



EUROPASKOLAN STRÄNGNÄS

GYMNASIEARBETE

Dubbelpendeln och kaosteori

*Oscar Landberg
KFSCI23b*

Handledare:

Erik Waltersson

Första utkast inlämnad: 2026-01-03

Sammanfattning

Here is my abstract.

Innehåll

Introduction	1
1.1 Bakgrund	2
1.2 Teoretisk genomgång	3
1.2.1 Dubbelpendeln	3
1.2.2 Lagrange-mekanik	3
1.2.3 Härledning av dubbelpendels rörelseekvationer	4

Inledning

1.1 Bakgrund

Pendeln är något som alltid har fascinerat mänskligheten genom tiderna. Redan under det första århundradet lyckades de gamla kineserna att utveckla en seismograf med hjälp av pendeln, vars funktion funktion var att aktivera ett säkerhetssystem vid jordbävningar [1]. Inte minst används också pendlar än idag; Mora-klockors tidhållning bygger på en svängande pendel, medan den klassiska metronomens tickande styrs av en inverterad variant. Det är därför tydligt hur pendeln än idag är relevant.

På så sätt är det inte konstigt varför studiet av pendlar har länge varit en central del av fysikundervisningen, inte minst på gymnasiet. De flesta före detta (naturvetenskapliga) gymnasieelever känner säkert igen att de flesta enkla pendlarna kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, och att formeln för en pendels svängningstid är $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Tyvärr så ingår det ingen riktig fördjupning för pendlar inom gymnasiestudierna¹, och mycket av det som lärdes ut om pendlar gäller bara om startvinkeln θ är relativt liten. Det är bara när detta villkor är uppfyllt som pendlar kan beskrivas som en harmonisk svängningsrörelse, inte minst gäller detta även för svängningstidsformeln ovan.

På så vis kan en vanlig ”enkel” pendel bli rätt så komplicerad, långt utanför gymnasiefysikens gränser. Däremot finns det många fler sätt att vidareutveckla problemet, bland annat går det att skapa en så kallad *dubbelpendel* genom att koppla två enkla pendlar ihop. Det visar sig att dubbelpendeln kan väldigt enkelt visa kaotiska beteenden och bli väldigt svår att förutspå rörelsen vid, givet att startvärderna inte är helt matematiskt exakta. Därmed demonstrerar en dubbelpendel inte minst klassisk dynamik, men det är också en tydlig tillämpning på kaosteori.

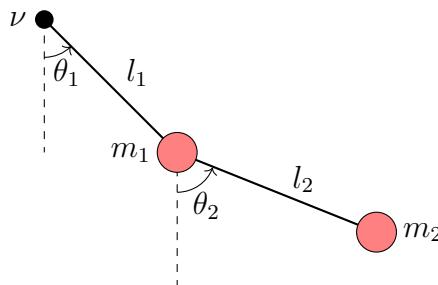
¹Det går även att argumentera för motsatsen, det kanske är bättre att lämna det åt universitetsstudenter att lära sig...

1.2 Teoretisk genomgång

1.2.1 Dubbelpendeln

Om två vanliga enkla pendlar är sammankopplade sägs de bilda en dubbelpendel, se figur 1.1. Den första pendeln består av en punktformig massa m_1 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_1 , vilket sitter i en friktionslös rotationspunkt ν . Den andra pendeln består också av en punktformig massa m_2 som är kopplad till en masslös pinne med längden l_2 . Denna andra pendeln har sin friktionslösa rotationspunkt tillkopplad i m_1 . Den enda kraften som verkar på respektive massa är tyngdkraften.

Låt vinklarna θ_1, θ_2 vara vinklarna mellan den lodräta linjen från rotationspunkten och den faktiska positionen av pendeln, se figur 1.1. Vinklarna θ_1 och θ_2 är inte begränsade mellan $-\pi \leq \theta_{1,2} \leq \pi$, dvs de kan rotera fritt hur många varv som helst runt rotationspunkterna. Detta innebär självklart att respektive pendel inte kommer påverkas av varandra, t.ex att de inte kan slå in i varandra.



Figur 1.1: Schematisk figur över en matematisk dubbelpendel.

1.2.2 Lagrange-mekanik

För att lösa mer komplexa problem, som exempelvis dubbelpendeln, är det ofta lättare att använda Lagranges ekvationer för att beskriva dess rörelse. Även om det är teoretiskt möjligt att beskriva en dubbelpendels rörelse med klassisk newtonsk mekanik, kan det fort bli mödosamt och därmed används Lagranges ekvationer istället.

En beskrivning av ett system med Lagranges ekvationer består oftast av the Lagrangian \mathcal{L} [2], där T och V är systemets kinetiska respektive lägesenergi, se ekvation (1.1).

$$\mathcal{L} = T - V \quad (1.1)$$

Sedan ger Euler-Lagrange ekvationen (1.2) att den ekvation som uppfyller (1.1) är den ekvation som beskriver systemets rörelse [2].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.2)$$

för varje $i = 1, 2, 3, \dots$. Motivering och härledning av både (1.1) och (1.2) ges i appendix (TODO).

1.2.3 Härledning av dubbelpendels rörelsekvationer

Härledningen utgår från figur 1.1, där dubbelpendeln ritats in i ett koordinatsystem där origo utgår från vridpunkten ν . De punktformiga massorna m_1 och m_2 har koordinaterna (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2) .

Vi kan beskriva punkterna x_1, x_2, y_1 och y_2 går att beskriva genom trigonometri enligt:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (1.3)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (1.4)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (1.5)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (1.6)$$

Eftersom tidsderivatan av sträcka/position är hastighet, kan vi få hastigheterna $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2$ och \dot{y}_2 enligt:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \quad (1.7)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \quad (1.8)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (1.9)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2. \quad (1.10)$$

Vi kan därmed definiera dubbelpendelns potentiella energi V som summan av den potentiella energin för respektive massa. Detta ger:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$$(1.4), (1.6) \Rightarrow V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \quad (1.11)$$

Vi kan också bestämma dubbelpendelns kinetiska energi T enligt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ (1.7) - (1.10) \Rightarrow &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \\ \Rightarrow &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right). \end{aligned}$$

Eftersom $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ och $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$ (trigonometriska ettan respektive subtraktionsformeln för cosinus) kan vi förenkla uttrycket till:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right). \quad (1.12)$$

Nu när vi har uttryckt V och T som funktioner av θ_1 och θ_2 , kan vi beräkna \mathcal{L} . Enligt (1.1), (1.11) och (1.12) får vi att:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad - ((m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2) \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2l_1^2 + \dot{\theta}_2^2l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Tillämpning av Euler-Lagrange ekvationen

Vi ska nu använda ekvation (1.13) i Euler-Lagrange ekvationen (1.2) för att lösa ut ekvationen som beskriver vinklarna θ_1 och θ_2 i dubbelpendeln. Vi beräknar för fallet för $q_i = \theta_1$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}$ och $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right)$ ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}$ ger:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1. \quad (1.15)$$

Insättning av (1.14) och (1.15) i (1.2) ger att:

$$\begin{aligned}
0 &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\
\Leftrightarrow 0 &= (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Därmed är (1.16) ekvationen som beskriver vinkeln θ_1 i dubbelpendeln. Nu ska vi istället lösa Euler-Lagrange ekvationen (1.2) fast för $q_i = \theta_2$.

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}$ och $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right)$ ger:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \right) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Deriveringsregler för att bestämma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}$ ger:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \tag{1.18}$$

Insättning av (1.17) och (1.18) i (1.2) ger:

$$\begin{aligned}
0 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Detta innebär att (1.19) är den ekvation som beskriver vinkeln θ_2 i dubbelpendeln.

Litteraturförteckning

- [1] W. Scott Morton och Charlton M. Lewis. *China: Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2005, s. 70.
- [2] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2007.