

Московский физико-технический университет  
Физтех-школа радиотехники и компьютерных  
технологий

Лабораторная работа № 1.2.3

# Измерение магнитного поля Земли

Работу выполнил:  
Орловский Антон  
Б01-909

г. Долгопрудный

**Цель работы:** определить характеристики шарообразных неодимовых магнитов и, используя законы взаимодействия магнитных моментов с полем, измерить горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

## 1 Краткая теория

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{P}_m; \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3}. \quad (1)$$

В магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  на точечный магнитный диполь  $\vec{P}_m$  действует механический момент сил:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}. \quad (2)$$

В неоднородном поле на точечный магнитный диполь, кроме момента сил, действует ещё и сила:

$$\vec{F} = (\vec{P}_m; \vec{\nabla})\vec{B}, \quad (3)$$

что в случае сонаправленных магнитных моментов даёт формулу:

$$F = -6\frac{P_m^2}{r^4}. \quad (4)$$

Индукция магнитного поля  $B_p$  на полюсах однородно намагниченного шара связана с величиной намагниченности  $p_m = P_m/V$  и остаточной магнитной индукцией  $B_r$  формулой:

$$\vec{B}_p = \frac{2}{3}\vec{B}_r = \frac{8\pi}{3}p_m\vec{r}.$$

## 2 Экспериментальное определение величины магнитного момента магнитных шариков (Метод А)

Величину магнитного момента  $P_m$  одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу  $m$  и определив максимальное расстояние  $r_{max}$ , на котором они ещё удерживают друг друга в поле тяжести (см. рис. 1). При максимальном расстоянии сила тяжести шариков равна силе их магнитного притяжения:

$$\frac{6P_m^2}{r_{max}^4} = mg \Rightarrow P_m = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \quad (5)$$

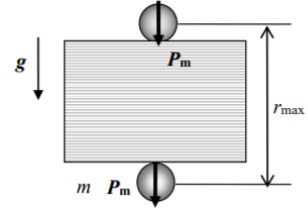


Рис. 1: Определение магнитного момента шариков по силе тяжести (метод А).

Максимальная величина индукции наблюдаются на полюсах:

$$\vec{B}_p = \frac{2\vec{P}_m}{R^3}. \quad (6)$$

Перед измерением шарики были взвешены на весах, вес используемых шариков был:

$$m = 0.845 \pm 0.01 \text{ г.}$$

Между двумя шариками подкладывалась стопка бумаги, и когда нижний шарик отлипал, получалось искомое расстояние. Учитывая, что диаметр шариков был  $d = 5.7 \pm 0.1$  мм, результат:

$$r_{max} = 18.5 \pm 0.1 \text{ мм.}$$

По полученным данным рассчитываем величину намагниченности по (5):

$$P_m = 62.1 \pm 0.73 \text{ ЭрГ/Гс,}$$

Погрешность  $P_m$  :

$$\sigma(P_m) = P_m \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 16 \left(\frac{\sigma_{r_{max}}}{r_{max}}\right)^2} \quad (7)$$

а так же индукцию на полюсах по формуле (6):

$$B_p = 5657 \pm 287 \text{ Гс.}$$

Также можем получить остаточную индукцию неодимовых магнитов из соотношений:

$$M = \frac{P_m}{V} \approx 948 \text{ эрг/Гс*см}^3.$$

Тогда остаточная индукция равна:

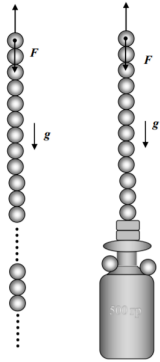
$$B_r = 4\pi \cdot M \approx 11091 \text{ Гс}$$

Так же, с помощью магнетометра АТЕ-8702 поле была измерена индукция на полюсах, которая оказалась равна:

$$B = 3440 \text{ Гс.}$$

Такое расхождение связано с тем, что скорее всего значение магнетометра посчитано неверно, так как оно сильно зависит от сканируемой точки, а сам шарик сопоставим по размеру с детектором.

### 3 Определение величины магнитного момента по силе сцепления магнитных шариков (Метод В)



Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Если сила сцепления двух одинаковых шаров диаметром  $d$  с магнитными моментами  $P_m$  определяется (4), то минимальный вес цепочки, при которой она оторвётся от верхнего шарика равен:

$$F = \frac{6P_m^2}{d^4} + \frac{6P_m^2}{(2d)^4} + \dots = F_0 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \approx 1.08F_0. \quad (8)$$

Рис. 2: Определение магнитного момента шарика по силе сцепления (Метод В).

Используя дополнительные шарики, была составлена цепочка из 5 шариков и, с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов, цепочка подсоединена к гилям так, чтобы это был минимальный вес, при котором шарики держались сцепленными. В итоге получившаяся масса, разрывающая шарики, получилась равной:

$$m = 503.37 \pm 0.01 \text{ г.}$$

Отсюда по формуле (7) определяем силу магнитов на разрыв:

$$F_0 = 4.23 \cdot 10^5 \text{ Дин.}$$

$$P_m = 2R^2 \sqrt{\frac{2F_0}{3}} \quad (9)$$

За погрешность такого измерения примем:

$$\sigma_{P_m} = P_m \cdot \sqrt{4 \cdot \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{F_0}}{F_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \quad (10)$$

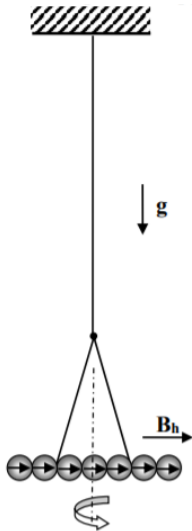
Причем  $\sigma_{F_0} = 0,005 \cdot F_0$ .

И, из (4) определяем магнитный момент шарика:

$$P_m = 86.3 \pm 0.72 \text{ ЭрГ/Гс.}$$

Это значение сильно больше того, что был померян методом А. Предполагая, это связано с тем, что цепочка из 5 шариков слишком короткая, чтобы действием сильных неодимовых магнитов можно было пренебречь. Поэтому значение силы разрыва сильно завышено. Скорее всего, значение, померенное методом В - точнее, если бы все измерения были проведены правильно, но в данном случае метод А - точнее, так что в дальнейшем я буду использовать значение, полученное им.

## 4 Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли



Магнитное поле Земли в настоящей работе определяется по периоду крутильных колебаний магнитной стрелки вокруг вертикальной оси. Магнитная стрелка крутильного маятника показана на рис. 3. Магнитные моменты шариков направлены в одну сторону вдоль оси стрелки. Под действием вращательного момента  $\vec{M} = \vec{P}_0 \times \vec{B}$  магнитный момент стрелки  $\vec{P}_0$  выстроится вдоль горизонтальной составляющей магнитного поля Земли  $\vec{B}_h$  в направлении Юг  $\rightarrow$  Север. Даже при 3 шариках, момент инерции  $I_n$  такого маятника приблизительно равен моменту инерции однородного стержня. При малых амплитудах ( $\sin \theta \approx \theta$ ) уравнение колебаний стрелки имеет вид:

$$I_n \ddot{\theta} + P_0 B_h \theta = 0,$$

Рис. 3: Схема установки крутильного маятника для определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

отсюда период колебаний маятника из  $n$  шариков:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_n}{nP_m B_h}}.$$

Таким образом, подставив формулу для момента инерции стрелки, получаем зависимость периода крутильных колебаний от кол-ва шариков:

$$T(n) = \pi n \sqrt{\frac{md^2}{3P_m B_h}} = kn. \quad (11)$$

Перед проведением эксперимента по снятию зависимости  $T(n)$  был измерен период крутильных колебаний маятника, обладающего нулевым магнитным моментом. Он получился порядка 25 секунд. Это позволяет перенебречь вкладом натяжения нити в крутильные колебания магнитной стрелки. После этого была снята зависимость для нескольких  $n$ , изображенная на таблице 1.

$T_{\text{крут}}, \text{ с}$	2.48	2.3	2.25	2.15	1.88	1.65	1.38	1.12	0.95	0.64
$n$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

Таблица 1: Зависимость периода колебаний от количества шариков.

Проведем еще раз эксперимент, получим новые точки для построения графика.

$T_{\text{крут}}, \text{ с}$	2.35	2.27	2.1	1.97	1.78	1.57	1.25	1.04	0.89	0.64
$n$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

Таблица 2: Зависимость периода колебаний от количества шариков.

По этим значениям строим график, изображенный на рис.4.

Получили  $k = 0,2027, \sigma_k = 0,01$ .

Теперь по формуле:

$$B_h = \frac{4\pi^2 md^2}{3k^2 P_m},$$

получаем значение для горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

Погрешность  $B_h$  :

$$\sigma_{B_h} = B_h \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P_m}}{P_m}\right)^2} \quad (12)$$

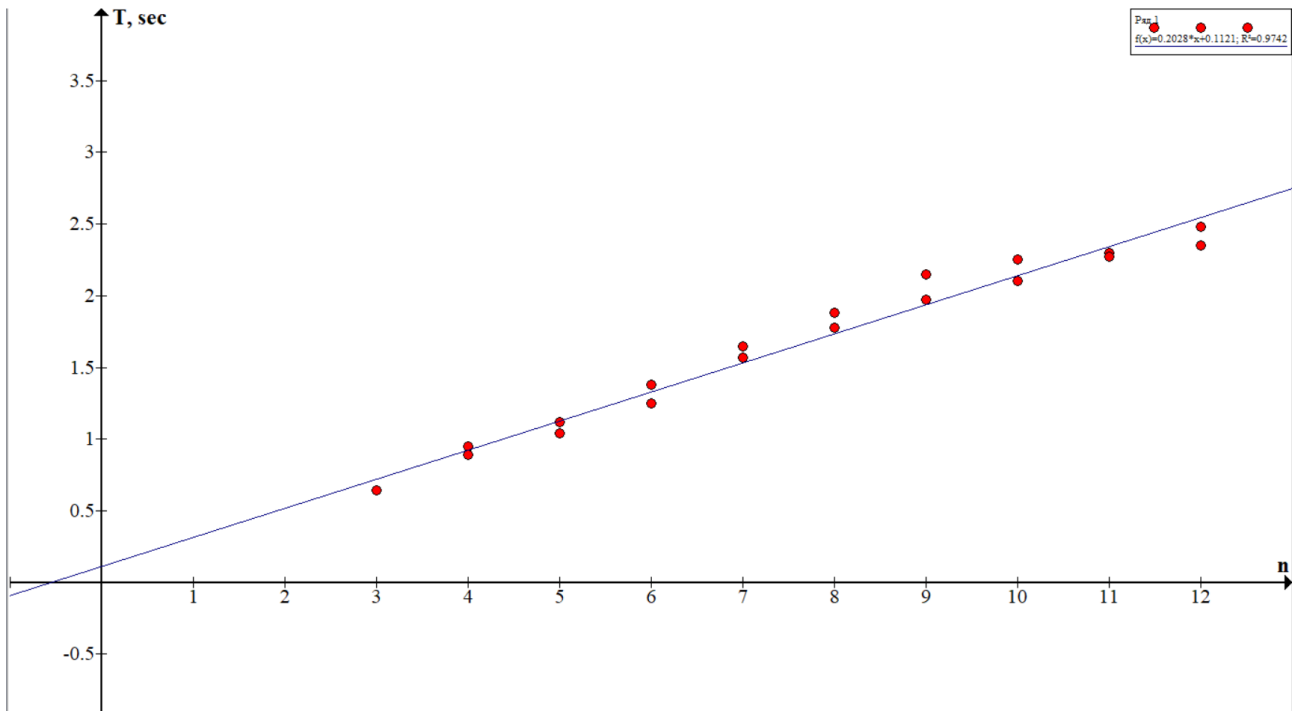


Рис. 4: График зависимости  $T_{\text{крут}}(n)$ . Как видно из графика, он очень хорошо аппроксимируется прямой, что доказывает предположение об аддитивности магнитных моментов шариков, то есть магнито жесткости неодима.

Получим:

$$\sigma_{B_h} = 0.3028 \pm 0.02 \text{ Гс.}$$

## 5 Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение

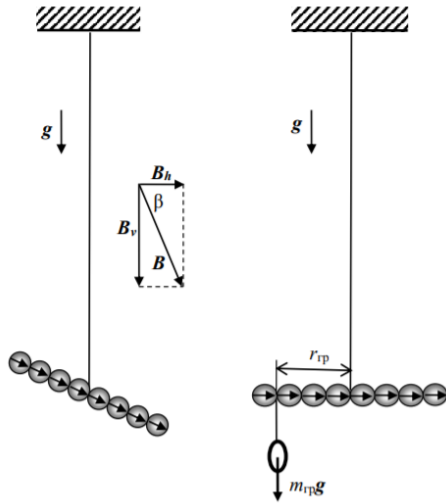


Рис. 5: Схема установки крутильного маятника для определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

Водится опыт. Величина угла  $\beta$  называется магнитным наклонением. Можно придать стрелке горизонтальное положение, добавив к одной из сторон грузик известной массы. Тогда момент силы тяжести уравнивает магнитный. Если масса уравнивающего груза равна  $m_{гр}$ , плечо силы тяжести  $r_{гр}$ , а полный магнитный момент стрелки  $P_0 = nP_m$ , то в равновесии:

$$m_{гр}gr_{гр} = nP_mB_v = An.$$

В данном эксперименте была снята зависимость момента силы тяжести от числа шариков  $M(n)$ , где брались четное кол-во шариков, потому что их удобнее подвешивать за нитку. Эта зависимость представлена на таблице 2.

Теперь по этой зависимости можно построить график, с помощью которого можно определить  $B_v$ .

Теперь, зная коэффициент наклона этого графика, можно определить вертикальную составляющую магнитной индукции поля Земли:

$$B_v = \frac{A}{P_m} = 0.90 \pm 0.06 \text{ Гс.}$$

Для измерения вертикальной  $B_v$  составляющей вектора индукции поля Земли используется та же установка, что и для измерения горизонтальной составляющей с тем лишь отличием, что магнитная стрелка подвешивается на нити без  $\Lambda$ -образного подвеса. В этом случае магнитная стрелка, составленная из чётного числа шариков и подвешенная на тонкой нити за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым, отличным от нуля, углом к горизонту (см. рис. 4). Это связано с тем, что вектор  $\vec{B}$  индукции магнитного поля Земли в общем случае не горизонтален, а образует с горизонтом угол  $\beta$ , зависящим от географической широты  $\varphi$  места, где проводится опыт.



$m_{гр}, \text{ Г}$	$n$	$r_{гр}, \text{ см}$	$M, \text{ эрг}$
0.278	12	2.5	695.0
0.262	10	2.0	524.0
0.279	8	1.5	418.5
0.293	6	1.0	293.0
0.378	4	0.5	189.0

Таблица 3: Зависимость момента сил тяжести, уравнивающего магнитный момент вертикальной составляющей магнитного поля Земли, от длины стрелки.

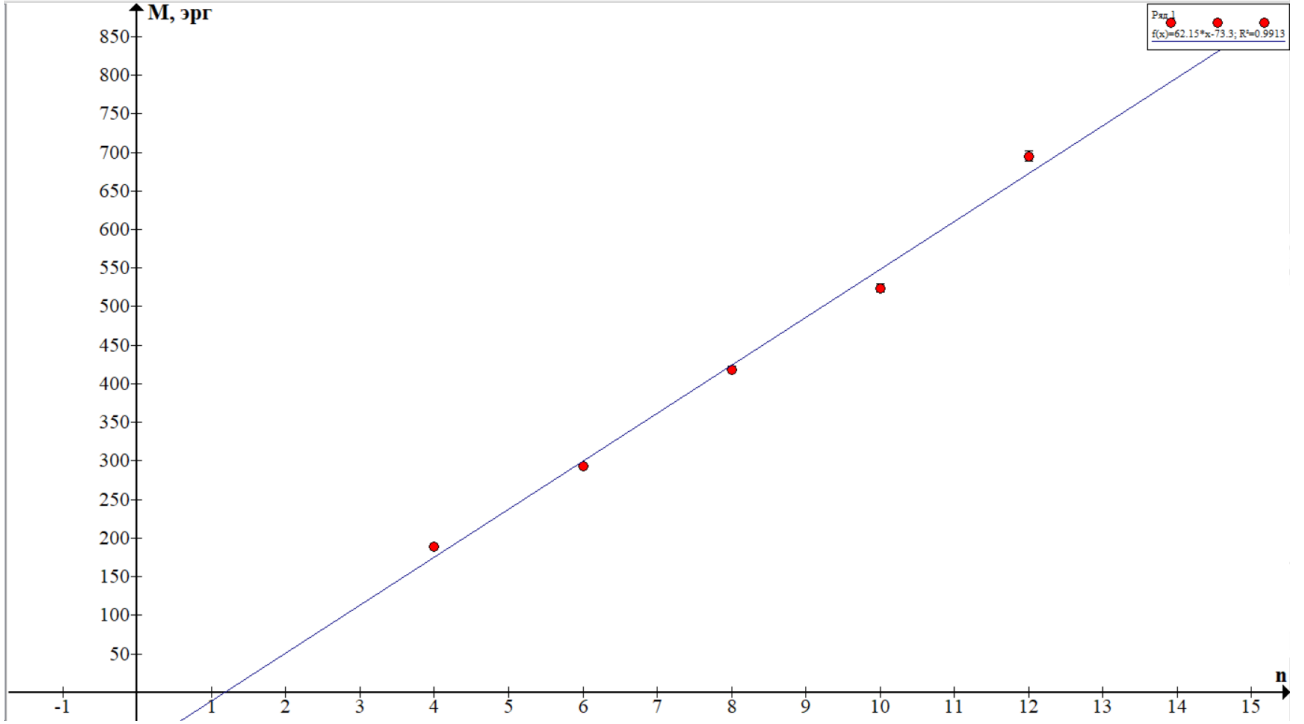


Рис. 6: График зависимости  $M(n)$ . Как видно, он вполне неплохо аппроксимируется прямой, Поэтому можно с малой погрешностью получить значение для  $B_v$ .

$$\sigma_{B_v} = B_v \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P_m}}{P_m}\right)^2} = 0.90 \pm 0.06 \text{ Гс}.$$

По полученным результатам, можно найти общую величину магнитного поля  $B$  на широте Долгопрудного, а так же величину магнитного наклонения  $\beta$ :

$$B = \sqrt{B_v^2 + B_h^2} = 0.94 \pm 0.14 \text{ Гс},$$

$$\beta = \arctan \frac{B_v}{B_h} = 72^\circ \pm 2^\circ.$$

Получив эти значения, посчитаем широту, которая теоретически соответствует этому наклонению. Опустив некоторые математические выкладки, получаем следующие теоретические формулы для магнитного поля:

$$B_v = \frac{2p}{r^3} \sin \alpha,$$

где  $p$  – магнитный момент Земли,  $r$  – радиус Земли,  $\alpha$  – широта. Так же:

$$B = \frac{p}{r^3} \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha}.$$

Так как  $\sin \beta = \frac{B_v}{B}$ , то окончательно получаем:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 - \frac{5}{2} \sin^2 \beta}{2 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta} \right) = 63^\circ \pm 3^\circ.$$

Как видно, результат не совсем сошелся с истинным значением для Долгопрудного:  $56^\circ$ . Однако он неплохо подходит для оценки, так как показал достаточно близкое значение.

## 6 Вывод

В работе были измерены магнитные моменты для неодимовых шариков тремя разными методами: уравниванием силой тяжести на расстоянии, силой разрыва, а так же магнетрометром. При измерении методом разрыва произошла ошкбка, из-за которой полученное значение получилось слишком завышенным. Магнетроном так же получилось несколько неправильное значение, но этого сложнее избежать из-за малого размера шариков.

Далее в работе были измерены горизонтальная и вертикальная составляющие магнитного поля Земли, и они дали значение полного поля в Долгопрудном, равное 0.88 Гс, при том, что из справочных данных, магнитное поле Земли колеблется в пределах  $0.18 \div 0.71$  Гс. Я думаю, что основная причина такого отклонения в не совсем правильно посчитанном значении для  $P_m$ . Скорее всего, из-за того, что толщина линеек была посчитана не совсем правильно в методе А (дерево деформируется).

Так же было найдено магнитное наклонение, которое уже теоретически не зависит от величины магнитного момента шарика. На его основании была восстановлена широта Долгопрудного, вполне близкая к реальной. Отклонение скорее всего связано с тем, что шарики были изолированы не ото всех магнитных предметов, что искажало картину поля.