

Московский физико-технический университет  
Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Лабораторная работа № 3.2.2

## **Резонанс напряжений в электрическом контуре**

Работу выполнил:  
Орловский Антон  
Б01-909

г. Долгопрудный  
2020 год

**Цель работы:** изучение последовательной цепи переменного тока, наблюдение резонанса напряжений.

**Оборудование:** регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвигным сердечником, магазин емкостей, реостат, резистор, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограм, универсальный мост.

## 1 Теоретическое введение

В теории переменных токов напряжения и токи принято выражать комплексными величинами. Модуль комплексной величины равен при этом амплитудному значению напряжения, а фаза - сдвигу фаз, измеренному по отношению к какому-либо одному напряжению или току, принятому в качестве опорного. Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, т.е. тоже некоторыми комплексными числами.

Комплексную величину  $Z$  будет называть импедансом, комплексным сопротивлением последовательного контура:

$$Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (1)$$

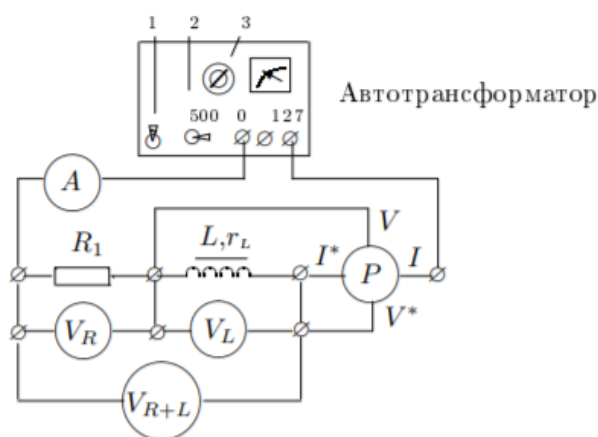


Рис. 1: Схема установки для изучения закона Ома в цепи переменного тока

Электрическая цепь Рис.1 состоит из резистора  $R$  и катушки индуктивности  $L$  с импедансом  $Z_L = r_L + i\Omega L$ , последовательно подключенных к внешнему источнику, ЭДС которого меняется по синусоидальному закону с частотой  $\Omega$ .

Обозначим через  $U_R$  напряжение на резисторе, через  $U_L$  напряжение на катушке, через  $U_{R+L}$  напряжение на катушке и резисторе. Для этих напряжений справедливы комплексные соотношения.

Минуя их описание, а так же переход к модулям и фазам токов и напряжений, отметим, что измеряя с помощью трех вольтметров значения  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_{R+L}$  и зная сопротивление резистора, нетрудно вычислить силу тока в цепи, активное сопротивление катушки  $r_L$ , ее индуктивность  $L$ , мощность  $P_L$ , выделяемую на катушке и сдвиг фаз между током и напряжением на катушке.

$$U_R = IR \quad (2)$$

$$U_L = I\sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2} \quad (3)$$

$$U_{L+R} = I\sqrt{(r_L + R)^2 + (\Omega L)^2} \quad (4)$$

Далее приведён итог расчета мощности переменного тока, выделяемой в катушке, через мгновенное значение мощности и интегрированием по всему периоду.

$$P_L = U_L \cdot I \cdot \cos(\psi) = I^2 \cdot r_L \quad (5)$$

Средняя мощность, выделяющаяся в катушке самоиндукции, определяется действительной частью ее импеданса.

Активное сопротивление катушки  $r_L$ , можно определить, если включить её в последовательный колебательный контур с известными параметрами — сопротивлением  $R$  и ёмкостью  $C$  (рис. 2). В контуре, настроенном в резонанс на частоту  $\Omega$  внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают  $\omega_0 = \Omega$ ), реактивные сопротивления индуктивности и емкости одинаковы:

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \quad (6)$$

Определив каким-либо экспериментальным способом добротность  $Q$  этого контура, можно рассчитать полное сопротивление контура  $R_{sum}$  в резонансе, поскольку:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_{sum}} = \frac{1}{\omega_0 C R_{sum}} \quad (7)$$

Резонансное сопротивление контура  $R_{sum}$  включает в себя известное сопротивление резистора  $R$  и активное сопротивление катушки  $r_L$

$$R_{sum} = R + r_L \quad (8)$$

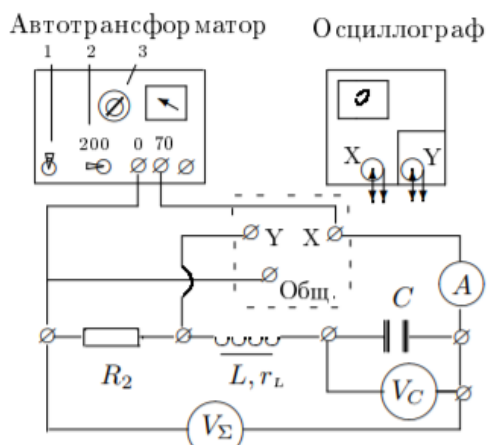


Рис. 2: Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

## 2 Экспериментальная установка

Схема установки для исследования закона Ома в цепи переменного тока представлена на рис. 1. Цепь, состоящая из резистора  $R \approx 100$  и катушки  $L$  с выдвижным сердечником, подключена к автотрансформатору, выходное напряжение которого можно менять от 0 до 127 В. Напряжения на каждом из элементов и суммарное напряжение цепи измеряются тремя вольтметрами:  $V_R$ ,  $V_L$  и  $V_{L+R}$ . Амперметр измеряет ток в цепи, а ваттметр — мощность, выделяющуюся на катушке

Схема установки для изучения резонанса напряжений изображена на рис. 2. Последовательно соединены резистор  $R \approx 5$ , катушка  $L$  и магазин емкостей. Амперметр измеряет ток в цепи, вольтметр  $V_C$  — напряжение на ёмкости, вольтметр  $V_\Sigma$  — суммарное напряжение на контуре. Резонанс можно зафиксировать с помощью осциллографа, если подать на вход  $X$  напряжение с контура, а на вход  $Y$  — напряжение с резистора  $R_2$ , пропорциональное току в цепи. В общем случае на экране виден эллипс. При резонансе эллипс вырождается в прямую линию.

Резонансные напряжения на контуре  $U_{\Sigma, res}$  и на ёмкости  $U_C$ , равны соответственно.

$$U_{\Sigma, res} = I_{res} \cdot R_{\Sigma} \quad (9)$$

$$U_{C, res} = \frac{I_{res}}{\Omega \cdot C} \quad (10)$$

Сравнивая формулы (6), (7) и (8), получаем, что:

$$Q = \frac{U_{C, res}}{U_{\Sigma, res}} \quad (11)$$

Формула (8) показывает, что добротность контура может быть найдена по измеренным значениям напряжений на контуре и на конденсаторе при резонансе. Зная добротность контура и ёмкость  $C$ , можно рассчитать  $R_{\Sigma}$  по формуле (6), а затем определить  $r_L$

### 3 Ход работы

#### 3.1 Закон Ома в цепи переменного тока.

1) Снимем показания с вольтметров, амперметра и ваттметра, используя формулы (2) и (3) рассчитываем значения для  $r_L$  и  $L$ .

$$r_L = \frac{P_L}{I^2} \quad (12)$$

$$L = \frac{1}{\Omega} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_L}{I}\right)^2 - r_L^2} \quad (13)$$

Тогда погрешности будут:

$$\sigma_{r_L} = r_L \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{P_L}}{P_L}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2} \quad (14)$$

$$\sigma_L = L \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{P_L}}{P_L}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2} \quad (15)$$

Занесем полученные значения в таблицу 1.

Произведем расчет для среднего положения сердечника:

$$r_L = 9.2 \text{ Ом}, L = 1.09 \text{ Г}$$

Тогда погрешности:

$$\sigma_{r_L} = 0,27 \text{ Ом}, \sigma_L = 0.03 \text{ Г}.$$

Таблица 1: Результаты измерений

$x_{disp}$ см	I, А	$U_R$ , В	$U_L$ , В	$U_{L+R}$ , В	$P_L$ , В	$L$ , Н
0,5	0,825	73	77	115	11,25	2,40
0,7	0,875	78,5	68	113	10	2,10
0,9	0,925	82,5	63	112	9,5	1,87
1,1	0,95	85,5	58	111	9	1,69
1,3	0,975	88	54	110,5	8,75	1,58
1,5	1,0125	90	51	110	8,25	1,46
1,7	1,02	91	48,5	110	8	1,38
1,9	1,025	92	46	109	7,75	1,31
2,1	1,028	92,5	44	109	7,5	1,24

Таблица 2: Расчет  $r_L$  и  $L$  по формулам (3) и (5)

$L$ , Н	$r_L$ , Ом
1,84	16,53
1,53	13,06
1,34	11,1
1,2	9,97
<b>1,09</b>	9,2
0,99	8,05
0,94	7,69
0,89	7,38
0,84	7,1

По результатам измерений составим таблицу и построим графики  $L(x)$  и  $r_L(x)$

### 3.2 Векторная диаграмма напряжений

Для среднего положения сердечника построим векторную диаграмму напряжений:

По теореме косинусов найдем угол  $\psi$  :

$$\cos\psi = 0.88$$

Таким образом рассчитаем:

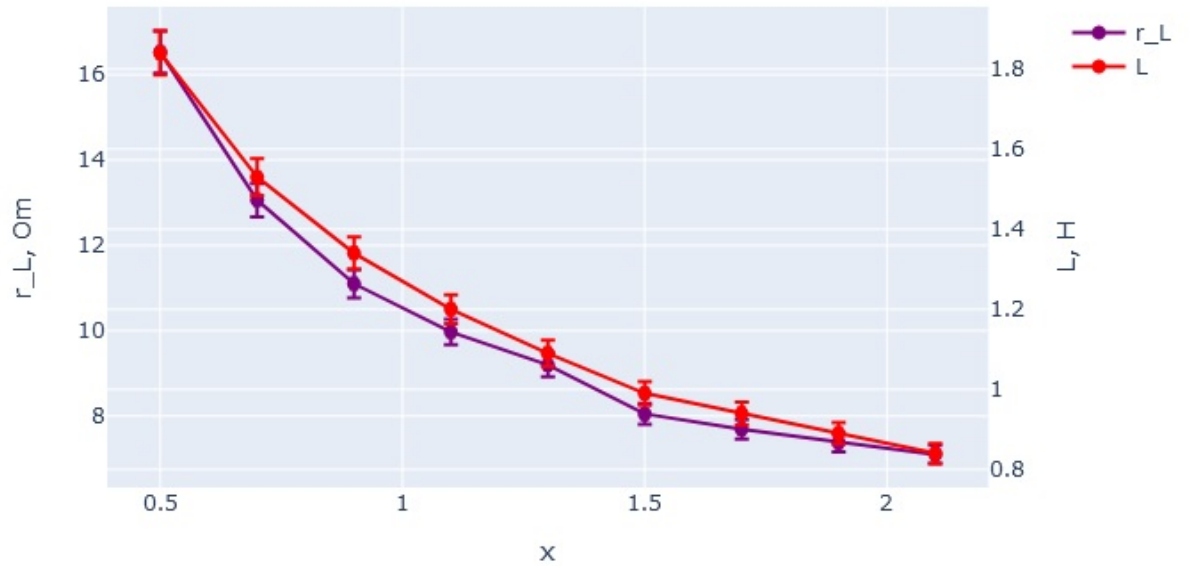


Рис. 3: Графики зависимостей

$$U_{L,act} = U_{L+R} \cdot \cos\psi - U_R = 9,24V$$

$$U_{L,react} = U_{L+R} \cdot \sin(\psi) = 52,47V$$

Зная активное и реактивное сопротивление:

$$L = \frac{U_{L,react}}{I\Omega} = 1,02H$$

$$r_L = \frac{U_{L,act}}{I} = 9,48Om$$

Погрешности при данных измерениях составят:

$$\sigma_{r_L} = r_L \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{U_{L,act}}}{U_{L,act}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2} \quad (16)$$

За погрешность вольтметра берем половину цены деления.

$$\sigma_L = \sigma_{U_{L+R}} + \sigma_{U_R} \quad (17)$$

По формулам (16), (17) получаем, что:

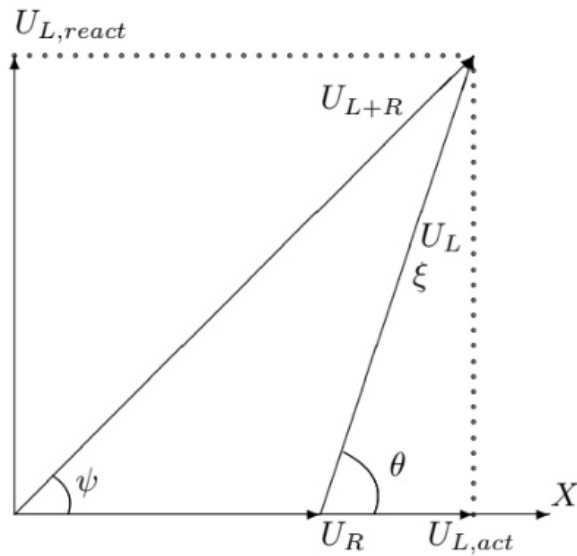


Рис. 4: Векторная диаграмма

### 3.3 Метод трех вольтметров

Вычислим значение  $P_L$  для резонансного положения сердечника  
С помощью векторной диаграммы выразим  $P_L$  следующим образом:

$$P_L = I \cdot U_L \cdot \cos(\theta)$$

,причем

$$I = \frac{U_R}{R_1} \approx 0.89 \text{ A}$$

$$U_L \cdot \cos(\theta) = U_{L,act}$$

Таким образом, получаем результат:

$$P_L = 0.89 \text{ A} \cdot 9.24 \text{ V} \approx 8.22 \text{ Watt}$$

Рассчитанное значение мощности с помощью векторной диаграммы  
 $P_{L,Vect} \approx 8.22 \text{ Watt}$ .



Показания ваттметра для среднего положения  $P_L = 8.75 \text{ Watt}$ . Нетрудно заметить, что полученные значения хорошо совпадают в пределах 5-ти процентов.

### 3.4 Резонансное напряжение

Рассчитаем активное сопротивление катушки  $r_L$  через значения резонансного тока и напряжения

$$r_L = \frac{U_{\Sigma, res}}{I_{res}} - R_2 = 12.67 \text{ Ом}$$

Таблица 3: Расчет  $r_L$  через ток и напряжение

I, A	$U_{\Sigma}$ , В	$r_L$ , Ом
3,35	62	12,67

### 3.5 Расчеты через добротность

Рассчитаем значения  $L$  и  $r_L$  через  $Q$  (  $Q$  находим из формулы (8))

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} \approx 12.8 \text{ H}$$

$$r_L = \frac{\omega_0 L}{Q} - R = 12,8 \text{ Ом}$$

### 3.6 Сведение результатов

Сведем результаты измерения  $L$  и  $r_L$  для резонансного положения сердечника в таблицу

Таблица 4: Результаты измерения  $L$  и  $r_L$

	Мультим.(при 0 Hz)	LCR	Вект.Диаг.	$f(I, U_{\Sigma})$	$f(Q)$
$r_L$ , Ом	2.09	9.2	9.48	12.67	12.8
$L$ , H	-	1.6	1.02	-	1.8

## 4 Вывод

Таким образом, мы экспериментально изучили резонанс напряжения в последовательной цепи переменного тока. Рассчитали сопротивление катушки и ее индуктивность тремя разными способами, соответственно посчитали погрешность.

Среднее значение полученных данных  $L = (1,47 \pm 0,04) \text{ H}$  и  $r_L = (11,04 \pm 0,27) \text{ Ом}$  для среднего положения сердечника (в том числе и при резонансе).

Можем видеть, что погрешность составила примерно 3 процента. Основное расхождение в результатах при разных способах подсчета обуславливается потерями в проводах и погрешностями измерительных приборов.