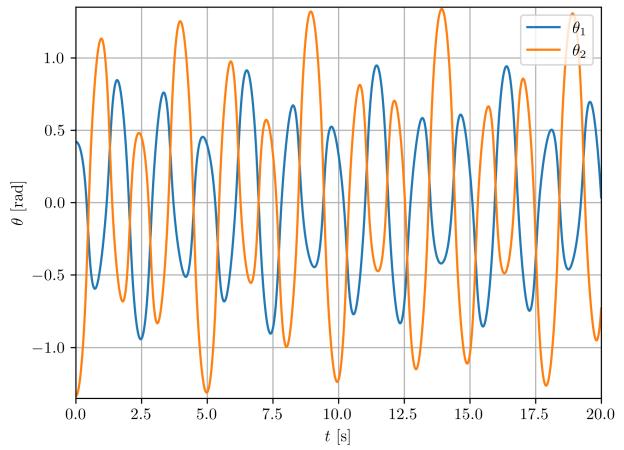
(a) Startvinklar: $\theta_1 = 0.5$ och $\theta_2 = 0.5$ [rad]. Simuleringstid: 20s.



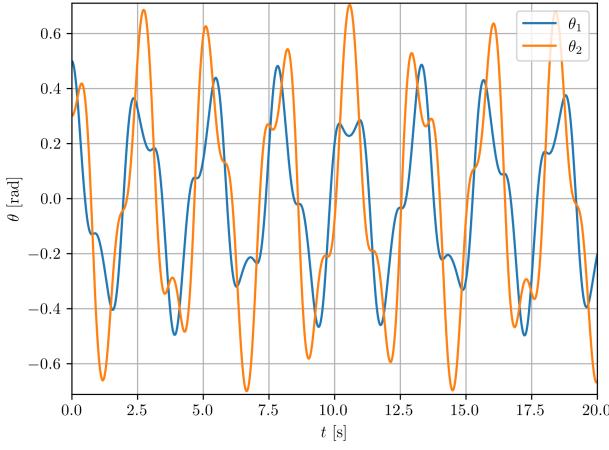
(b) Startvinklar: $\theta_1 = 2.5$ och $\theta_2 = 2.5$ [rad]. Simuleringstid: 30s.



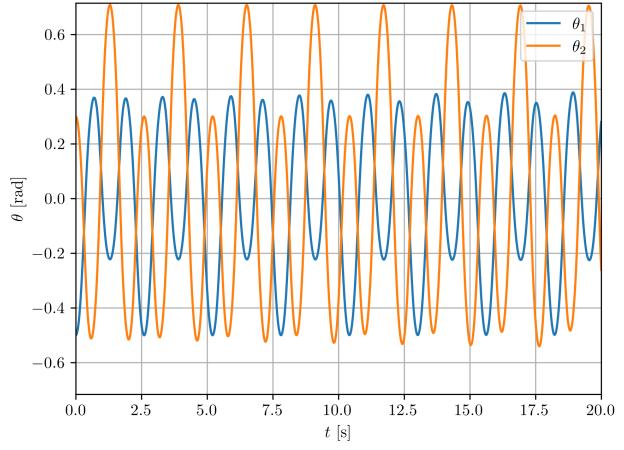
(c) Startvinklar: $\theta_1 = -1.5$ och $\theta_2 = 1.0$ [rad]. Simuleringstid: 20s.



(d) Startvinklar: $\theta_1 = 0.42$ och $\theta_2 = -1.337$ [rad]. Simuleringstid: 20s.

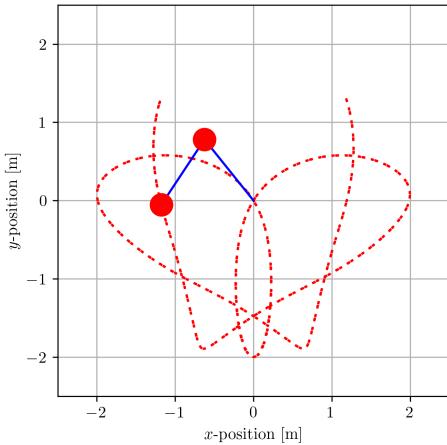


(e) Startvinklar: $\theta_1 = 0.5$ och $\theta_2 = 0.3$ [rad]. Simuleringstid: 20s.

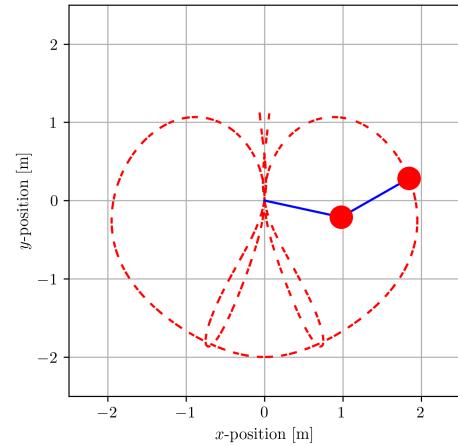


(f) Startvinklar: $\theta_1 = -0.5$ och $\theta_2 = 0.3$ [rad]. Simuleringstid: 20s.

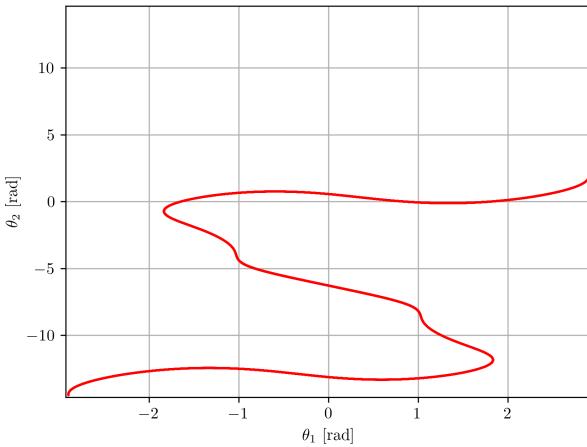
Figur 4.5: Plot av vinklarna θ_1 och θ_2 som funktion av tiden. Alla dubbelpendlar simulerades i 20s, förutom i figur 4.5b, där den simulerades i 30 s. Simuleringen genomfördes med RK4-metoden.



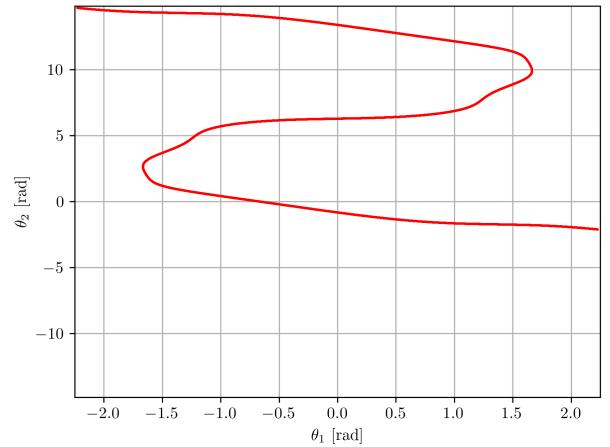
(a) Färdväg för dubbelpendeln. Startvillkor: $\theta_1 = 2.899$, $\theta_2 = 1.913$.



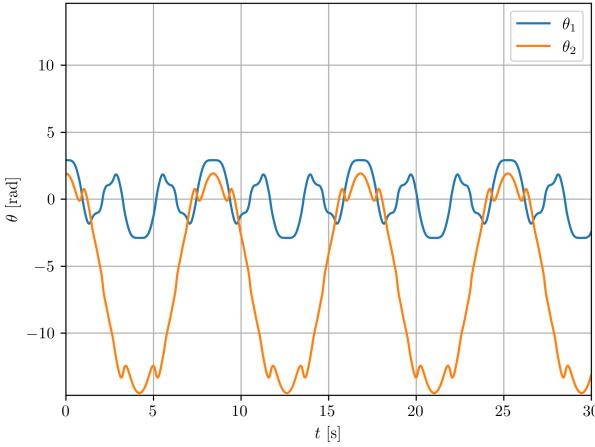
(b) Färdväg för dubbelpendel. Startvillkor: $\theta_1 = 2.226$, $\theta_2 = 4.169$.



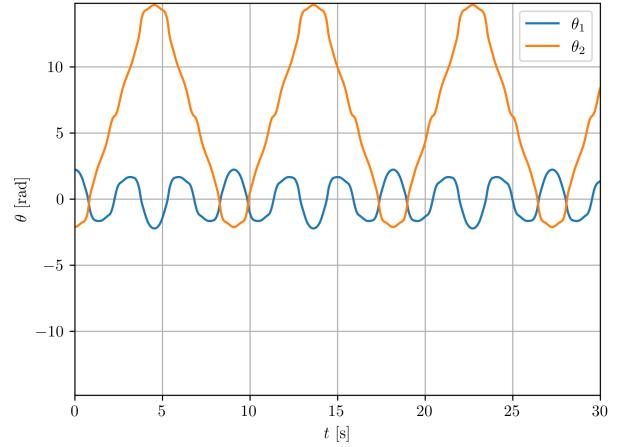
(c) Parametriskt plot under 30 s av θ_1 och θ_2 . Startvillkor: $\theta_1 = 2.899$, $\theta_2 = 1.913$.



(d) Parametriskt plot under 30 s av θ_1 och θ_2 . Startvillkor: $\theta_1 = 2.226$, $\theta_2 = 4.169$.

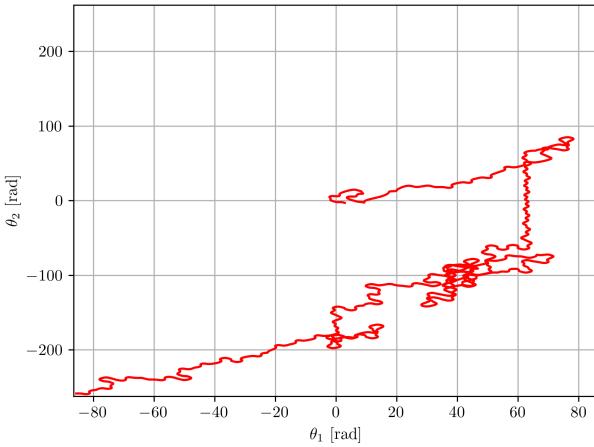


(e) Plot av vinklarna θ_1 (blå) och θ_2 (orange) som funktion av tiden. Startvillkor: $\theta_1 = 2.899$, $\theta_2 = 1.913$.

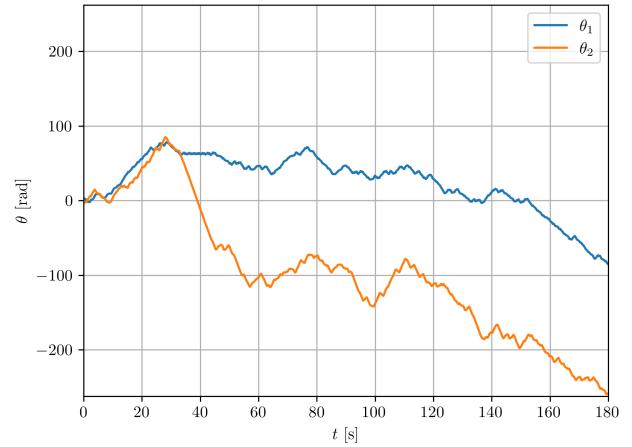


(f) Plot av vinklarna θ_1 (blå) och θ_2 (orange) som funktion av tiden. Startvillkor: $\theta_1 = 2.226$, $\theta_2 = 4.169$.

Figur 4.6: Simulering av pendlar med begynnelsevillkoren $\theta_1 = 2.899$ och $\theta_2 = 1.913$ (figur 4.6a, 4.6c och 4.6e), samt $\theta_1 = 2.226$ och $\theta_2 = -2.114$ (figur 4.6b, 4.6d och 4.6f) [rad]. Figur 4.6a och 4.6b visar den streckade linjen den färdväg som pendeln tagit. Figur 4.6c och 4.6d visar en parametriskt plot för pendlarna. Figur 4.6e och 4.6f visar vinklarna θ_1 och θ_2 som funktion av tiden. Alla simuleringar genomfördes med RK4-metoden.

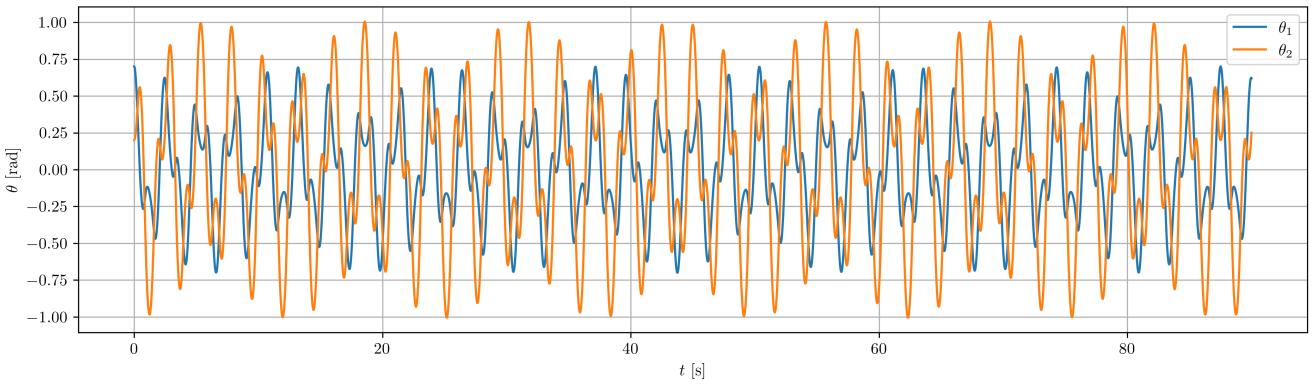


(a) Parametrisk plot för θ_1 och θ_2 under 180 s.
Startvillkor: $\theta_1 = 2.9$, $\theta_2 = -3.1$ [rad].

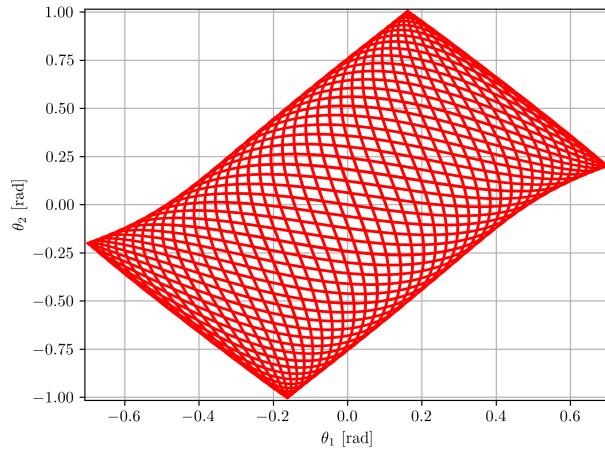


(b) Plot av θ_1 och θ_2 som funktion av tiden, totalt i 180 s. Startvillkor: $\theta_1 = 2.9$, $\theta_2 = -3.1$ [rad].

Figur 4.7: Plot av dubbelpendel med startvillkoren $\theta_1 = 2.9$ och $\theta_2 = -3.1$ [rad]. Simuleringen pågick under 180 s, och genomfördes med RK4-metoden med en steglängd på 0.00005 s.



(a) Plot av θ_1 och θ_2 som funktion av tiden under 90 s.



(b) Parametrisk plot av θ_1 och θ_2 under 180 s.

Figur 4.8: Plot av dubbelpendel med startvillkoren $\theta_1 = 0.7$ och $\theta_2 = 0.2$ [rad]. Simuleringen genomfördes i 180 s, men för figur a plottades bara 90 s för att göra kurvan mer läsbar.

Diskussion

Genom resultatet från simuleringarna av dubbelpendeln går det att besvara frågeställningarna: '*Hur och vad är den bästa metoden för att simulera en dubbelpendel?*', samt '*Vilka slutsatser går det att dra utifrån dubbelpendelns kaotiska egenskaper?*'.

Till en början genomfördes simuleringar för att undersöka vilken numerisk metod, Eulers stegmetod eller RK4-metoden, var bäst för att simulera en dubbelpendel. Detta resultat redovisades i figur 4.1 och 4.2. I båda simuleringarna användes en steglängd på $h = 0.00005$ s. I figur 4.1, där begynnelsevinklarna var relativt små ($\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 0.5$ [rad]), började pendlarna att aldrig märkbart divergera. Detta går att förklara med att pendlarna aldrig började utveckla kaotiska inslag, utan pendeln fortsatte att svänga harmoniskt. Detta, till skillnad från dubbelpendlarna i figur 4.2, där begynnelsevinklarna var relativt stora ($\theta_1 = 2.5$, $\theta_2 = 2.5$ [rad]), så divergerade pendlarna mycket fort. Redan i figur 4.2c, när $t = 4$ s, börjar pendlarna divergera märkbart, och i figur 4.2d har pendlarna helt annorlunda färdvägar.

Litteraturförteckning

- [1] W. Scott Morton och Charlton M. Lewis. *China: Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2005, s. 70.
- [2] The Editors of Encyclopaedia Britannica. *Chaos Theory*. Hämtad 2026-01-18. Encyclopædia Britannica, Inc. 19 dec. 2025. URL: <https://www.britannica.com/science/chaos-theory>.
- [3] Edward N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow”. I: *Journal of the Atmospheric Sciences* (1963). URL: <https://cdanfort.w3.uvm.edu/research/lorenz-1963.pdf>.
- [4] N. S. Manton. *The Principle of Least Action in Dynamics*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/nsm10/PrincLeaAc.pdf>. Hämtad: 2025-01-21. Cambridge, UK, 25 april 2013.
- [5] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2. utg. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2008. ISBN: 978-0-470-72335-7.

Appendix

A - Härledning av Euler-Lagrange ekvationen (2.3)

Denna härledningen är huvudsakligen baserat på [5, s. 222-223]. Givet att funktionen $x_0(t)$ beskriver den väg av ett objekt, med startpunkterna $x(t_1) = x_1$ och $x(t_2) = x_2$, som ger ett stationärt¹ värde av objektets verkan S , då gäller att:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (1)$$

Bevis: Eftersom $x_0(t)$ är den funktion som ger ett stationärt värde av S , så kommer en funktion som är väldigt nära $x_0(t)$ ger i princip exakt samma verkan. Betrakta därmed funktionen:

$$x_a(t) = x_0(t) + a\beta(t), \quad (2)$$

där a är ett tal och $\beta(t)$ uppfyller $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ så att ändpunkterna för $x_a(t)$ och $x_0(t)$ är detsamma.

B - Kod för simulerings av dubbelpendeln

dsanuhasd

¹Kan alltså vara ett lokalt minimum, maximum eller terrasspunkt av S . Däremot är detta oftast ett minimum, därfor det oftast benämns som *principen om minsta verkan*.