

Московский физико-технический университет  
Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Лабораторная работа № 3.6.1

## **Спектральный анализ**

Работу выполнил:  
Шурыгин Антон  
Б01-909

г. Долгопрудный

**Цель работы:** изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

**Оборудование:** анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

## 1 Теоретическая введение

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь  $\frac{a_0}{2}$  - среднее значение функции  $f(t)$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

### 1.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Рис. 1 с амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $a_n$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда  $T$  кратно  $\tau$ ).

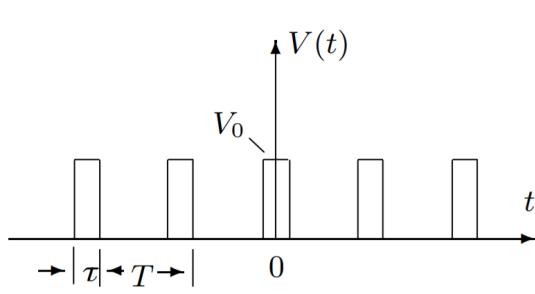


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

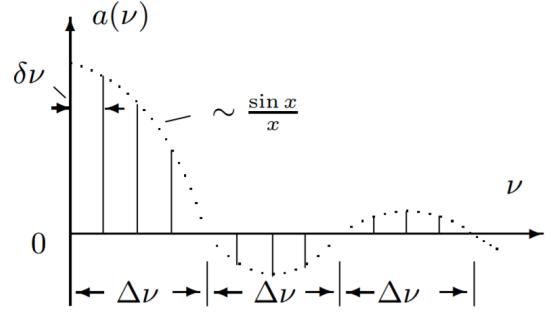


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем *шириной спектра*  $\Delta\omega$  расстояние от главного максимума ( $\omega = 0$ ) до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (1)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

## 1.2 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. 3).

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Зависимость для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и щугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

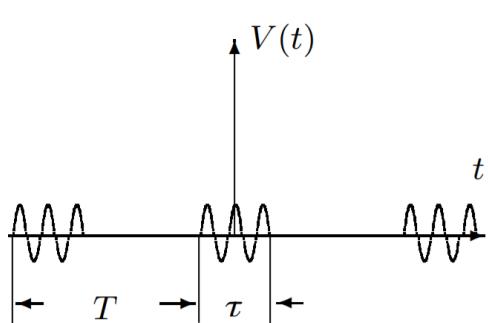


Рис. 3: Последовательность щугов

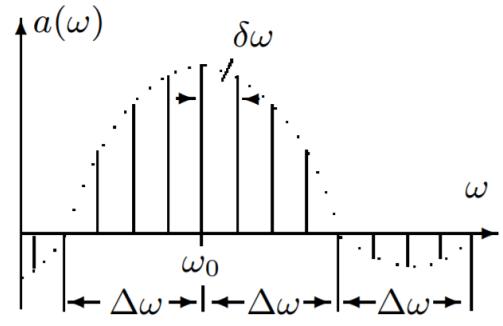


Рис. 4: Спектр последовательности щугов

### 1.3 Амплитудно-модулированные колебания.

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент  $m$  называют **глубиной модуляции**. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (2)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (3)$$

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a = A_0$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Амплитуды этих

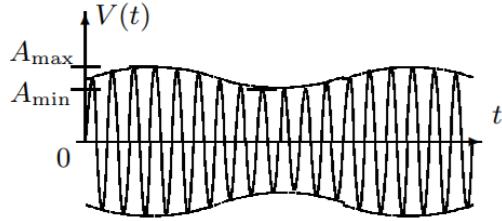


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

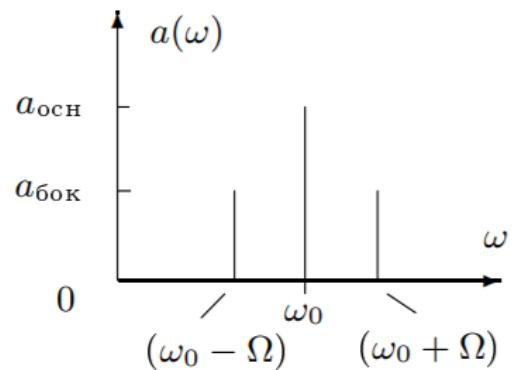


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

два колебания одинаковы и составляют  $\frac{m}{2}$  от амплитуды немодулированного колебания:  $a = \frac{A_0 m}{2}$ . Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

## 2 Экспериментальные установки

### 2.1 Экспериментальная установка А

Для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 7. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подается на вход анализатора спектра и одновременно на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подается также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развертку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

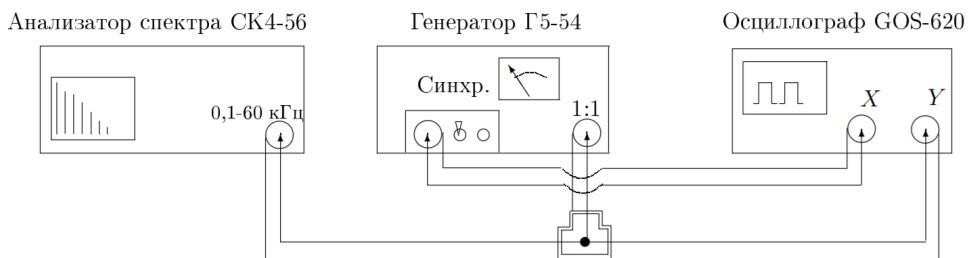


Рис. 7: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

## 2.2 Экспериментальная установка Б

Для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний (рис. 8) Генератор Г6-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) генератора Г6-34 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется - "нарезается" на отдельные куски - цуги. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход Y осциллографа. Сигнал синхронизации подается на осциллограф с генератора импульсов.

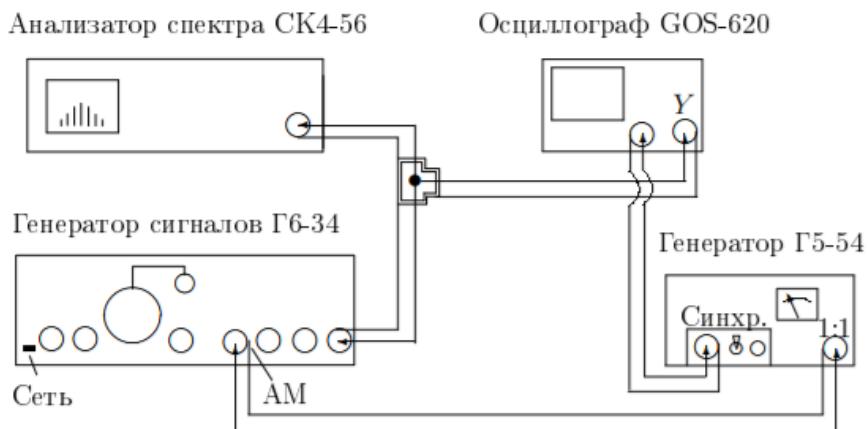


Рис. 8: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

## 2.3 Экспериментальная установка В

Для исследования амплитудно - модулированного сигнала (рис. 9). В генератор сигналов встроен модуляционный генератор, который расположен в левой части Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции  $f = 1$  кГц подается с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей  $\nu_0 = 25$  кГц). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

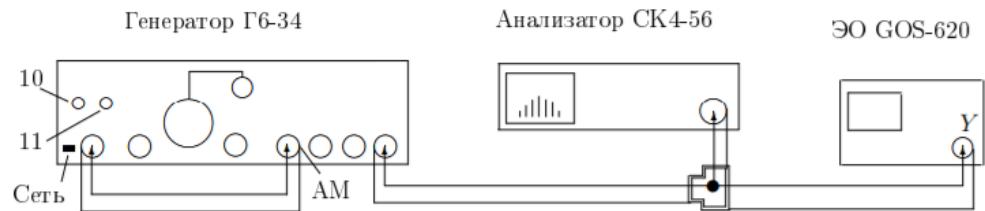


Рис. 9: Схема для исследования спектра высокочастотного гармон. сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармон. сигналом

### 3 Ход работы

#### 3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Соберем схему согласно рис. 7 и включим в сеть только генератор Г5-54. Установив на анализаторе режим работы с однократной развёрткой, получим на его экране спектр импульсов с параметрами  $f = 103$  Гц;  $\tau = 25$  мкс; частотный масштаб  $m_x = 5$  кГц/дел. Полученная картина представлена на рис. ??.

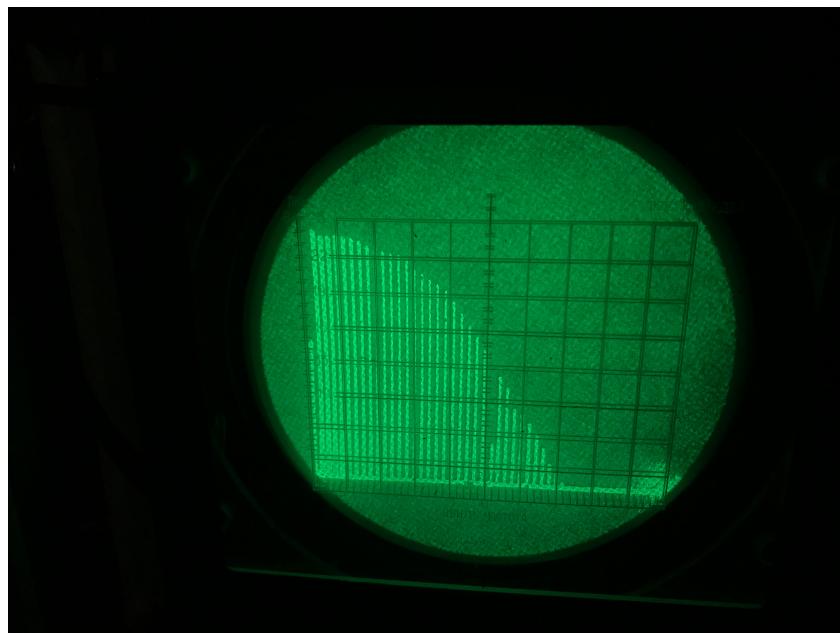


Рис. 10: Спектр прямоугольных импульсов

При увеличении длительности импульсов  $\tau$  вдвое на экране получаем следующую картину (рис. ??), а при увеличении вдвое  $f$  — рис. ???. Таким образом, в первом случае уменьшилась ширина спектра, а во втором — увеличилось расстояние между компонентами спектра.

Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от длительности импульсов, оставляя неизменным  $f = 1$  кГц. Результаты занесем в таблицу ???. Построим график зависимости  $\Delta\nu \left( \frac{1}{\tau} \right)$ .

Из него (рис. 13) получем коэффициент наклона аппроксимированной прямой  $y = ax + b$ :

$$a = 1,029 \pm 0,017 \quad (4)$$

Это соответствует соотношению неопределённости (??).

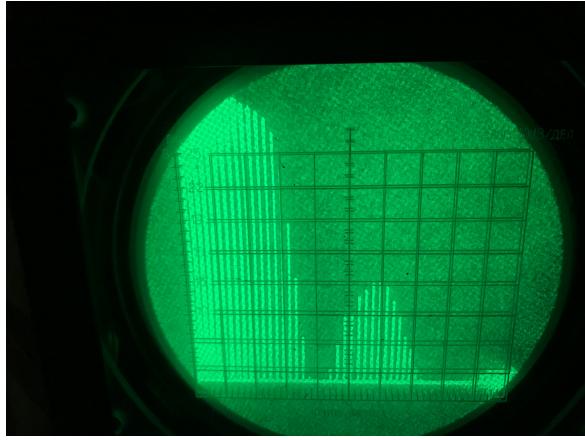


Рис. 11: Спектр прямоугольных импульсов при  $\tau=50$  мкс

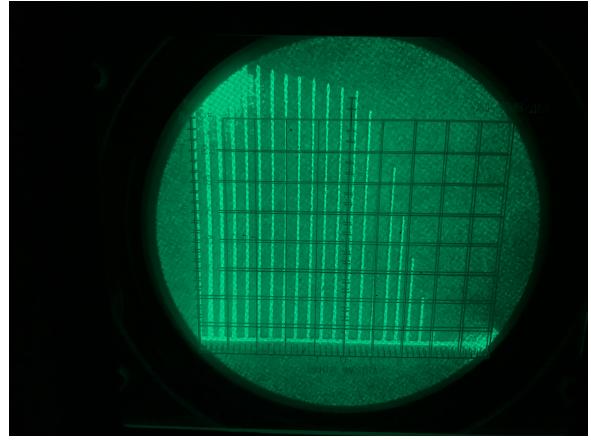


Рис. 12: Спектр прямоугольных импульсов при  $f = 2$  кГц

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от длительности импульсов

$N$	$\tau$ , мкс	$\Delta\nu$ , кГц	$\frac{1}{\tau}$ , $10^{-3} \text{--} 1$
1.	50	17.5	20
2	100	9	10
3	80	13	12
4	120	7.5	8
5	140	6.0	7
6	200	4.0	5

Таблица 2: Расчет аппроксимированной прямой  $y = ax + b$

	Estimate
a	1.029
b	-1.497

### 3.2 Исследование спектра периодической последовательности щугов гармонических колебаний

Соберём схему, изображённую на рис. ???. Установив частоту несущей  $\nu_0 = 25$  кГц, посмотрим, как изменяется вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое (т.е. при  $\tau = 50, 100$  мкс,  $f = 1$  кГц). Получаем, что ширина спектра уменьшится, а модули спектра (амплитуда) увеличатся.

При фиксированных значениях  $f = 1$  кГц,  $\tau = 100$  и частотном масштабе  $m_x = 5$  кГц/дел посмотрим, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты  $\nu_0$  (на генераторе Г6-34  $\nu_0 = 10, 25, 40$  кГц.).

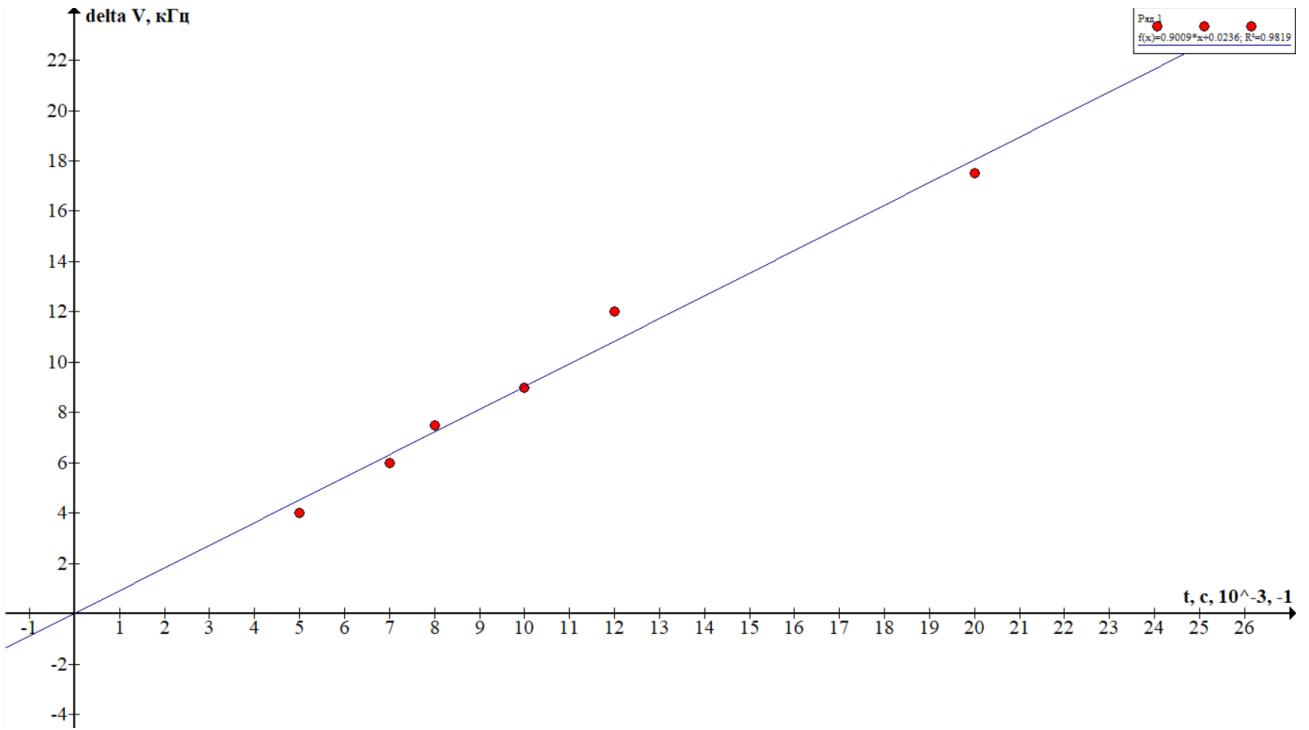


Рис. 13: График зависимости  $\Delta\nu \left( \frac{1}{\tau} \right)$ .

При фиксированной длительности импульсов  $\tau = 50$  мкс исследуем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от периода  $T$  (частоты повторения импульсов  $f$ ). Проведем измерения для 5 – 6 значений частоты  $f$  в диапазоне 1 – 8 кГц, подбирая горизонтальный масштаб  $mx$ , удобный для измерений. Результаты занесем в таблицу ?? и построим график зависимости расстояния между компонентами спектра  $\delta\nu$  от частоты повторения импульсов  $f$  (рис. 15).

Из графика видно, что при стремлении частоты повторения к нулю стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

### 3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Соберем схему, изображённую на рис. ?? Изменяя глубину модуляции на Г6-34, исследуем зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии  $\left( \frac{A_{main}}{A_{bok}} \right)$  от глубины модуляции  $m$ , которая находится из отношения амплитуд на осциллографе по формуле ??).

Результаты занесем в таблицу ?? и построим график рис. 18.

Получаем, что наш коэффициент наклона равен

$$a = 0,56 \quad (5)$$

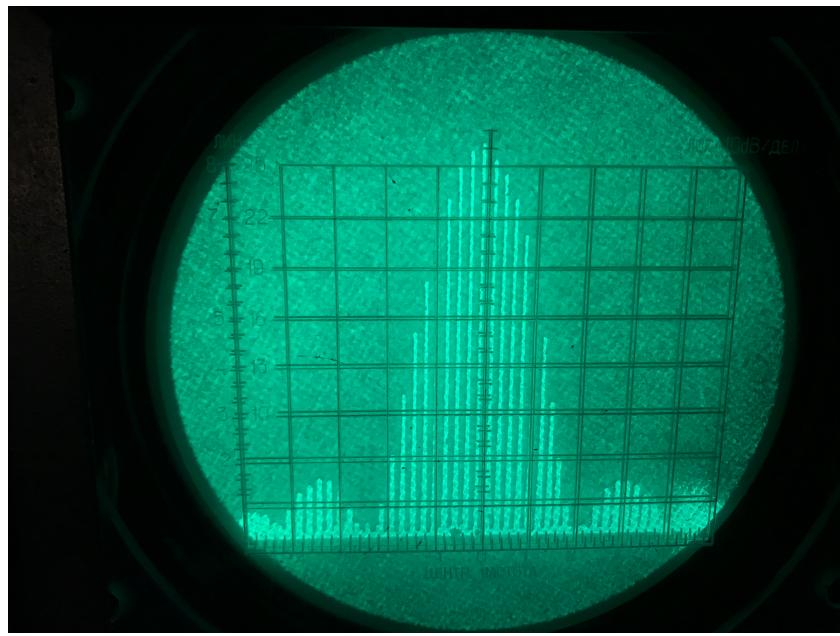


Рис. 14: Спектр при частоте несущей  $\nu_0 = 25$  кГц

Таблица 3: Зависимость расстояния между компонентами спектра  $\delta\nu$  от частоты повторения импульсов  $f$

$N$	$f$ , кГц	$\delta\nu$ , кГц
1	1.0	1.2
2	2.0	2.3
3	3.5	3.7
4	5.0	5.6
5	6.5	7.2
6	8.0	9.0

Таблица 4: Расчет аппроксимированной прямой  $y = ax + b$

	Estimate
a	1.15
b	-0.0154

что примерно совпадает с теоретическим значением из формулы (??).

## 4 Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сиг-

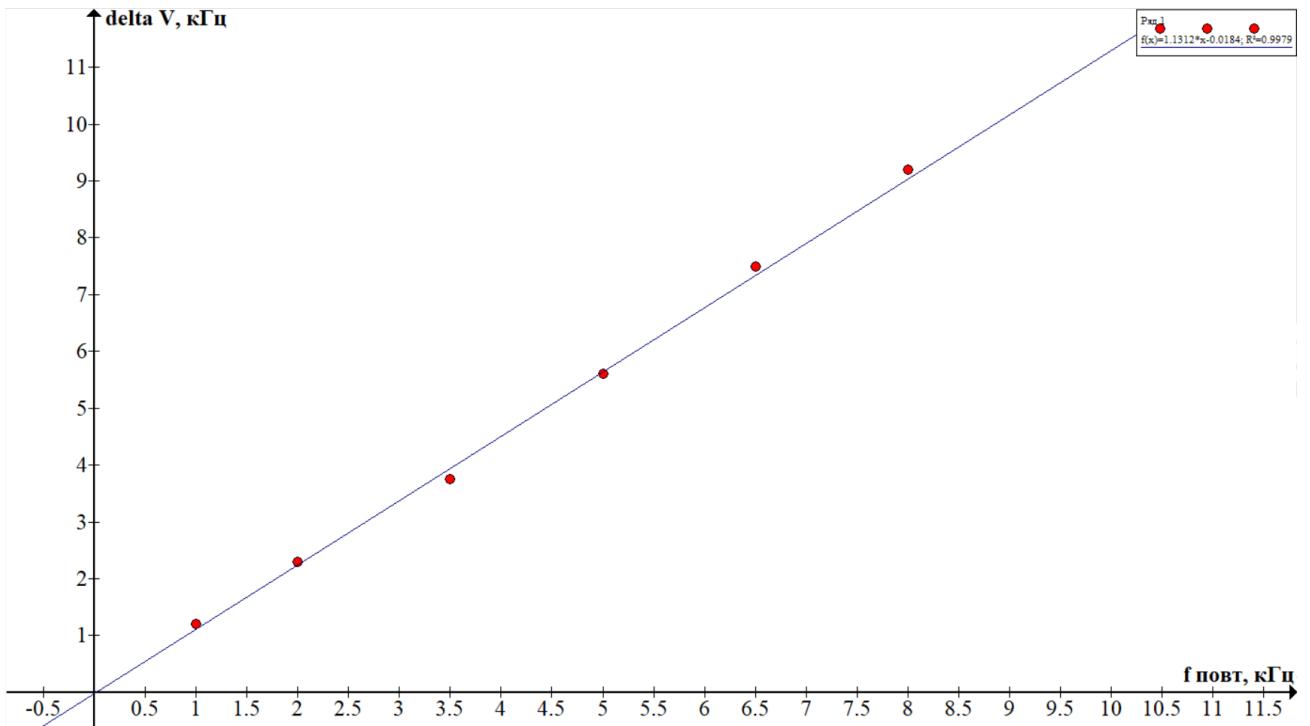


Рис. 15: График зависимости расстояния между компонентами спектра  $\delta\nu$  от частоты повторения импульсов  $f$

[pics/PəPəPəPəCS-CSR« СЖРxСГР,,CS 2.jpg](#) [pics/PəPəPəPəCS-CSR« СЖР](#)

Рис. 16: Измерение глубины модуляции,  $mx = 0.5 \text{ msec}$  Рис. 17: Измерение глубины модуляции,  $mx = 0.5 \text{ msec}$

налов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.

Таблица 5: Зависимость отношения амплитуд спектра от глубины модуляции

$N$	$m$	$\frac{A_{main}}{A_{bok}}$
1	0.4	0.20
2	0.6	0.36
3	0.8	0.40
4	0.9	0.44
5	1	0.60

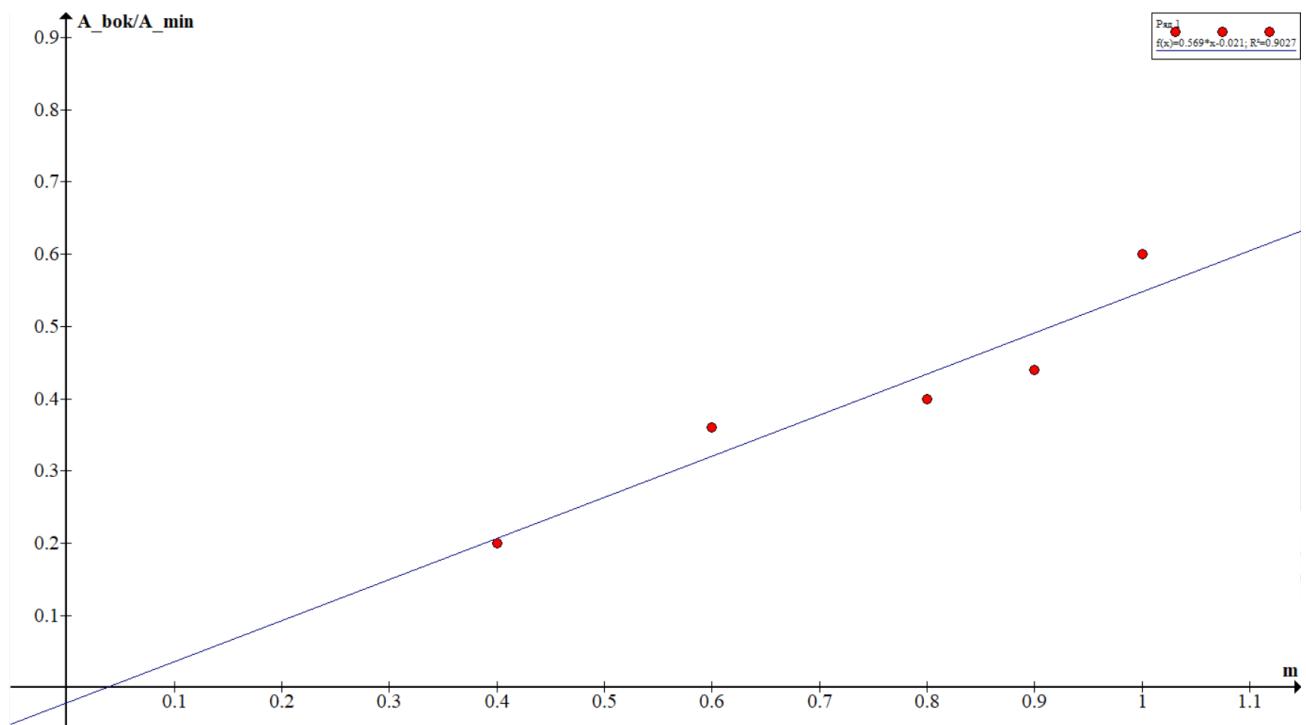


Рис. 18: График зависимости отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии  $\left(\frac{A_{main}}{A_{bok}}\right)$  от глубины модуляции  $m$

Таблица 6: Расчет аппроксимированной прямой  $y = ax + b$

	Estimate
a	0.569
b	-0.021