

Московский физико-технический университет
Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Лабораторная работа № 3.6.1

Спектральный анализ

Работу выполнил:
Шурыгин Антон
Б01-907

г. Долгопрудный
2020

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

Оборудование: анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

1 Теоретическая введение

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Рис. 1 с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения

ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

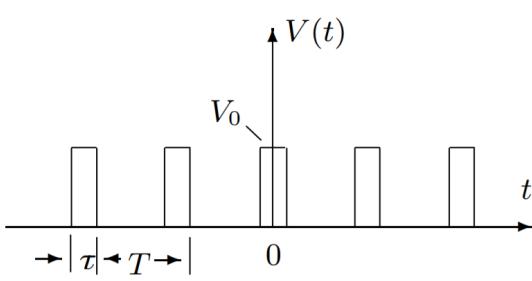


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

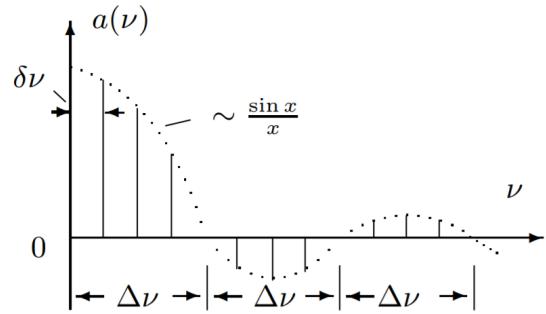


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \tag{1}$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

1.2 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

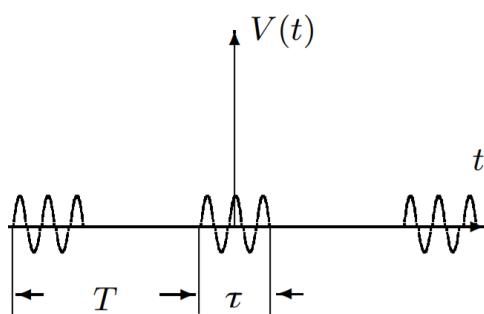


Рис. 3: Последовательность цугов

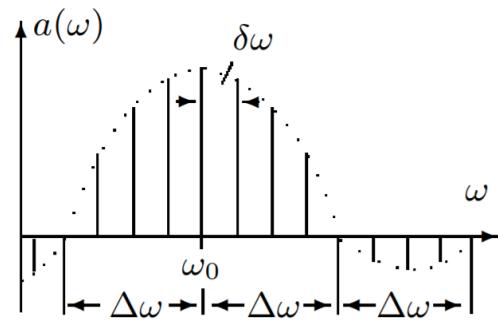


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

1.3 Амплитудно-модулированные колебания.

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (2)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (3)$$

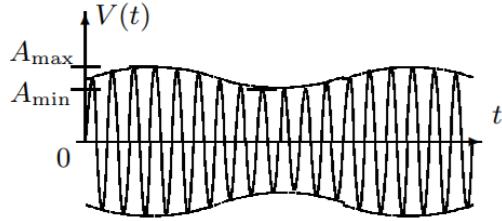


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

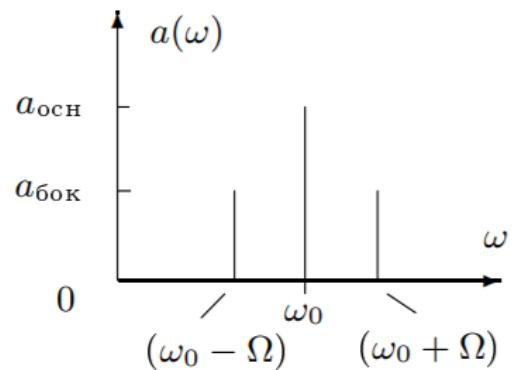


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

2 Экспериментальные установки

2.1 Экспериментальная установка А

Для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 7. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подается на вход анализатора спектра и одновременно на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подается также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развертку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

2.2 Экспериментальная установка Б

Для исследования спектра периодической последовательности пугов гармонических колебаний (рис. 8) Генератор Г6-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) ге-

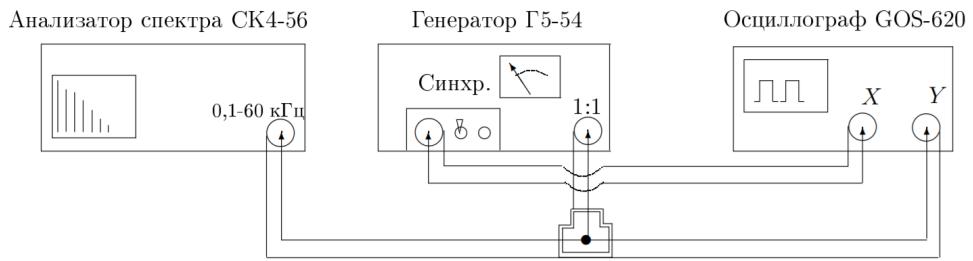


Рис. 7: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

нера тора Г6-34 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется - "нарезается" на отдельные куски - цуги. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход Y осциллографа. Сигнал синхронизации подается на осциллограф с генератора импульсов.

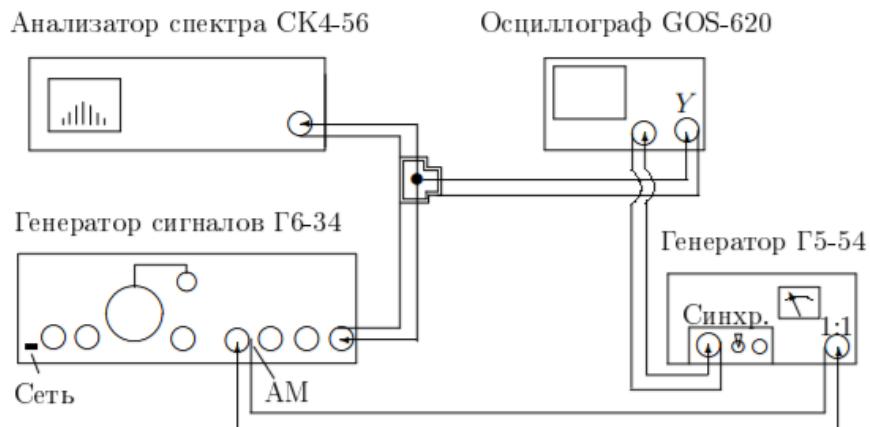


Рис. 8: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

2.3 Экспериментальная установка В

Для исследования амплитудно - модулированного сигнала (рис. 9). В генератор сигналов встроен модуляционный генератор, который расположен в левой части Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f = 1$ кГц подается с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей $\nu_0 = 25$ кГц). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.



Рис. 9: Схема для исследования спектра высокочастотного гармон. сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармон. сигналом

3 Ход работы

3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Соберем схему согласно рис. 7 и включим в сеть только генератор Г5-54. Установив на анализаторе режим работы с однократной развёрткой, получим на его экране спектр импульсов с параметрами $f = 103$ Гц; $\tau = 25$ мкс; частотный масштаб $m_x = 5$ кГц/дел. Полученная картина представлена на рис. 10.

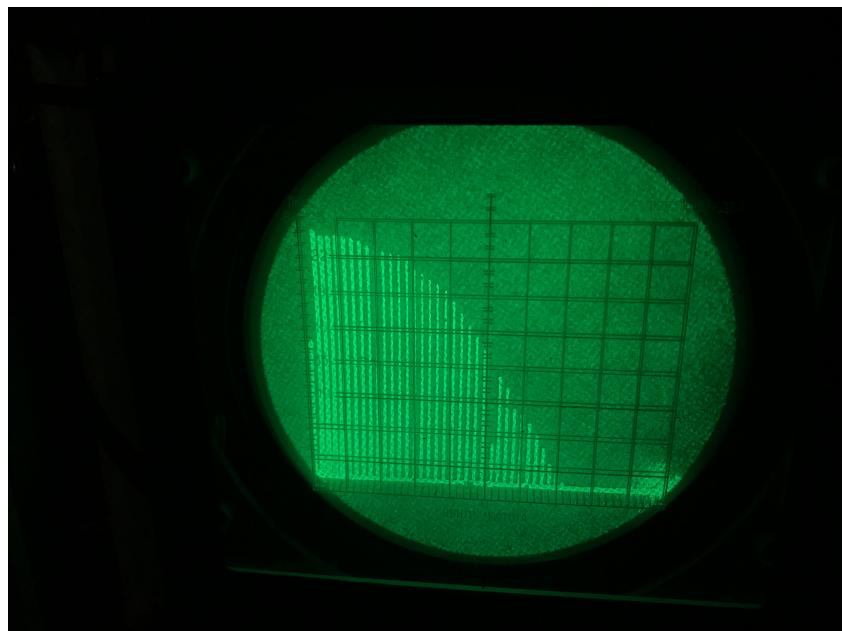


Рис. 10: Спектр прямоугольных импульсов

При увеличении длительности импульсов τ вдвое на экране получаем следующую картину (рис. 16), а при увеличении вдвое f — рис. 17. Таким образом, в первом случае уменьшилась ширина спектра, а во втором — увеличилось расстояние между компонентами спектра.

Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от длительности импульсов, оставляя неизменным $f = 1$ кГц. Результаты занесем в таблицу 1. Построим график зависимости $\Delta\nu \left(\frac{1}{\tau} \right)$.

Из него (рис. 13) получем коэффициент наклона аппроксимированной прямой $y = ax + b$:

$$a = 1,029 \pm 0,017 \quad (4)$$

Это соответствует соотношению неопределённости (1).

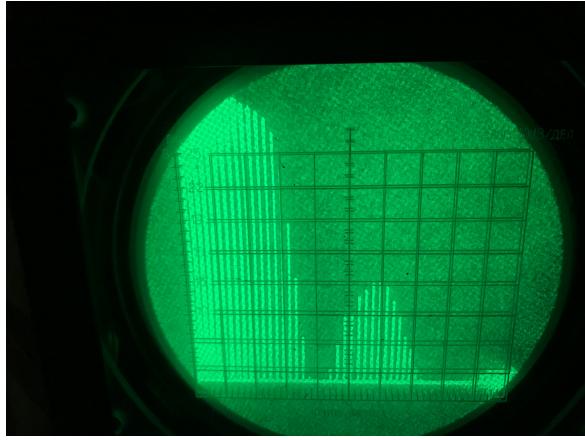


Рис. 11: Спектр прямоугольных импульсов при $\tau=50$ мкс

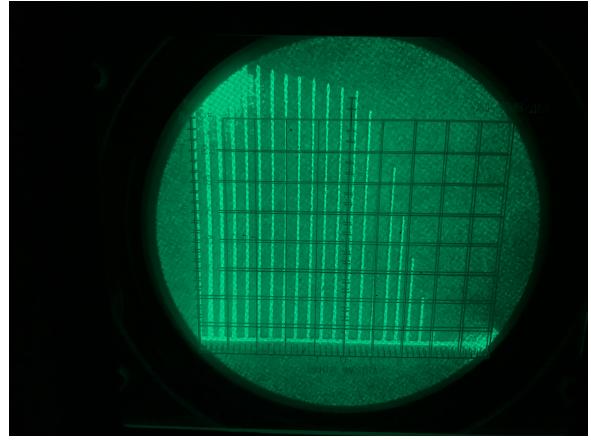


Рис. 12: Спектр прямоугольных импульсов при $f = 2$ кГц

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от длительности импульсов

N	τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\frac{1}{\tau}, 10^{-3} \text{--} 1$
1.	50	17.5	20
2	100	9	10
3	80	13	12
4	120	7.5	8
5	140	6.0	7
6	200	4.0	5

Таблица 2: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate
a	1.029
b	-1.497

3.2 Исследование спектра периодической последовательности щугов гармонических колебаний

Соберём схему, изображённую на рис. 8. Установив частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц, посмотрим, как изменяется вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое (т.е. при $\tau = 50, 100$ мкс, $f = 1$ кГц). Получаем, что ширина спектра уменьшится, а модули спектра (амплитуда) увеличатся.

При фиксированных значениях $f = 1$ кГц, $\tau = 100$ и частотном масштабе $m_x = 5$ кГц/дел посмотрим, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 (на генераторе Г6-34 $\nu_0 = 10, 25, 40$ кГц.).

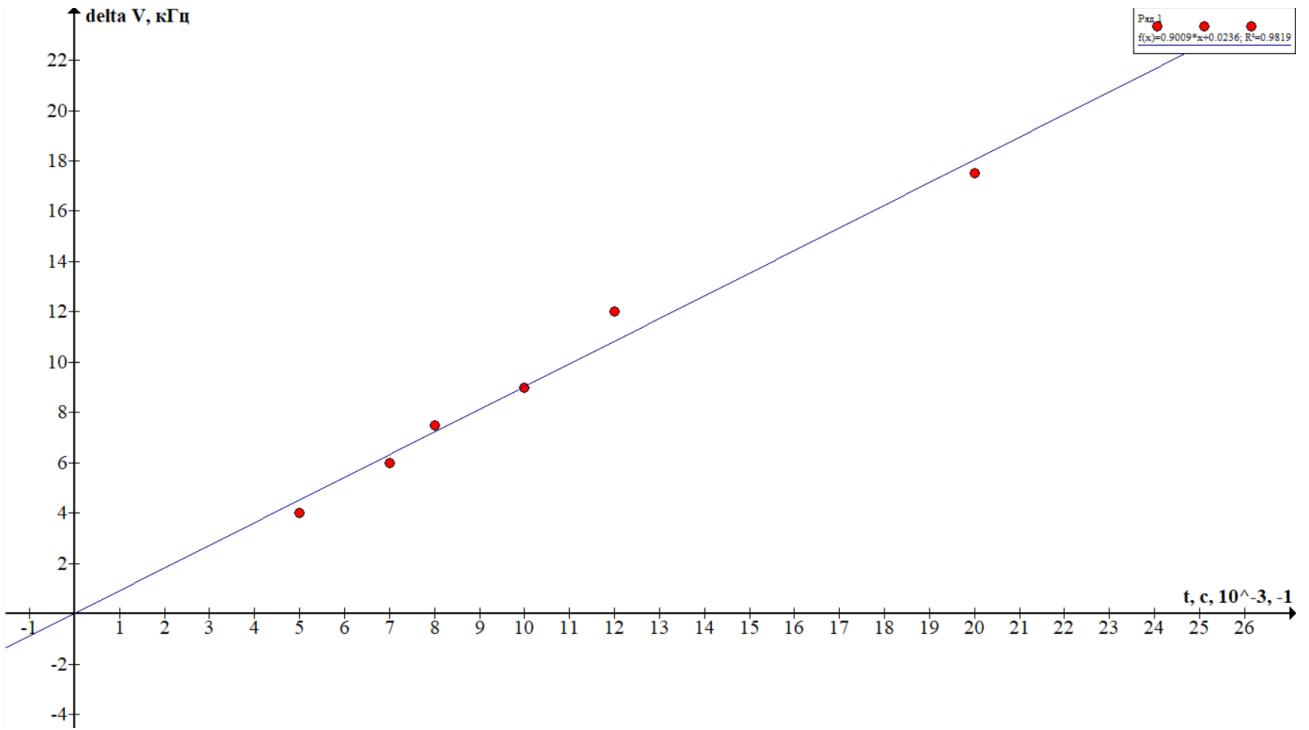


Рис. 13: График зависимости $\Delta\nu \left(\frac{1}{\tau} \right)$.

При фиксированной длительности импульсов $\tau = 50$ мкс исследуем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов f). Проведем измерения для 5 – 6 значений частоты f в диапазоне 1 – 8 кГц, подбирая горизонтальный масштаб mx , удобный для измерений. Результаты занесем в таблицу 3 и построим график зависимости расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов f (рис. 15).

Из графика видно, что при стремлении частоты повторения к нулю стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Соберем схему, изображённую на рис. 9 Изменяя глубину модуляции на Г6-34, исследуем зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $\left(\frac{A_{main}}{A_{bok}} \right)$ от глубины модуляции m , которая находится из отношения амплитуд на осциллографе по формуле (2).

Результаты занесем в таблицу 5 и построим график рис. 18.

Получаем, что наш коэффициент наклона равен

$$a = 0,56 \quad (5)$$

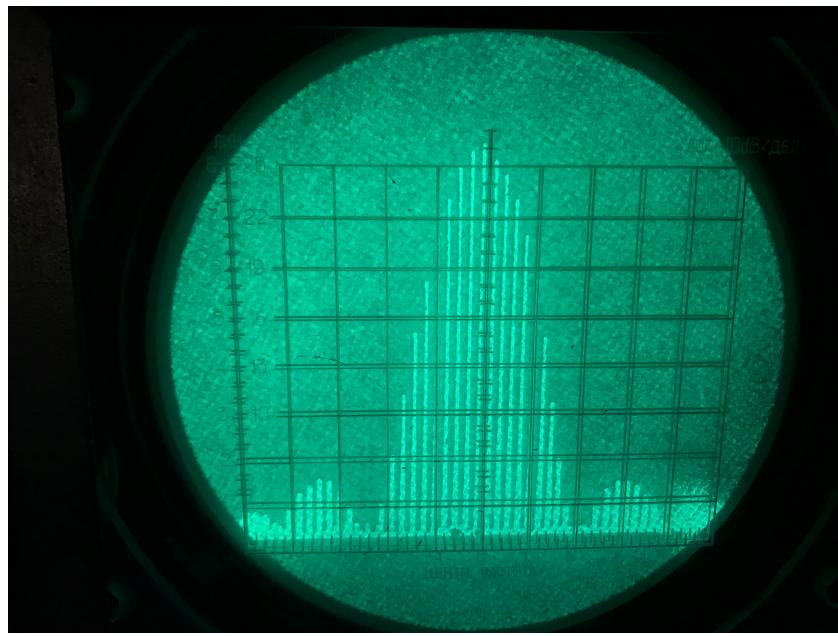


Рис. 14: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 25$ кГц

Таблица 3: Зависимость расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов f

N	f , кГц	$\delta\nu$, кГц
1	1.0	1.2
2	2.0	2.3
3	3.5	3.7
4	5.0	5.6
5	6.5	7.2
6	8.0	9.0

Таблица 4: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate
a	1.15
b	-0.0154

что примерно совпадает с теоретическим значением из формулы (3).

4 Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сиг-

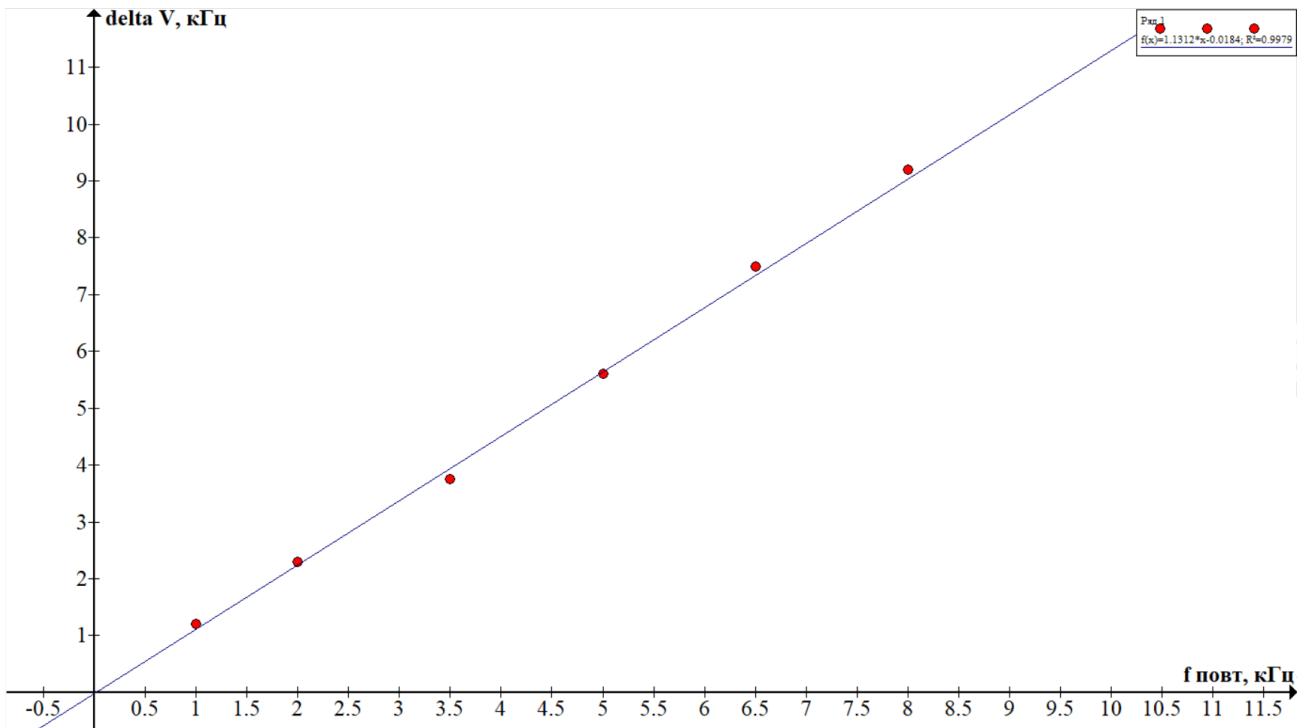


Рис. 15: График зависимости расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов f

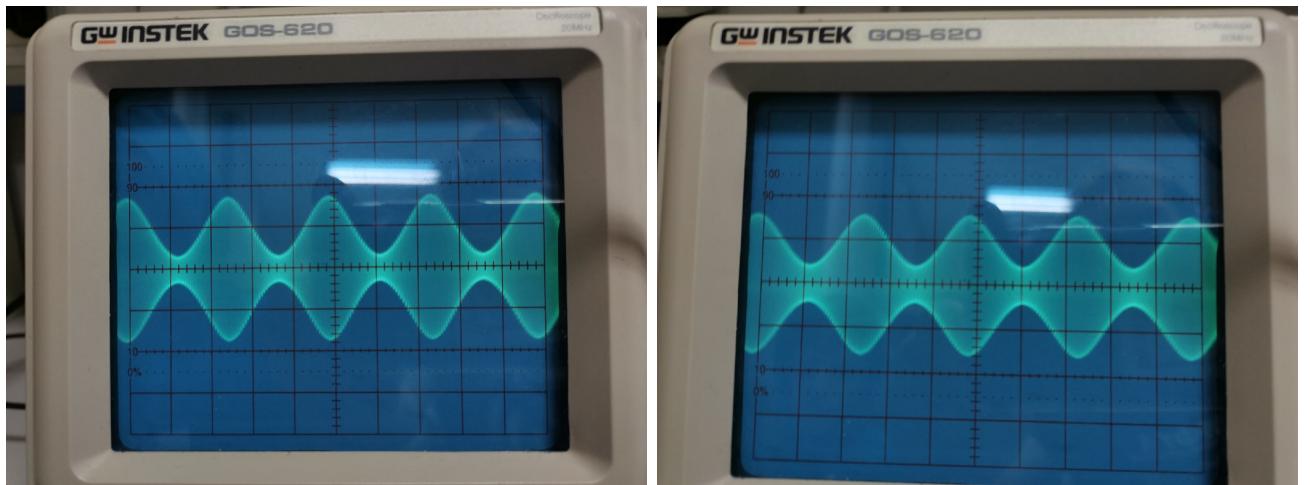


Рис. 16: Измерение глубины модуляции, $mx = 0.5 \text{ msec}$

Рис. 17: Измерение глубины модуляции, $mx = 0.5 \text{ msec}$

налов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.

Таблица 5: Зависимость отношения амплитуд спектра от глубины модуляции

N	m	$\frac{A_{main}}{A_{bok}}$
1	0.4	0.20
2	0.6	0.36
3	0.8	0.40
4	0.9	0.44
5	1	0.60

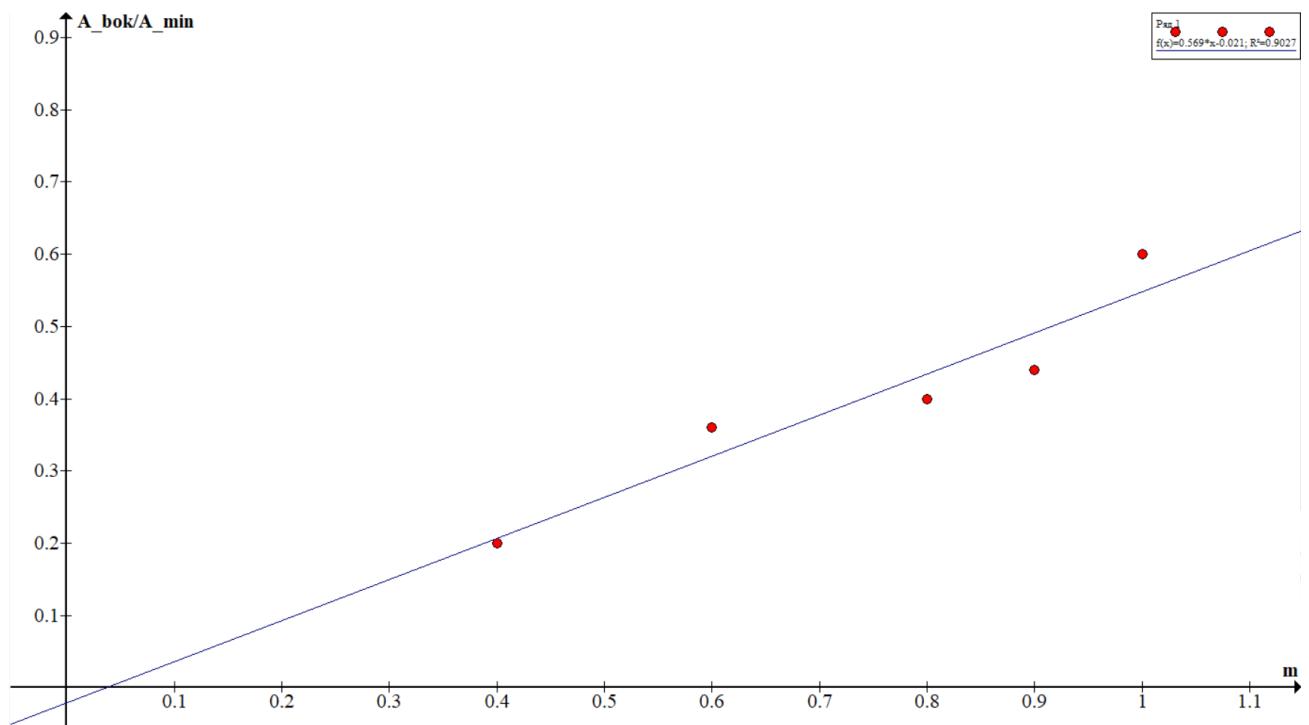


Рис. 18: График зависимости отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $\left(\frac{A_{main}}{A_{bok}}\right)$ от глубины модуляции m

Таблица 6: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate
a	0.569
b	-0.021