

ベクトル解析

2022 年 6 月 18 日

1 直交曲線座標系でのベクトル演算子

直交曲線座標系を (t_1, t_2, t_3) ととる (例えば極座標 (r, θ, ϕ) など). t_i の方向に距離 ds_i だけ移動すると, 座標は $t_i + dt_i$ になる. 逆に, 座標 $t_i + dt_i$ になるには, 距離 ds_i だけ移動しなければならないとも言える. このとき dt_i と ds_i の間には $ds_i = h_i dt_i$ という関係が成り立つ. h_i は t_j の関数である.

1.1 勾配 (gradient)

あるスカラー関数 f について, ある点から, その点の周りで値が最も大きくなる方向はどちらかを知りたい. つまり, 勾配 (gradient) を求めたい. そのためには, 各方向について, 少しだけ移動してみて, その変化具合を調べればよい. デカルト座標系では, x 方向ならば dx 移動して $f(x + dx)$ の値を調べてくれば, x 方向の傾きがわかる. 一般の直交曲線座標系では t_i 方向に移動して $f(t_i + dt_i)$ を調べるには, ds_i だけ移動する必要がある. したがって勾配は

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial t_i}$$

となる.

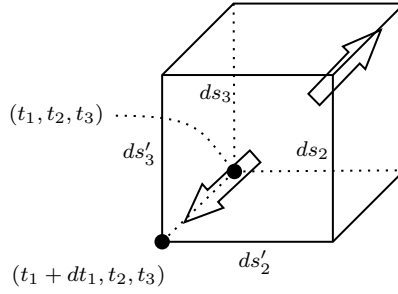
静電場と静電ポテンシャルの関係式

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$$

は, 電場は, 静電ポテンシャルが最もはやく減る方向を向いていることを意味している.

1.2 発散 (divergence)

ベクトル関数 f について, ベクトルは大きさを持った矢印で, 流れのようなイメージを持つ. 流れというからには発生源があるだろうから, その「湧き出し」というものを調べたい. これが発散 (divergence) である. そのためには, 微小体積の領域を考えて, その領域での流出量を調べればよい. 流出量が正ならば, その領域には流れの発生源があることになる.



まずは t_1 軸に直交する 2 つの面からの流出量を考えよう． t_1 軸に向かう方向の面からの流出を $f(t_1 + dt_1, t_2, t_3)$ に、逆方向の面からの流出を $f(t_1, t_2, t_3)$ に代表させることにする．普通の領域を考えると時には面上でも f の値は変わるから面積分をしなければいけないのだが、今回は微小面積なので、面上の一点を代表して使う近似を用いる．そうすると流出量は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
 & f_1(t_1 + dt_1, t_2, t_3) ds'_2 ds'_3 - f_1(t_1, t_2, t_3) ds_2 ds_3 \\
 &= \left(f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 \right) \left(h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial t_1} dt_1 \right) dt_2 \left(h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial t_1} dt_1 \right) dt_3 - f_1 h_2 h_3 dt_2 dt_3 \\
 &= \left(f_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial t_1} dt_1 + f_1 h_3 \frac{\partial h_2}{\partial t_1} dt_1 + h_2 h_3 \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 \right) dt_2 dt_3 \\
 &= \frac{\partial}{\partial t_1} (f_1 h_2 h_3) dt_1 dt_2 dt_3
 \end{aligned}$$

途中の計算で 4 次以上の項は無視した．同様に t_2 方向、 t_3 方向についても流出量を計算すると、全体で合計は

$$dt_1 dt_2 dt_3 \sum_i \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 f_i}{h_i} \right)$$

となる．ところで、微小体積は (h_i が t_j によるので) 座標によって変わってしまう．つまり上の結果には領域のとり方の影響が残っている．微小体積 $dV = ds_1 ds_2 ds_3$ で割ることで、単位体積あたりの流出量となつて、これは領域のとり方によらない値となる．これが発散である：

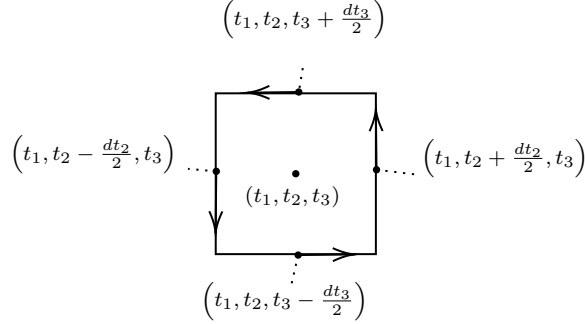
$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 f_i}{h_i} \right)$$

電場と電荷密度の関係式

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0}$$

は、電場は電荷から湧き出てくる（発生する）ことを意味している．

1.3 回転 (rotation)



ベクトル関数 \mathbf{f} について、今度は流れの「渦っぽさ」というものを調べる。これが回転 (rotation) である。渦というのは 2 次元的なイメージなので、3 次元空間ならばそれは 3 方向あることになる。したがって回転はベクトル量となる。まず t_1 方向に直交する面について、中心を (t_1, t_2, t_3) として、 t_2, t_3 軸方向と平行な辺を持つ以下のような四角形を考える。 t_2 軸に平行な方向について、

$$\begin{aligned}
 & f_2(t_1, t_2, t_3 - \frac{dt_3}{2}) ds_2 - f_2(t_1, t_2, t_3 + \frac{dt_3}{2}) ds'_2 \\
 &= dt_2 \left[\left(f_2 - \frac{dt_3}{2} \frac{\partial f_2}{\partial t_3} \right) \left(h_2 - \frac{dt_3}{2} \frac{\partial h_2}{\partial t_3} \right) - \left(f_2 + \frac{dt_3}{2} \frac{\partial f_2}{\partial t_3} \right) \left(h_2 + \frac{dt_3}{2} \frac{\partial h_2}{\partial t_3} \right) \right] \\
 &= dt_2 \left(-f_2 \frac{\partial h_2}{\partial t_3} dt_3 - \frac{\partial f_2}{\partial t_3} h_2 dt_3 \right) \\
 &= -dt_2 dt_3 \frac{\partial}{\partial t_3} (f_2 h_2)
 \end{aligned}$$

である。 t_3 軸に平行な方向は、

$$\begin{aligned}
 & f_3 \left(t_1, t_2 + \frac{dt_2}{2}, t_3 \right) ds'_3 - f_3 \left(t_1, t_2 - \frac{dt_2}{2}, t_3 \right) ds_3 \\
 &= dt_3 \left[\left(f_3 + \frac{dt_2}{2} \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \right) \left(h_3 + \frac{dt_2}{2} \frac{\partial h_3}{\partial t_2} \right) - \left(f_3 - \frac{dt_2}{2} \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \right) \left(h_3 - \frac{dt_2}{2} \frac{\partial h_3}{\partial t_2} \right) \right] \\
 &= dt_2 dt_3 \left(f_3 \frac{\partial h_3}{\partial t_2} + \frac{\partial f_3}{\partial t_2} h_3 \right) \\
 &= dt_2 dt_3 \frac{\partial}{\partial t_2} (f_3 h_3)
 \end{aligned}$$

となる。この和をとると

$$dt_2 dt_3 \left(\frac{\partial}{\partial t_2} (f_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial t_3} (f_2 h_2) \right)$$

となるが、これにはまだ四角形の微小面積の影響が残っている。四角形の各辺の長さはばらばらなので、 ds_2 と ds'_2 の平均、 ds_3 と ds'_3 の平均を 2 辺とする長方形として面積を計算すると、 $h_2 h_3 dt_2 dt_3$ となる。したがって求めたかった $\text{rot } \mathbf{f}$ の第 1 成分は

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} (f_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial t_3} (f_2 h_2) \right)$$

となる。他の 2 成分についても同様に、一般化すると

$$(\text{rot } \mathbf{f})_i = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t_j} (f_k h_k)$$

1.4 Laplacian

これまで考えてきた勾配と発散を組み合わせた演算子 $\Delta = \text{div grad}$ が Laplacian である。この表記だとスカラー関数にしか作用できないが、実際にはベクトル関数にも作用できる。ベクトルの各要素に対して作用する。

まずはスカラー関数に作用することを考える。勾配の発散である。勾配というのは、どちらに進めば最も値が大きく変化するかを表すものだった。したがって、勾配のベクトル場を考えると、極大値を取るところではベクトルが一点に集まってくるようになっている。逆に、極小値を取るところでは、ベクトルが一点から外に出ていくようになっている。この発散を考えると、流出量を考えるのだから、極大値では負、極小値では正をとる。一方で、勾配が一定の方向を向いている場合や、一方向だけ見ると流入/出過多でも、他の方向の流入/入も考慮するとちょうどキャンセルしあっているような場合にも 0 になる。ベクトル関数に作用するときは、各成分に対して、スカラー関数と同じように作用するので、あまり違いはない。

このような考察から、スカラー関数に対する Laplacian は、「起伏」を表すようなものであるとイメージできる。その点が山にあたるなら負の値を、谷にあたるなら正の値を、平らな台地なら 0 をとる。そして、ベクトル関数に対しては、関数の成分の「起伏」を成分にもつベクトルを得る^{*1}。

Laplacian の公式は、上で求めた勾配、発散の公式を使えばすぐに出てくる。

$$\Delta f = \text{div grad } f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial t_i} \right)$$

Poisson 方程式

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x})$$

は、電荷によって静電ポテンシャルは起伏を持つことを意味している。正電荷ならば山に、負電荷ならば谷になる。電場は、このようにしてできた静電ポテンシャルの起伏を、最も急激に下るような方向を向いている。

2 積分計算

2.1 面積分

基本となる座標系はデカルト座標 (x, y, z) である。線分の長さは $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ のように表される。この座標系上の曲面を 2 つのパラメータ s, t を使って $S: \mathbf{r}(s, t)$ と表す。このとき、曲面には s, t による、歪んでいてもよい目盛り（網目）が張り巡らされる。曲面上の点は (s, t) を指定すれば一意に定まるからである。今 (s, t) にいるとき、微小な距離だけ進んで $(s + ds, t)$ に行くにはどちらの方向にどれだけ進めば良いのだろうか。^{*2}この答えは

$$\mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} ds$$

^{*1} これが何を意味するのかはよくわからない

^{*2} この答えは ds ではないことに気をつけねばならない。なぜなら距離は基本となる座標系（デカルト座標系）によって定義されているものだからだ。

となる。 t についても同様で、 (s, t) から $(s, t + dt)$ に行くには $(\partial \mathbf{r}(s, t) / \partial t) dt$ 移動すればよい。ところで (s, t) における面の法線ベクトルは、この点から面上でどの方向に進むベクトルとも直交するベクトルのことである。したがって法線ベクトルの方向は、上で求めた微小移動を表す 2 つのベクトルの外積として表せる (向きは 2 方向ありえる)。また、この曲線上の微小面積 dS は、 (s, t) と $(s + ds, t + dt)$ の間の平行四辺形の面積のこと。同様に外積を使えば

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} \right| ds dt$$

と書ける。したがって、曲線上の面積分は、まずスカラー場について

$$\iint_S f(\mathbf{r}) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(s, t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

となる。ここで D は s, t の取りうる領域。ベクトル場については

$$\iint_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) ds dt$$

となる。 \mathbf{n} は法線ベクトルで、ここでは

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

ととっている。法線ベクトルのとりかたによって、符号の異なる 2 つの結果があり得る。

2.2 体積積分

ある領域の内部をパラメータ s, t, u を使って $\mathbf{r}(s, t, u)$ と表す。面積分るときと同様にして、領域にこれらによる目盛りが張り巡らされる。このとき微小体積要素は、

$$\begin{aligned} dV &= \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| ds dt du \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| ds dt du \end{aligned}$$

である。最後の式は行列式だが、ヤコビアンとも呼ばれる。行列式の性質として、転置しても結果が変わらない。このとき体積積分は

$$\iiint_D f(\mathbf{r}) dV = \iiint_D f(\mathbf{r}(s, t, u)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| ds dt du$$

となる。

3 直交曲線座標系の基底

直交曲線座標系を (t_1, t_2, t_3) ととる (例えば極座標 (r, θ, ϕ) など)。空間の各点は、この 3 つのパラメータと一対一に対応する。さて、この座標系がデカルト座標系 (x, y, z) だったら、 (x, y, z) から例えば $(x + dx, y, z)$ に行くには、 x 軸に沿って dx だけ移動すれば良い。この方向はどの点についても変わらず一定だ。しかし、曲線座標系だとこの方向が各点で異なる。例として極座標を考えると、点 $P(r, \theta, \phi)$ から $P'(r + dr, \theta, \phi)$ に行くには、原点 O から \vec{OP} の方向に dr だけ進まなければいけない。この方向は P の位置によっていろいろと変わる。したがって、デカルト座標系を考えていたときは空間は一様で、どこで基底を考えても不自由するこ

とはなかったが，一般の直交曲線座標系を考えるときは，どの点を基準にして基底とするかを考えなければいけない*3.

*3 例えば極座標をとるとき，原点では基底を取るような特別な方向がない