HW #7 벡터공간

MathVision22
02221081 황지현

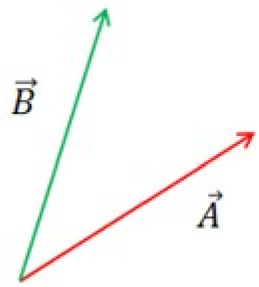
Q1. 다음 O, X 문제에 답하고 그 이유를 설명 또는 증명하시오.

1) 한 벡터공간의 Basis(기저벡터)는 유일하게(Unique) 존재한다. : X

- 한 벡터공간의 Basis 는 무한히 존재한다.
  ex) 한 벡터공간 안에 Standard Basis ({i, j, k}, i=(1, 0, 0), j=(0, 1, 0), k=(0, 0, 1))가 존재할 때, 동시에 다른 basis {(2, 0, 3), (1, 2, 0), (0, 1, 1)} 도 함께 존재한다.

- 단, 벡터들의 Linear Combination 의 scalar 값은 유일하게(Unique) 존재한다.

2) Basis 를 구성하는 벡터들은 서로 수직이다. : X



- 수직이 아닌 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 가 있을 때에도
  $k_1 \cdot \vec{A} + k_2 \cdot \vec{B}$ 를 활용하면 모든 case 를 만들 수 있다.
  (in R^2 , k_1 와 k_2 는 양수, 음수의 scalar)

3) If a vector space V has a basis consisting of *n* Vectors, then every basis of V consists of *n* Vectors. : O

- 기저벡터는 벡터공간에서 각각의 축 방향을 가리키는 단위 벡터이기 때문에 벡터공간이 n 차원으로 구성되어 있다면 그 안에서 만들어지는 모든 기저 벡터또한 n 차원이 된다.

- ex) R^3 을 구성하는 축은 (x, y, z)로, 각 축 방향을 가리키는 단위 벡터의 차원 또한 3

4) If $S=\{v1,...,vn\}$ is a basis for a vector space V, then every vector in V can be written in one and only one way as a linear combination of the vectors in S. : O

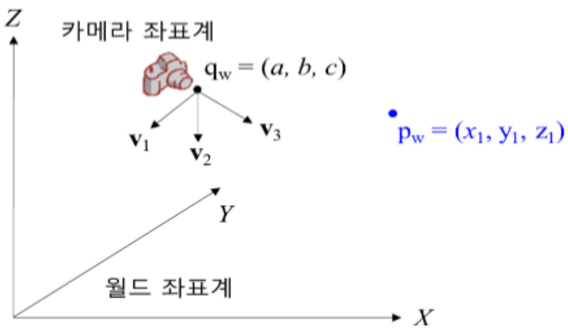
- S 에 속한 벡터들을 각각 c_1 , c_2 ,⋯ , c_n 배 하여 더하면 다음과 같다.
  $\sum_{i=1}^{n} c_1 v_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$

- S 를 standard basis 라고 가정하였을 때, $\sum_{i=1}^{n} c_1 v_1 = 0$ 을 만족하는 유일한 해는
  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 뿐이다.

- 임의의 벡터공간에서 S 의 벡터들의 선형결합이 0 이 되는 경우에 $\sum_{i=1}^{n} c_1 v_1 = 0$ 를 만족하는 경우가
  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 가 유일한 경우 이는 선형독립이다.

HW#7. Change of Basis 응용

- Q3. 점의 좌표(coordinate)는 좌표계에 따라 정의되는 상대적인 값이다. 3차원 공간에 아래 그림처럼 월드좌표계와 카메라좌표계가 있다고 하자. 카메라좌표계는 **q**를 중심으로 세 개의 직교 단위벡터 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$에 의해 정의된다 (**q**가 원점, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 는 좌표축 Xc, Yc, Zc에 대응). 이 때, 공간상의 임의의 점 **p**의 월드좌표를 $\mathbf{p}_w$, 카메라좌표를 $\mathbf{p}_c$ 라 하면 두 좌표표현 사이의 변환식은 일반적으로 식 $\mathbf{p}_c$ = R$\mathbf{p}_w$ + **t** 과 같이 주어진다(단, R은 두 좌표계 사이의 3x3 회전변환 행렬, **t**는 평행이동 벡터). 이 때, R은 $\mathbf{v}_1$을 첫 번째 행벡터, $\mathbf{v}_2$를 두 번째 행벡터, $\mathbf{v}_3$를 세 번째 행벡터로 하는 행렬이 되고, 카메라좌표계의 원점 **q**의 월드좌표는 $\mathbf{q}_w$ = -R^T**t**가 됨을 설명 또는 증명하시오.



1) R 행렬 증명 (p_c = R p_w + t)

- $p_c = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_w & q_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot p_w - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} . q_w$

- 주어진 식과 비교 해 보면, R = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 임을 알 수 있다.

2) $q_w = -R^T t$ 증명

- $p_c = 0$
- R p_w + t = 0
- (-t) = R p_w
- $p_w = -R^{-1} t$

- $p_w = -R^{-1} t \quad (R^{-1} = R^T)$

HW#7. Change of Basis

- Q2. {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$}를 벡터공간 V의 한 **orthonormal basis**라 하자. 이 때, V의 임의의 벡터 $\mathbf{w} \in V$를 $\mathbf{v}_i$들의 일차결합 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$로 표현했을 때, 계수 c_i는 $c_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i$임을 보이시오.

- orthonormal basis 의 경우 일차결합의 계수(c_i) 는 내적을 통해 계산이 가능하다.

- w = $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$

- w· v_1 = ($c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$)· v_1

$$= c_1 v_1 \cdot v_n + c_2 v_2 \cdot v_{n-1} + \cdots + c_n v_n \cdot v_1$$
$$= c_1 + 0 + \cdots + 0$$
$$= c_1$$

- 즉, c_1 = w· v_1 임을 볼 수 있다.

고찰

기존에 알고있던 벡터와 내적등에 대한 개념에서 더 확장하여 직교행렬과 벡터공간, 랭크 등 좀 더 폭 넓게 알아갈 수 있었고 여러가지 정의를 증명해내는 과정들을 살펴볼 수 있어 좋았습니다.
학부에서 선형대수의 기본에 대해 배웠지만 다시 살펴보며 다양한 문제에 적용해보니 색다르게 느껴졌고, 이전 과제에서 좌표변환 문제를 이해하는데 어려움을 겪었었는데 이번 과제를 통해 이를 조금 더 이해해 나갈 수 있었습니다.