



EUROPASKOLAN STRÄNGNÄS

GYMNASIEARBETE

Dubbelpendeln och kaosteori

*Oscar Landberg
KFSCI23b*

Handledare:

Erik Waltersson

Första utkast inlämnad: 2026-01-25

Sammanfattning

Here is my abstract.

Innehåll

Inledning	2
1.1 Introduktion och bakgrund	2
1.2 Syfte och frågeställning	3
Teoretisk genomgång	4
2.1 Kaosteori	4
2.2 Lagrange-mekanik	4
2.2.1 Principen om minsta verkan	4
2.3 Dubbelpendeln	5
2.3.1 Härledning av dubbelpendels rörelseekvationer	6
2.4 Numeriska metoder för att lösa differentialekvationer	9
2.4.1 Allmänna definitionen av RK4-metoden	9
Appendix	I
A - Härledning av Euler-Lagrange ekvationen (2.3)	I

Inledning

1.1 Introduktion och bakgrund

Pendeln är något som alltid har fascinerat mänskligheten genom tiderna. Redan under det första århundradet lyckades de gamla kineserna att utveckla en seismograf med hjälp av pendeln, vars funktion var att aktivera ett säkerhetssystem vid jordbävningar [1]. Inte minst används också pendlar än idag; Mora-klockors tidshållning bygger på en svängande pendel, medan den klassiska metronomens tickande styrs av en inverterad variant. Det är därför tydligt hur pendeln än idag är relevant.

På så sätt är det inte konstigt varför studiet av pendlar har länge varit en central del av fysikundervisningen, inte minst på gymnasiet. De flesta före detta (naturvetenskapliga) gymnasieelever känner säkert igen att majoriteten av de enkla pendlarna kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, och att formeln för en pendels svängningstid är $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Tyvärr så ingår det ingen riktig fördjupning för pendlar inom gymnasiestudierna¹, och mycket av det som lärdes ut om pendlar gäller bara om startvinkeln θ är relativt liten. Det är bara när detta villkor är uppfyllt som pendlar kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, inte minst gäller detta även för svängningstidsformeln ovan.

På så vis kan en vanlig ”enkel” pendel bli rätt så komplicerad, långt utanför gymnasiefysikens gränser. Däremot finns det många fler sätt att vidareutveckla problemet, bland annat går det att skapa en så kallad *dubbelpendel* genom att koppla två enkla pendlar ihop. Mycket forskning har redan skett på dubbelpendeln, och idag används dubbelpendeln ofta som klassiskt exempel inom kaosteori (CITE). Med detta menas att systemets rörelse är extremt känsligt för begynnelsevillkoren, det vill säga att extremt små skillnader i startpositionen ger gigantiska utslag i systemets rörelse, trots att den i varje ögonblick styrs av väldefinierade rörelseekvationer (CITE). Kaosteori är nämligen det område inom fysiken och matematiken som studerar deterministiska system vars långsiktiga beteende blir praktiskt oförutsägbara (CITE),

¹Det går även att argumentera för motsatsen, det kanske är bättre att lämna det åt universitetsstudenter att lära sig...

ett fenomen som brukar kallas för fjärilseffekten”(CITE/FOOTNOTE).

1.2 Syfte och frågeställning

Dubbelpendeln har länge varit ett klassiskt exempel inom kao [2, 3]

Som tidigare konstaterat har dubbelpendeln länge varit ett klassiskt

Teoretisk genomgång

2.1 Kaosteori

Kaosteori är ett tvärvetenskapligt forskningsområde som fokuserar på att studera mönster hos deterministiska system som är extremt känsliga till begynnelsevillkor [2]. Med detta menas att, om inte exakt samma

2.2 Lagrange-mekanik

För att lösa mer komplexa problem, som exempelvis dubbelpendeln, är det oftare lättare att använda Lagrange-mekanik för att beskriva dess rörelse. Även om det är teoretiskt sätt möjligt att beskriva en dubbelpendels rörelse med klassisk newtonsk mekanik, kan det fort bli mödosamt och onödigt krångligt. Lagrange-mekanik är egentligen bara en annan matematisk metod för att beskriva omvärlden, vilket i en viss typ av problem, blir betydligt lättare att lösa.

2.2.1 Principen om minsta verkan

Lagrange-mekanik bygger sin grund på *principen om minsta verkan*, eller ibland även kallad *principen om stationär verkan* [4]. Denna princip säger därmed att ett objekt kommer alltid att sträva efter att färdas den väg som minimerar den fysikaliska *verkan* [4, s.2]. Detta är så fysikaliskt grundläggande, att nästan all fysik kan härledas ur detta grundläggande antagande [4]. Givet att vi har ett objekt Q som rör sig längs $x(t)$, där Q har startpunkten $x(t_1)$ och slutpunkten $x(t_2)$, samt att $T(t)$ och $V(t)$ är objektets rörelse respektive kinetiska energi, definieras verkan S inom tidsintervallet $t_1 \leq t \leq t_2$ som [4, s.10]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - V(t)) dt. \quad (2.1)$$

Denna storhet har enheten [Js] och har dimensionerna (Energi \times Tid) [3, s.221]. Själva differensen $T(t) - V(t)$ visar sig vara så relevant inom fysiken, att den har

fått namnet 'the Lagrangian' och brukar betecknas \mathcal{L} [3, s.218], det vill säga ¹:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.2)$$

Principen om minsta verkan säger att fysikens lagar strävar efter att förminka (2.1)².

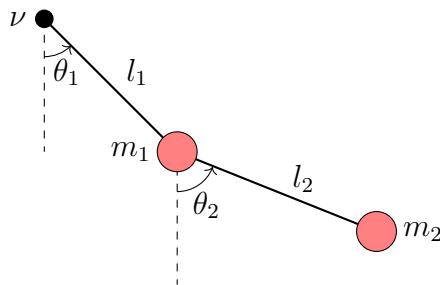
För att bestämma ett objekts väg som minimerar verkan S används *Euler-Lagrange ekvationen* [3, s. 222] se ekvation (2.3). I ekvation (2.3) är $i = 1, 2, 3, \dots$, och normalt sätt betecknar de olika koordinataxlarna i systemet. Härledning av (2.3) ges i appendix A.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.3)$$

2.3 Dubbelpendeln

Om två vanliga enkla pendlar är sammankopplade sägs de bilda en dubbelpendel, se figur 2.1. Den första pendeln består av en punktformig massa m_1 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_1 , vilket sitter i en friktionslös rotationspunkt ν . Den andra pendeln består också av en punktformig massa m_2 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_2 . Denna andra pendeln har sin friktionslösa rotationspunkt tillkopplad i m_1 . Den enda kraften som verkar på respektive massa är tyngdkraften.

Låt vinklarna θ_1, θ_2 vara vinklarna mellan den lodräta linjen från rotationspunkten och den faktiska positionen av pendeln, se figur 2.1. Vinklarna θ_1 och θ_2 är inte begränsade mellan $-\pi \leq \theta_{1,2} \leq \pi$, dvs de kan rotera fritt hur många varv som helst runt rotationspunkterna. Detta innebär självklart att respektive pendel inte kommer påverkas av varandra, t.ex att de inte kan slå in i varandra.



Figur 2.1: Schematisk figur över en matematisk dubbelpendel.

¹Varför $\mathcal{L} = T(t) - V(t)$ är så viktigt i (2.1) kan tyckas konstigt. Varför ska *differensen* av kinetiska och potentiella energin spela någon roll?

²Egentligen, rent matematiskt, strävar verkan S att hitta ett stationärt värde av S , det vill säga en lokal extrem- eller terrasspunkt till grafen av S . Detta är anledningen varför principen även kallas för *principen om stationär verkan* [3, s.222].

2.3.1 Härledning av dubbelpendels rörelsekvationer

Härledningen utgår från figur 2.1, där dubbelpendeln ritats in i ett koordinatsystem där origo utgår från vridpunkten ν . De punktformiga massorna m_1 och m_2 har koordinaterna (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2) .

Vi kan beskriva punkterna x_1 , x_2 , y_1 och y_2 går att beskriva genom trigonometri enligt:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (2.4)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (2.5)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2.6)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (2.7)$$

Eftersom tidsderivatan av sträcka/position är hastighet, kan vi få hastigheterna \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , \dot{x}_2 och \dot{y}_2 enligt:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \quad (2.8)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.10)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2. \quad (2.11)$$

Vi kan därmed definiera dubbelpendelns potentiella energi V som summan av den potentiella energin för respektive massa. Detta ger:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ (2.5), (2.7) \Rightarrow V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \quad (2.12)$$

Vi kan också bestämma dubbelpendelns kinetiska energi T enligt:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ (2.8) - (2.11) \Rightarrow = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \right. \\ \left. + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right. \\ \left. + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \\ \Rightarrow = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right).$$

Eftersom $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ och $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$ (trigonometriska ettan respektive subtraktionsformeln för cosinus) kan vi förenkla uttrycket till:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right). \quad (2.13)$$

Nu när vi har uttryckt V och T som funktioner av θ_1 och θ_2 , kan vi beräkna \mathcal{L} . Enligt (2.2), (2.12) och (2.13) får vi att:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad - (- (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2) \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tillämpning av Euler-Lagrange ekvationen

Vi ska nu använda ekvation (2.14) i Euler-Lagrange ekvationen (2.3) för att lösa ut ekvationen som beskriver vinklarna θ_1 och θ_2 i dubbelpendeln. Vi beräknar för fallet för $q_i = \theta_1$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}$ och $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right)$ ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1}$ ger:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1. \quad (2.16)$$

Insättning av (2.15) och (2.16) i (2.3) ger att:

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \Leftrightarrow 0 &= (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)g\sin\theta_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Därmed är (2.17) ekvationen som beskriver vinkeln θ_1 i dubbelpendeln. Nu ska vi istället lösa Euler-Lagrange ekvationen (2.3) fast för $q_i = \theta_2$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}$ och $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right)$ ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}$ ger:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2. \tag{2.19}$$

Insättning av (2.18) och (2.19) i (2.3) ger:

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \Leftrightarrow 0 &= m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Detta innebär att (2.20) är den ekvation som beskriver vinkeln θ_2 i dubbelpendeln. Därmed har vi nu funnit våra två ekvationer som enligt Euler-Lagrange ekvationen (2.3) beskriver dubbelpendelns rörelse, se ekvationssystemet (2.21):

$$\begin{cases} 0 &= (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1. \\ 0 &= m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ekvationssystemet i (2.21) går inte att lösa analytiskt, utan måste skrivas om för att få (2.21) till en ordinär första ordningens differentialekvation. Detta kan göras genom att införa nya beteckningar för vinkelhastigheterna ω_1 och ω_2 , dvs $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ och $\omega_2 = \dot{\theta}_2$. Därmed kan (2.21) skrivas om enligt ekvationssystemet (aisjd).

$$\{ \tag{2.22}$$

2.4 Numeriska metoder för att lösa differentialekvationer

Differentialekvationerna i (2.21) är icke-linjära och av andra ordningen, vilket gör de omöjligt att lösa rent analytiskt. Därmed måste ekvationerna lösas numeriskt, vilket kan göras med *Runge-Kuttametoden*. Denna metod³, utvecklat och namngivet av de tyska matematikerna Carl Runge och Martin Wilhelm Kutta, är en kraftfull metod för att lösa ordinära differentialekvationer (ODE:s) [5, s. 93].

Runge-Kuttametoden ger oss en metod att lösa ekvationer på formen $x' = f(t, x)$, där $x(t)$ är den okända funktionen. Metoden bygger på att approximera lösningen stegvis med ett litet h , men istället för att bara beräkna nuvarande lutningen (det som sker i Eulers metod), så beräknas flera mellanliggande lutningar där ett viktad medelvärde istället dras.

2.4.1 Allmänna definitionen av RK4-metoden

Låt \mathbf{x} vara en tillståndsvektor sådan att $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ och låt $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$. Dessutom har vi begynnelsevärdet \mathbf{Vi} vill beräkna värdet av tillståndsvektorn \mathbf{x} över tidsintervallet $[t_0, t]$ med steglängden h . Givet att $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, så definieras nästa tillståndsvektor \mathbf{x}_{n+1} enligt:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6} (\mathbf{K}_{1n} + 2\mathbf{K}_{2n} + 2\mathbf{K}_{3n} + \mathbf{K}_{4n}), \quad (2.23)$$

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad (2.24)$$

där värdena av \mathbf{K}_{1n} , \mathbf{K}_{2n} , \mathbf{K}_{3n} och \mathbf{K}_{4n} är definierade sådan att:

$$\mathbf{K}_{1n} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{K}_{2n} = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_{1n}\right) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_{3n} = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_{2n}\right) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{K}_{4n} = \mathbf{f}(t + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{K}_{3n}) \quad (2.28)$$

³Egentligen är Runge-Kuttametoden är en familj av metoder, då den innehåller ett flertal metoder, bland annat Eulers stegmetod. Däremot brukas RK4-metoden menas med ”Runge-Kuttametoden”, vilket är den vi kommer att använda här. För vidare förklaring, se [5].

⁴Definitionen av RK4-metoden är hämtat från [6]

Appendix

A - Härledning av Euler-Lagrange ekvationen (2.3)

Litteraturförteckning

- [1] W. Scott Morton och Charlton M. Lewis. *China: Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2005, s. 70.
- [2] The Editors of Encyclopaedia Britannica. *Chaos Theory*. Hämtad 2026-01-18. Encyclopædia Britannica, Inc. 19 dec. 2025. URL: <https://www.britannica.com/science/chaos-theory>.
- [3] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] N. S. Manton. *The Principle of Least Action in Dynamics*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/nsm10/PrincLeaAc.pdf>. Hämtad: 2025-01-21. Cambridge, UK, 25 april 2013.
- [5] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2. utg. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2008. ISBN: 978-0-470-72335-7.
- [6] John Jr. Allard. *Simulating a Double Pendulum – Part 1: Theory and Derivation*. Hämtad: 2026-01-25. John Allard Jr.'s Blog. 4 mars 2015. URL: https://www.jhallard.com/blog/double_pendulum.html.