HW #8 고유벡터

MathVision22
02221081 황지현

Q1. 다음 **O**, **X** 문제에 답하고 그 이유를 설명 또는 증명하시오.

1) Eigenvalues and eigenvectors are defined only for square matrices : O

- 만약 A 가 (m*n)의 행렬이라면, Ax = λ x 식에서 x 는 (n*1), λ 는 (m*1)의 구조를 가져야 한다.
  하지만 이는 입력 vector 의 차원이 변형되기 때문에 eigenvalues 와 eigenvectors 는
  square matrices 가 되어야만 한다.

2) Every eigenvector is not zero vector : O

- zero vector 의 경우 Ax = λ x 를 만족하지만, definition 에 의해 eigenvector 가 될 수 없다.

3) Eigenvector corresponding to an eigenvalue is unique : O

- 아래 Q2 의 문제와 그 답을 보았을 때,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ax = λ x 를 만족하는 eigenvalue 와 eigenvector

eigenvalue = 1, eigenvector = b (2, 0, 1) + c (0, 1, 0) 로 특정되는 것을 볼 수 있다.

- 그러므로 eigenvector 가 특정한 eigenvalue 에서 나온 경우, eigenvector 는 unique 하다.

- **Q2**. 다음 행렬의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

det(A-λI) = $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ = $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$ = 0

∴ λ = 2, 1

2) in λ = 2,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, x = y, z = 0

∴eigenvalue = 2, eigenvector = a (1, 1, 0)
(a ∈ R)

3) in λ = 1,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x - 2z = 0, x = 2x

∴eigenvalue = 1, eigenvector = b (2, 0, 1) + c (0, 1, 0)
(b,c ∈ R)

- **Q3**. 다음 미분방정식의 해를 구하시오 (단, x(0) = 1, y(0) = 0)

$$\dot{x} = x + 3y$$
$$\dot{y} = 3x + y$$

1) A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

det(A-λI) = $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ = $(\lambda-4)(\lambda+2)$ = 0

∴ λ = 4, -2

2) in λ = 4,

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, x = y

∴eigenvalue = 4, eigenvector = a (1, 1)
(a ∈ R)

3) in λ = -2,

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, x = -y

∴eigenvalue = -2, eigenvector = b (1, -1)
(b ∈ R)

4) $A=VDV^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

5) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ▶ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

6) $V^{-1}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}V^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=V^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\dot{c}=4c$, $\dot{d}=-2d$

8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=V\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ce^{4t} \\ De^{-2t} \end{pmatrix}$, $c=Ce^{4t}$, $d=De^{-2t}$

∴ $x(t)=-e^{4t}-e^{-2t}$, $y(t)=-e^{4t}+e^{-2t}$

결론

eigenvalues 와 eigenvectors 에 대해 이해할 수 있었다.
또한 이와 특성방정식 등을 활용하여 여러 값들을 계산하고 미분방정식의 풀이에도 적용하여 문제를 풀어나갈 수 있음을 알 수 있었다.