重積分

2022 年 6 月 15 日

面積分

　基本となる座標系はデカルト座標 (x, y, z) である．線分の長さは $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ のように表される．この座標系上の曲面を 2 つのパラメータ s, t を使って $S : \boldsymbol{r}(s, t)$ と表す．このとき，曲面には s，t による，歪んでいてもよい目盛り（網目）が張り巡らされる．曲面上の点は (s, t) を指定すれば一意に定まるからである．今 (s, t) にいるとき，微小な距離だけ進んで $(s + ds, t)$ に行くにはどちらの方向にどれだけ進めば良いのだろうか．[*1] この答えは

$$\boldsymbol{r}(s + ds, t) - \boldsymbol{r}(s, t) \to \frac{\partial \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s} ds$$

となる．t についても同様で，(s, t) から $(s, t + dt)$ に行くには $(\partial \boldsymbol{r}(s, t)/\partial t)dt$ 移動すればよい．ところで (s, t) における面の法線ベクトルは，この点から面上でどの方向に進むベクトルとも直交するベクトルのことである．したがって法線ベクトルの方向は，上で求めた微小移動を表す 2 つのベクトルの外積として表せる（向きは 2 方向ありえる）．また，この曲線上の微小面積 dS は，(s, t) と $(s + ds, t + dt)$ の間の平行四辺形の面積のこと．同様に外積を使えば

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial t} \right| dsdt$$

と書ける．したがって，曲線上の面積分は，まずスカラー場について

$$\iint_S f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(s, t)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

となる．ここで D は s, t の取りうる領域．ベクトル場については

$$\iint_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

となる．$\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルで，ここでは

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$$

ととっている．法線ベクトルのとりかたによって，符号の異なる 2 つの結果があり得る．

[*1] この答えは ds ではないことに気をつけねばならない．なぜなら距離は基本となる座標系（デカルト座標系）によって定義されているものだからだ．

体積積分

ある領域の内部をパラメータ s, t, u を使って $\boldsymbol{r}(s,t,u)$ と表す．面積分のときと同様にして，領域にこれらによる目盛りが張り巡らされる．このとき微小体積要素は，

$$\begin{aligned} dV &= \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \right| dsdtdu \\ &= \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \right| dsdtdu \end{aligned}$$

である．最後の式は行列式だが，ヤコビアンとも呼ばれる．行列式の性質として，転置しても結果が変わらない．このとき体積積分は

$$\iiint_D f(\boldsymbol{r}) dV = \iiint_D f(\boldsymbol{r}(s,t,u)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \right| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u$$

となる．