

原子物理学习题解答

刘富义 编

临沂师范学院物理系
理论物理教研室

第一章 原子的基本状况

1.1 若卢瑟福散射用的 α 粒子是放射性物质镭 C' 放射的, 其动能为 7.68×10^6 电子伏

特。散射物质是原子序数 $Z=79$ 的金箔。试问散射角 $\theta=150^\circ$ 所对应的瞄准距离 b 多大?

解: 根据卢瑟福散射公式:

$$\cot \frac{\theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{Mv^2}{Ze^2} b = 4\pi\epsilon_0 \frac{K_\alpha}{Ze^2} b$$

得到:

$$b = \frac{Ze^2 \cot \frac{\theta}{2}}{4\pi\epsilon_0 K_\alpha} = \frac{79 \times (1.60 \times 10^{-19})^2 \cot \frac{150^\circ}{2}}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}) \times (7.68 \times 10^6 \times 10^{-19})} = 3.97 \times 10^{-15} \text{ 米}$$

式中 $K_\alpha = \frac{1}{2}Mv^2$ 是 α 粒子的动能。

1.2 已知散射角为 θ 的 α 粒子与散射核的最短距离为

$$r_m = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{2Ze^2}{Mv^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right), \text{ 试问上题 } \alpha \text{ 粒子与散射的金原子核}$$

之间的最短距离 r_m 多大?

解: 将 1.1 题中各量代入 r_m 的表达式, 得:

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{2Ze^2}{Mv^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 79 \times (1.60 \times 10^{-19})^2}{7.68 \times 10^6 \times 1.60 \times 10^{-19}} \times \left(1 + \frac{1}{\sin 75^\circ} \right) \\ &= 3.02 \times 10^{-14} \text{ 米} \end{aligned}$$

1.3 若用动能为 1 兆电子伏特的质子射向金箔。问质子与金箔。问质子与金箔原子核可能达到的最小距离多大? 又问如果用同样能量的氦核(氦核带一个 $+e$ 电荷而质量是质子的两倍, 是氢的一种同位素的原子核)代替质子, 其与金箔原子核的最小距离多大?

解: 当入射粒子与靶核对心碰撞时, 散射角为 180° 。当入射粒子的动能全部转化为两粒子间的势能时, 两粒子间的作用距离最小。

根据上面的分析可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 &= K_p = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}, \text{ 故有: } r_{\min} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 K_p} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{79 \times (1.60 \times 10^{-19})^2}{10^6 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 1.14 \times 10^{-13} \text{ 米} \end{aligned}$$

由上式看出： r_{\min} 与入射粒子的质量无关，所以当用相同能量质量和相同电量得到核代替质子时，其与靶核的作用的最小距离仍为 1.14×10^{-13} 米。

1.4 钋放射的一种 α 粒子的速度为 1.597×10^7 米/秒，正面垂直入射于厚度为 10^{-7} 米、密度为 1.932×10^4 公斤/米³ 的金箔。试求所有散射在 $\theta > 90^\circ$ 的 α 粒子占全部入射粒子数的百分比。已知金的原子量为 197。

解：散射角在 $\theta \sim \theta + d\theta$ 之间的 α 粒子数 dn 与入射到箔上的总粒子数 n 的比是：

$$\frac{dn}{n} = N t d\sigma$$

其中单位体积中的金原子数： $N = \rho / m_{Au} = \rho N_0 / A_{Au}$

而散射角大于 90° 的粒子数为： $dn' = \int dn = n N t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\sigma$

所以有： $\frac{dn'}{n} = N t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\sigma$

$$= \frac{\rho N_0}{A_{Au}} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \pi \left(\frac{2Ze^2}{Mu^2}\right)^2 \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$\text{等式右边的积分：} I = \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{d \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} = 1$$

故

$$\begin{aligned} \frac{dn'}{n} &= \frac{\rho N_0}{A_{Au}} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \pi \left(\frac{2Ze^2}{Mu^2}\right)^2 \\ &\approx 8.5 \times 10^{-6} = 8.5 \times 10^{-4} \% \end{aligned}$$

即速度为 1.597×10^7 米/秒的 α 粒子在金箔上散射，散射角大于 90° 以上的粒子数大约是 $8.5 \times 10^{-4} \%$ 。

1.5 α 粒子散射实验的数据在散射角很小 ($\theta \leq 15^\circ$) 时与理论值差得较远，是什么原因？

答： α 粒子散射的理论值是在“一次散射”的假定下得出的。而 α 粒子通过金属箔，经过

好多原子核的附近，实际上经过多次散射。至于实际观察到较小的 θ 角，那是多次小角散射合成的结果。既然都是小角散射，哪一个也不能忽略，一次散射的理论就不适用。所以， α 粒子散射的实验数据在散射角很小时与理论值差得较远。

1.6 已知 α 粒子质量比电子质量大7300倍。试利用中性粒子碰撞来证明： α 粒子散射“受电子的影响是微不足道的”。

证明：设碰撞前、后 α 粒子与电子的速度分别为： $\vec{v}, \vec{v}', 0, \vec{v}'_e$ 。根据动量守恒定律，得：

$$M\vec{v}_\alpha = M\vec{v}'_\alpha + m\vec{v}'_e$$

$$\text{由此得： } \vec{v}_\alpha - \vec{v}'_\alpha = \frac{m}{M} \vec{v}'_e = \frac{1}{7300} \vec{v}'_e \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{又根据能量守恒定律，得： } \frac{1}{2} M v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M v_\alpha'^2 + \frac{1}{2} m v_e'^2$$

$$v_\alpha^2 = v_\alpha'^2 + \frac{m}{M} v_e'^2 \quad \dots\dots (2)$$

将(1)式代入(2)式，得：

$$v_\alpha^2 = v_\alpha'^2 + 7300 (\vec{v}_\alpha - \vec{v}'_\alpha)^2$$

$$\text{整理，得： } v_\alpha^2 (7300 - 1) + v_\alpha'^2 (7300 + 1) - 2 \times 7300 v_\alpha v_\alpha' \cos \theta = 0$$

$$\therefore 7300 \geq 1$$

$$\therefore \text{上式可写为： } 7300 (\vec{v}_\alpha - \vec{v}'_\alpha)^2 = 0$$

$$\therefore \vec{v}_\alpha - \vec{v}'_\alpha = 0$$

即 α 粒子散射“受电子的影响是微不足道的”。

1.7 能量为3.5兆电子伏特的细 α 粒子束射到单位面积上质量为 1.05×10^{-2} 公斤/米²

的银箔上， α 粒子与银箔表面成 60° 角。在离 $L=0.12$ 米处放一窗口面积为 6.0×10^{-5} 米²的计数器。测得散射进此窗口的 α 粒子是全部入射 α 粒子的百万分之29。若已知银的原子量为107.9。试求银的核电荷数 Z 。

解：设靶厚度为 t' 。非垂直入射时引起 α 粒子在靶物质中通过的距离不再是靶物质的厚

度 t' ，而是 $t = t' / \sin 60^\circ$ ，如图1-1所示。

因为散射到 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间 $d\Omega$ 立体角内的粒子数 dn 与总入射粒子数 n 的比为：

$$\frac{dn}{n} = N t d\sigma \quad (1)$$

而 $d\sigma$ 为：

$$d\sigma = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2)$$

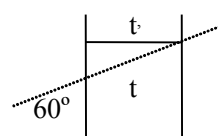
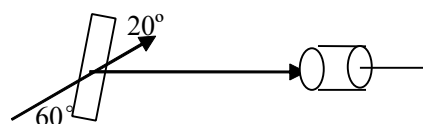


图 1.1

把(2)式代入(1)式,得:

$$\frac{dn}{n} = Nt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \dots\dots (3)$$

式中立体角元 $d\Omega = ds / L^2$, $t = t' / \sin 60^\circ = 2t' / \sqrt{3}$, $\theta = 20^\circ$

N 为原子密度。 Nt' 为单位面上的原子数, $Nt' = \eta / m_{Ag} = \eta (A_{Ag} / N_0)^{-1}$, 其中 η 是单位面积式上的质量; m_{Ag} 是银原子的质量; A_{Ag} 是银原子的原子量; N_0 是阿佛加德罗常数。

将各量代入(3)式,得:

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\eta N_0}{A_{Ag}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

由此,得: $Z=47$

1.8 设想铅 ($Z=82$) 原子的正电荷不是集中在很小的核上,而是均匀分布在半径约为 10^{-10} 米的球形原子内,如果有能量为 10^6 电子伏特的 α 粒子射向这样一个“原子”,试通过计算论证这样的 α 粒子不可能被具有上述设想结构的原子产生散射角大于 90° 的散射。这个结论与卢瑟福实验结果差的很远,这说明原子的汤姆逊模型是不能成立的(原子中电子的影响可以忽略)。

解: 设 α 粒子和铅原子对心碰撞,则 α 粒子到达原子边界而不进入原子内部时的能量有下式决定:

$$\frac{1}{2} Mv^2 = 2Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 R = 3.78 \times 10^{-16} \text{焦耳} \approx 2.36 \times 10^3 \text{电子伏特}$$

由此可见,具有 10^6 电子伏特能量的 α 粒子能够很容易的穿过铅原子球。 α 粒子在到达原子表面和原子内部时,所受原子中正电荷的排斥力不同,它们分别为:

$F = 2Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ 和 $F = 2Ze^2 r / 4\pi\epsilon_0 R^3$ 。可见,原子表面处 α 粒子所受的斥力最大,越靠近原子的中心 α 粒子所受的斥力越小,而且瞄准距离越小,使 α 粒子发生散射最强的垂直入射方向的分力越小。我们考虑粒子散射最强的情形。设 α 粒子擦原子表面而过。此时受力为 $F = 2Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ 。可以认为 α 粒子只在原子大小的范围内受到原子中正电荷的作用,即作用距离为原子的直径 D。并且在作用范围 D 之内,力的方向始终与入射方向垂直,大小不变。这是一种受力最大的情形。

根据上述分析,力的作用时间为 $t=D/v$, α 粒子的动能为 $\frac{1}{2} Mv^2 = K$, 因此,

$$v = \sqrt{2K/M}, \text{ 所以, } t = D/v = D\sqrt{M/2K}$$

根据动量定理: $\int_0^t Fdt = p_\perp - p_\perp^0 = Mv_\perp - 0$

$$\text{而 } \int_0^t F dt = 2Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 R^2 \int_0^t dt = 2Ze^2 t / 4\pi\epsilon_0 R^2$$

$$\text{所以有: } 2Ze^2 t / 4\pi\epsilon_0 R^2 = Mv_{\perp}$$

$$\text{由此可得: } v_{\perp} = 2Ze^2 t / 4\pi\epsilon_0 R^2 M$$

α 粒子所受的平行于入射方向的合力近似为 0, 入射方向上速度不变。据此, 有:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{v_{\perp}}{v} = 2Ze^2 t / 4\pi\epsilon_0 R^2 Mv = 2Ze^2 D / 4\pi\epsilon_0 R^2 Mv^2 \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

这时 θ 很小, 因此 $\tan\theta \approx \theta = 2.4 \times 10^{-3}$ 弧度, 大约是 $8.2'$ 。

这就是说, 按题中假设, 能量为 1 兆电子伏特的 α 粒子被铅原子散射, 不可能产生散射角 $\theta > 90^\circ$ 的散射。但是在卢瑟福的原子有核模型的情况下, 当 α 粒子无限靠近原子核时, 会受到原子核的无限大的排斥力, 所以可以产生 $\theta > 90^\circ$ 的散射, 甚至会产生 $\theta \approx 180^\circ$ 的散射, 这与实验相符合。因此, 原子的汤姆逊模型是不成立的。

第二章 原子的能级和辐射

2.1 试计算氢原子的第一玻尔轨道上电子绕核转动的频率、线速度和加速度。

解：电子在第一玻尔轨道上即 $n=1$ 。根据量子化条件，

$$p_{\phi} = mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

可得：频率 $\nu = \frac{v}{2\pi a_1} = \frac{nh}{2\pi m a_1^2} = \frac{h}{2\pi m a_1^2}$

$$= 6.58 \times 10^{15} \text{ 赫兹}$$

速度： $v = 2\pi a_1 \nu = h / m a_1 = 2.188 \times 10^6 \text{ 米/秒}$

加速度： $w = v^2 / r = v^2 / a_1 = 9.046 \times 10^{22} \text{ 米/秒}^2$

2.2 试由氢原子的里德伯常数计算基态氢原子的电离电势和第一激发电势。

解：电离能为 $E_i = E_{\infty} - E_1$ ，把氢原子的能级公式 $E_n = -Rhc / n^2$ 代入，得：

$$E_i = R_H hc \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = R_H hc = 13.60 \text{ 电子伏特。}$$

电离电势： $V_i = \frac{E_i}{e} = 13.60 \text{ 伏特}$

第一激发能： $E_i = R_H hc \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R_H hc = \frac{3}{4} \times 13.60 = 10.20 \text{ 电子伏特}$

第一激发电势： $V_1 = \frac{E_1}{e} = 10.20 \text{ 伏特}$

2.3 用能量为 12.5 电子伏特的电子去激发基态氢原子，问受激发的氢原子向低能基跃迁时，会出现那些波长的光谱线？

解：把氢原子有基态激发到你 $n=2,3,4,\dots$ 等能级上去所需要的能量是：

$$E = hcR_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ 其中 } hcR_H = 13.6 \text{ 电子伏特}$$

$$E_1 = 13.6 \times \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = 10.2 \text{ 电子伏特}$$

$$E_2 = 13.6 \times \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) = 12.1 \text{ 电子伏特}$$

$$E_3 = 13.6 \times \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) = 12.8 \text{ 电子伏特}$$

其中 E_1 和 E_2 小于 12.5 电子伏特， E_3 大于 12.5 电子伏特。可见，具有 12.5 电子伏特能量的

电子不足以把基态氢原子激发到 $n \geq 4$ 的能级上去，所以只能出现 $n \leq 3$ 的能级间的跃迁。跃迁时可能发出的光谱线的波长为：

$$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 5R_H / 36$$

$$\lambda_1 = 6565 \text{ \AA}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R_H$$

$$\lambda_2 = 1215 \text{ \AA}$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8}{9} R_H$$

$$\lambda_3 = 1025 \text{ \AA}$$

2.4 试估算一次电离的氦离子 He^+ 、二次电离的锂离子 Li^{++} 的第一玻尔轨道半径、电离电势、第一激发电势和赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值。

解：在估算时，不考虑原子核的运动所产生的影响，即把原子核视为不动，这样简单些。

a) 氢原子和类氢离子的轨道半径：

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{4\pi^2 m Z e^2} = a_1 \frac{n^2}{Z}, n=1,2,3,\dots$$

其中 $a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{4\pi^2 m e^2} = 0.529177 \times 10^{-10}$ 米，是氢原子的玻尔第一轨道半径；

Z 是核电荷数，对于 $H, Z=1$ ；对于 $He^+, Z=2$ ；对于 $Li^{++}, Z=3$ ；

因此，玻尔第一轨道半径之比是 $\frac{r_{He^+}}{r_H} = \frac{Z_H}{Z_{He^+}} = \frac{1}{2}, \frac{r_{Li^{++}}}{r_H} = \frac{Z_H}{Z_{Li^{++}}} = \frac{1}{3}$

b) 氢和类氢离子的能量公式：

$$E = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} = E_1 \cdot \frac{Z^2}{n^2}, n=1,2,3,\dots$$

其中 $E_1 = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \approx -13.6$ 电子伏特，是氢原子的基态能量。

电离能之比：

$$\frac{0 - E_{He^+}}{0 - E_H} = \frac{Z_{He^+}^2}{Z_H^2} = 4,$$

$$\frac{0 - E_{Li^{++}}}{0 - E_H} = \frac{Z_{Li^{++}}^2}{Z_H^2} = 9$$

c) 第一激发能之比：

$$\frac{E_{He}^2 - E_{He}^1}{E_H^2 - E_H^1} = \frac{E_1 \frac{2^2}{2^2} - E_1 \frac{2^2}{1^2}}{E_1 \frac{1^2}{2^2} - E_1 \frac{1^2}{1^2}} = 4$$

$$\frac{E_{Li}^2 - E_{Li}^1}{E_H^2 - E_H^1} = \frac{E_1 \frac{3^2}{2^2} - E_1 \frac{3^2}{1^2}}{E_1 \frac{1^2}{2^2} - E_1 \frac{1^2}{1^2}} = 9$$

d) 氢原子和类氢离子的广义巴耳末公式:

$$\tilde{\nu} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad \begin{cases} n_1=1,2,3,\dots \\ n_2=(n_1+1),(n_1+2),\dots \end{cases}$$

其中 $R = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3}$ 是里德伯常数。

氢原子赖曼系第一条谱线的波数为:

$$\tilde{\nu}_1^H = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{\lambda^H}$$

相应地, 对类氢离子有:

$$\tilde{\nu}_1^{He^+} = 2^2 R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{\lambda_1^{He^+}}$$

$$\tilde{\nu}_1^{Li^{++}} = 3^2 R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{\lambda_1^{Li^{++}}}$$

因此,

$$\frac{\lambda_1^{He^+}}{\lambda_1^H} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda_1^{Li^{++}}}{\lambda_1^H} = \frac{1}{9}$$

2.5 试问二次电离的锂离子 Li^{++} 从其第一激发态向基态跃迁时发出的光子, 是否有可能

使处于基态的一次电离的氢原子 H_e^+ 的电子电离掉?

解: Li^{++} 由第一激发态向基态跃迁时发出的光子的能量为:

H_e^+ 的电离能量为:

$$\nu_{He}^+ = 4hcR_{He}(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}) = 4hcR_{He}$$

$$\frac{h\nu_{Li^{++}}}{h\nu_{He^+}} = \frac{27R_{Li}}{16R_{He}} = \frac{27}{16} \cdot \frac{1+m/M_{He}}{1+m/M_{Li}}$$

由于 $M_{He} < M_{Li}$, 所以 $1+m/M_{He} > 1+m/M_{Li}$,

从而有 $h\nu_{Li^{++}} > h\nu_{He^+}$, 所以能将 He^+ 的电子电离掉。

2.6 氢与其同位素氘（质量数为 2）混在同一放电管中，摄下两种原子的光谱线。试问其巴耳末系的第一条（ H_α ）光谱线之间的波长差 $\Delta\lambda$ 有多大？已知氢的里德伯常数

$R_H = 1.0967758 \times 10^7 \text{ 米}^{-1}$, 氘的里德伯常数 $R_D = 1.0970742 \times 10^7 \text{ 米}^{-1}$ 。

$$\text{解: } \frac{1}{\lambda_H} = R_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}), \quad \lambda_H = 36/5R_H$$

$$\frac{1}{\lambda_D} = R_D(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}), \quad \lambda_D = 36/5R_D$$

$$\Delta\lambda = \lambda_H - \lambda_D = \frac{36}{5}(\frac{1}{R_H} - \frac{1}{R_D})$$

$$= 1.79 \text{ \AA}$$

2.7 已知一对正负电子绕其共同的质心转动会暂时形成类似于氢原子结构的“正电子素”。试计算“正电子素”由第一激发态向基态跃迁发射光谱的波长 λ 为多少 \AA ？

$$\text{解: } \frac{1}{\lambda} = R_{e^+e^-}(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = R_\infty \frac{1}{1+\frac{m}{m}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}R$$

$$\lambda = \frac{8}{3R_\infty} = \frac{1}{3 \times 10973731} \text{ 米} = 2430 \text{ \AA}$$

2.8 试证明氢原子中的电子从 $n+1$ 轨道跃迁到 n 轨道，发射光子的频率 ν_n 。当 $n \gg 1$ 时光子频率即为电子绕第 n 玻尔轨道转动的频率。

证明：在氢原子中电子从 $n+1$ 轨道跃迁到 n 轨道所发光子的波数为：

$$\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = R[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}]$$

$$\text{频率为: } \nu_n = \frac{c}{\lambda} = Rc[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}] = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} Rc$$

当 $n \gg 1$ 时, 有 $(2n+1)/n^2(n+1)^2 \approx 2n/n^4 = 2/n^3$, 所以在 $n \gg 1$ 时, 氢原子中

电子从 $n+1$ 轨道跃迁到 n 轨道所发光子的频率为: $\nu_n = 2Rc/n^3$ 。

设电子在第 n 轨道上的转动频率为 f_n , 则

$$f_n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{mvr}{2\pi mr^2} = \frac{P}{2\pi mr^2} = \frac{2Rc}{n^3}$$

因此, 在 $n \gg 1$ 时, 有 $\nu_n = f_n$

由上可见, 当 $n \gg 1$ 时, 请原子中电子跃迁所发出的光子的频率即等于电子绕第 n 玻尔轨道转动的频率。这说明, 在 n 很大时, 玻尔理论过渡到经典理论, 这就是对应原理。

2.9 Li 原子序数 $Z=3$, 其光谱的主线系可用下式表示:

$$\tilde{\nu} = \frac{R}{(1+0.5951)^2} - \frac{R}{(n-0.0401)^2}。 \text{已知锂原子电离成 } Li^{+++} \text{ 离子需要 } 203.44 \text{ 电子伏特的}$$

功。问如把 Li^+ 离子电离成 Li^{++} 离子, 需要多少电子伏特的功?

解: 与氢光谱类似, 碱金属光谱亦是单电子原子光谱。锂光谱的主线系是锂原子的价电子由高的 p 能级向基态跃迁而产生的。一次电离能对应于主线系的系限能量, 所以 Li^+ 离子电离成 Li^{++} 离子时, 有

$$E_1 = \frac{Rhc}{(1+0.5951)^2} - \frac{Rhc}{\infty} \approx \frac{R_{\infty}hc}{(1+0.5951)^2} = 5.35 \text{ 电子伏特}$$

Li^{++} 是类氢离子, 可用氢原子的能量公式, 因此 $Li^{++} \rightarrow Li^{+++}$ 时, 电离能 E_3 为:

$$E_3 = \frac{Z^2 Rhc}{1^2} \approx Z^2 R_{\infty}hc = 122.4 \text{ 电子伏特}。$$

设 $Li^+ \rightarrow Li^{++}$ 的电离能为 E_2 。而 $Li \rightarrow Li^{+++}$ 需要的总能量是 $E=203.44$ 电子伏特, 所以有

$$E_2 = E - E_1 - E_3 = 75.7 \text{ 电子伏特}$$

2.10 具有磁矩的原子, 在横向均匀磁场和横向非均匀磁场中运动时有什么不同?

答: 设原子的磁矩为 μ , 磁场沿 Z 方向, 则原子磁矩在磁场方向的分量记为 μ_z , 于是

具有磁矩的原子在磁场中所受的力为 $F = \mu_z \frac{\partial B}{\partial Z}$, 其中 $\frac{\partial B}{\partial Z}$ 是磁场沿 Z 方向的梯度。

对均匀磁场, $\frac{\partial B}{\partial Z} = 0$, 原子在磁场中不受力, 原子磁矩绕磁场方向做拉摩进动, 且对磁场

的取向服从空间量子化规则。对于非均匀磁场， $\frac{\partial B}{\partial Z} \neq 0$ 原子在磁场中除做上述运动外，还受到力的作用，原子射束的路径要发生偏转。

2.11 史特恩-盖拉赫实验中，处于基态的窄银原子束通过不均匀横向磁场，磁场的梯度为 $\frac{\partial B}{\partial Z} = 10^3$ 特斯拉/米，磁极纵向范围 $L_1 = 0.04$ 米(见图 2-2)，从磁极到屏距离 $L_2 = 0.10$ 米，

原子的速度 $v = 5 \times 10^2$ 米/秒。在屏上两束分开的距离 $d = 0.002$ 米。试确定原子磁矩在磁场方向上投影 μ 的大小（设磁场边缘的影响可忽略不计）。

解：银原子在非均匀磁场中受到垂直于入射方向的磁场力作用。其轨道为抛物线；在 L_2 区域粒子不受力作惯性运动。经磁场区域 L_1 后向外射出时粒子的速度为 v' ，出射方向与

入射方向间的夹角为 θ 。 θ 与速度间的关系为： $\tan \theta = \frac{v_{\perp}}{v}$

粒子经过磁场 L_1 出射时偏离入射方向的距离 S 为：

$$S = \frac{1}{2m} \frac{\partial B}{\partial Z} \left(\frac{L_1}{v} \right)^2 \mu_z \dots \dots (1)$$

将上式中用已知量表示出来变可以求出 μ_z

$$v_{\perp} = at, a = \frac{f}{m} = \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial Z}, t = L_1 / v$$

$$\therefore v_{\perp} = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1}{v}$$

$$S = L_2 \tan \theta = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1 L_2}{v^2}$$

$$S = \frac{d}{2} - S' = \frac{d}{2} - \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1 L_2}{v^2}$$

把 S 代入 (1) 式中，得：

$$\frac{d}{2} - \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1 L_2}{v^2} = \frac{\mu_z}{2m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1^2}{v^2}$$

$$\text{整理，得：} \frac{\mu_z}{2m} \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{L_1}{v^2} (L_1 + 2L_2) = \frac{d}{2}$$

由此得： $\mu_z = 0.93 \times 10^{-23}$ 焦耳/特

2.12 观察高真空玻璃管中由激发原子束所发光谱线的强度沿原子射线束的减弱情况，可以测定各激发态的平均寿命。若已知原子束中原子速度 $v = 10^3$ 米/秒，在沿粒子束方向上相距 1.5 毫米其共振光谱线强度减少到 1/3.32。试计算这种原子在共振激发态的平均寿命。

解：设沿粒子束上某点 A 和距这点的距离 $S=1.5$ 毫米的 B 点，共振谱线强度分别为 I_0 和 I_1 ，并设粒子束在 A 点的时刻为零时刻，且此时处于激发态的粒子数为 N_{20} ，原子束经过 t 时间间隔从 A 到达 B 点，在 B 点处于激发态的粒子数为 N_2 。

光谱线的强度与处于激发态的原子数和单位时间内的跃迁几率成正比。设发射共振谱线的跃迁几率为 A_{21} ，则有 $\frac{I_1}{I_0} \propto \frac{A_{21}N_2}{A_{21}N_{20}} = \frac{N_2}{N_{20}}$

适当选取单位，使 $\frac{I_1}{I_0} = \frac{N_2}{N_{20}} = 1/3.32$ ，

并注意到 $N_2 = N_{20}e^{-A_{21}t}$ ，而 $t = S/\nu$ ，

则有： $\frac{N_2}{N_{20}} = e^{-A_{21}t} = 1/3.32$

由此求得：

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{t}(\ln 3.32 - \ln 1) = \frac{\nu}{S} \ln 3.32 \\ t &= \frac{1}{A_{21}} = \frac{S}{\nu \ln 3.32} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{10^3 \times \ln 3.32} \\ &= 1.25 \times 10^{-6} \text{ 秒} \end{aligned}$$

第三章 量子力学初步

3.1 波长为 1\AA 的 X 光光子的动量和能量各为多少？

解：根据德布罗意关系式，得：

$$\text{动量为： } p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{10^{-10}} = 6.63 \times 10^{-24} \text{ 千克} \cdot \text{米} \cdot \text{秒}^{-1}$$

$$\text{能量为： } E = h\nu = hc/\lambda$$

$$= 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 / 10^{-10} = 1.986 \times 10^{-15} \text{ 焦耳。}$$

3.2 经过 10000 伏特电势差加速的电子束的德布罗意波长 $\lambda = ?$ 用上述电压加速的质子束的德布罗意波长是多少？

解：德布罗意波长与加速电压之间有如下关系：

$$\lambda = h/\sqrt{2meV} \quad \text{对于电子： } m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ 公斤， } e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ 库仑}$$

把上述二量及 h 的值代入波长的表示式，可得：

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} \text{\AA} = \frac{12.25}{\sqrt{10000}} \text{\AA} = 0.1225 \text{\AA}$$

对于质子， $m = 1.67 \times 10^{-27}$ 公斤， $e = 1.60 \times 10^{-19}$ 库仑，代入波长的表示式，得：

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 10000}} = 2.862 \times 10^{-3} \text{\AA}$$

3.3 电子被加速后的速度很大，必须考虑相对论修正。因而原来 $\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} \text{\AA}$ 的电子德

布罗意波长与加速电压的关系式应改为：

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} (1 - 0.489 \times 10^{-6} V) \text{\AA}$$

其中 V 是以伏特为单位的电子加速电压。试证明之。

证明：德布罗意波长： $\lambda = h/p$

对高速粒子在考虑相对论效应时，其动能 K 与其动量 p 之间有如下关系：

$$K^2 + 2Km_0c^2 = p^2c^2$$

而被电压 V 加速的电子的动能为： $K = eV$

$$\therefore p^2 = \frac{(eV)^2}{c^2} + 2m_0 eV$$

$$p = \sqrt{2m_0 eV + (eV)^2 / c^2}$$

因此有：

$$\lambda = h / p = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{2m_0 c^2}}}$$

一般情况下，等式右边根式中 $eV/2m_0 c^2$ 一项的值都是很小的。所以，可以将上式的根式作泰勒展开。只取前两项，得：

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} \left(1 - \frac{eV}{4m_0 c^2}\right) = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} (1 - 0.489 \times 10^{-6} V)$$

由于上式中 $h/\sqrt{2m_0 eV} \approx \frac{12.25^\circ}{\sqrt{V}} \text{Å}$ ，其中 V 以伏特为单位，代回原式得：

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} (1 - 0.489 \times 10^{-6} V)^\circ \text{Å}$$

由此可见，随着加速电压逐渐升高，电子的速度增大，由于相对论效应引起的德布罗意波长变短。

3.4 试证明氢原子稳定轨道上正好能容纳下整数个电子的德布罗意波波长。上述结果不但适用于圆轨道，同样适用于椭圆轨道，试证明之。

证明：轨道量子化条件是： $\oint p dq = nh$

对氢原子圆轨道来说， $p_r = 0, p_\phi = mr^2 \dot{\phi} = mvr$

所以有：

$$\oint p d\phi = 2\pi \cdot mvr = nh$$

$$S = 2\pi r = n \frac{h}{mv} = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots$$

所以，氢原子稳定轨道上正好能容纳下整数个电子的德布罗意波长。椭圆轨道的量子化条件是：

$$\oint p_\phi d\phi = n_\phi h$$

$$\oint p_r dr = n_r h$$

其中

$$p_r = m\dot{r}, p_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

$$\therefore \oint (p_r dr + p_\phi d\phi) = nh, \text{ 其中 } n = n_\phi + n_r$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \oint (p_r dr + p_\phi d\phi) &= \oint (m\dot{r}dr + mr^2\dot{\phi}d\phi) \\ &= \oint \left(m\dot{r} \frac{dr}{dt} dt + mr^2\dot{\phi} \frac{d\phi}{dt} dt \right) \\ &= \oint mv^2 dt = \oint mv ds \\ &= \oint \frac{h}{\lambda} ds = h \oint \frac{ds}{\lambda} \\ \therefore \oint \frac{ds}{\lambda} &= n \end{aligned}$$

因此，椭圆轨道也正好包含整数个德布罗意波波长。

3.5 带电粒子在威耳孙云室（一种径迹探测器）中的轨迹是一串小雾滴，雾滴德线度约为 1 微米。当观察能量为 1000 电子伏特的电子径迹时其动量与经典力学动量的相对偏差不少于多少？

解：由题知，电子动能 $K=1000$ 电子伏特， $\Delta x=10^{-6}$ 米，动量相对偏差为 $\Delta p/p$ 。

根据测不准原理，有 $\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2}$ ，由此得： $\Delta p \geq \frac{h}{2\Delta x}$

经典力学的动量为：

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mK} \\ \therefore \frac{\Delta p}{p} &\geq \frac{h}{2\Delta x \sqrt{2mK}} = 3.09 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

电子横向动量的不准确量与经典力学动量之比如此之小，足见电子的径迹与直线不会有明显区别。

3.6 证明自由运动的粒子（势能 $V \equiv 0$ ）的能量可以有连续的值。

证明：自由粒子的波函数为：

$$\psi = Ae^{+\frac{i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{自由粒子的哈密顿量是： } H = -\frac{h^2}{2m} \nabla^2 \quad \dots\dots (2)$$

$$\text{自由粒子的能量的本征方程为： } H\psi = E\psi \quad \dots\dots (3)$$

$$\text{把 (1) 式和 (2) 式代入 (3) 式，得： } -\frac{h^2}{2m} \nabla^2 [Ae^{+\frac{i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}] = E\psi$$

即：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 A\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)e^{+\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_y y+p_z z-Et)}=E\psi$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi=E\psi$$

$$\therefore E=\frac{p^2}{2m}$$

自由粒子的动量 p 可以取任意连续值, 所以它的能量 E 也可以有任意的连续值。

3.7 粒子位于一维对称势场中, 势场形式如图 3-1, 即

$$\begin{cases} 0 < x < L, V=0 \\ x < 0, x > L, V=V_0 \end{cases}$$

(1) 试推导粒子在 $E < V_0$ 情况下其总能量 E 满足的关系式。

(2) 试利用上述关系式, 以图解法证明, 粒子的能量只能是一些不连续的值。

解: 为方便起见, 将势场划分为 I, II, III 三个区域。

$$(1) \quad \text{定态振幅方程为 } \frac{d^2\psi_{(x)}}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V_{(x)})\psi_{(x)} = 0$$

式中 μ 是粒子的质量。

$$\text{I 区: } \frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0 \text{ 其中 } \alpha^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

波函数处处为有限的解是: $\psi_1(x) = Ae^{\alpha x}$, A 是一任意常数。

$$\text{II 区: } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta^2\psi = 0 \text{ 其中 } \beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}E$$

处处有限的解是: $\psi_2(x) = B\sin(\beta x + \gamma)$, B, γ 是任意常数。

$$\text{III 区: } \frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0 \text{ 其中 } \alpha^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

处处有限的解是: $\psi_3(x) = De^{-\alpha x}$, D 是任意常数。

$$\text{有上面可以得到: } \frac{1}{\psi_1} \frac{d\psi_1}{dx} = \alpha, \frac{1}{\psi_2} \frac{d\psi_2}{dx} = \beta \cot(\beta x + \gamma), \frac{1}{\psi_3} \frac{d\psi_3}{dx} = -\alpha,$$

有连续性条件, 得:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \cot \gamma \\ -\frac{\alpha}{\beta} = \cot(\beta L + \gamma) \end{cases}$$

解得:

$$\operatorname{tg}(\beta L) = -\frac{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

因此得: $\beta L = n\pi - 2\operatorname{tg}^{-1}(\beta/\alpha)$

这就是总能量所满足的关系式。

(2) 有上式可得:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\beta L}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} -\operatorname{tg}\frac{\beta L}{2} \dots\dots n=\text{偶数, 包括零} \\ \operatorname{ctg}\frac{\beta L}{2} \dots\dots n=\text{奇数} \end{cases}$$

$$\alpha L = -(\beta L) \operatorname{ctg} \frac{\beta L}{2}$$

亦即

$$\alpha L = (\beta L) \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2}$$

令 $\beta L = u, \alpha L = v$, 则上面两方程变为:

$$v = -u \operatorname{tg} \frac{u}{2} \dots\dots (1)$$

$$v = u \operatorname{tg} \frac{u}{2} \dots\dots (2)$$

另外, 注意到 u 和 v 还必须满足关系: $u^2 + v^2 = 2\mu V_0 L^2 / \hbar^2 \dots\dots (3)$

所以方程 (1) 和 (2) 要分别与方程 (3) 联立求解。

3.8 有一粒子, 其质量为 m , 在一个三维势箱中运动。势箱的长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 在势箱外, 势能 $V = \infty$; 在势箱内, $V = 0$ 。试计算出粒子可能具有的能量。

解: 势能分布情况, 由题意知:

$$V_x = 0, 0 \leq x \leq a,$$

$$V_y = 0, 0 \leq y \leq b,$$

$$V_z = 0, 0 \leq z \leq c,$$

$$V_x = \infty, x < 0 \text{ 和 } x > a$$

$$V_y = \infty, y < 0 \text{ 和 } y > b$$

$$V_z = \infty, z < 0 \text{ 和 } z > c$$

在势箱内波函数 $\psi(x, y, z)$ 满足方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - (V_x + V_y + V_z)] \psi = 0$$

解这类问题，通常是运用分离变量法将偏微分方程分成三个常微分方程。

$$\text{令 } \psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

代入 (1) 式，并将两边同除以 $X(x)Y(y)Z(z)$ ，得：

$$\left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_x\right) + \left(\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_y\right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_z\right) = -\frac{2m}{\hbar^2} E$$

方程左边分解成三个相互独立的部分，它们之和等于一个常数。因此，每一部分都应等于一个常数。由此，得到三个方程如下：

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_x = -\frac{2m}{\hbar^2} E_x$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_y = -\frac{2m}{\hbar^2} E_y$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_z = -\frac{2m}{\hbar^2} E_z$$

其中 $E = E_x + E_y + E_z$, E_x, E_y, E_z 皆为常数。

将上面三个方程中的第一个整理，得：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_x - V_x) X = 0 \dots\dots (2)$$

边界条件： $X(0) = X(l) = 0$

可见，方程 (2) 的形式及边界条件与一维箱完全相同，因此，其解为：

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n_x \pi}{a} x$$

$$E_x = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_x^2, n_x = 1, 2, 3, \dots\dots$$

类似地，有

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n_y \pi}{b} y$$

$$E_y = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\pi b^2} n_y^2, n_y = 1, 2, 3, \dots$$

$$Z_n = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n_z \pi}{c} z$$

$$E_z = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\pi c^2} n_z^2, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore \psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

可见，三维势箱中粒子的波函数相当于三个一维箱中粒子的波函数之积。而粒子的能量相当于三个一维箱中粒子的能量之和。

对于方势箱， $a = b = c$ ，波函数和能量为：

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{a} \sin \frac{n_z \pi z}{a}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

第四章 碱金属原子

4.1 已知 Li 原子光谱主线系最长波长 $\lambda = 6707 \text{ \AA}$ ，辅线系系限波长 $\lambda_\infty = 3519 \text{ \AA}$ 。求锂原子第一激发电势和电离电势。

解：主线系最长波长是电子从第一激发态向基态跃迁产生的。辅线系系限波长是电子从无穷远处向第一激发态跃迁产生的。设第一激发电势为 V_1 ，电离电势为 V_∞ ，则有：

$$eV_1 = h \frac{c}{\lambda}$$

$$\therefore V_1 = \frac{hc}{\lambda e} = 1.850 \text{ 伏特}$$

$$eV_\infty = h \frac{c}{\lambda} + h \frac{c}{\lambda_\infty}$$

$$\therefore V_\infty = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_\infty} \right) = 5.375 \text{ 伏特}。$$

4.2 Na 原子的基态 $3S$ 。已知其共振线波长为 5893 \AA ，漫线系第一条的波长为 8193 \AA ，基线系第一条的波长为 18459 \AA ，主线系的系限波长为 2413 \AA 。试求 $3S$ 、 $3P$ 、 $3D$ 、 $4F$ 各谱项的项值。

解：将上述波长依次记为

$$\lambda_{p\max}, \lambda_{d\max}, \lambda_{f\max}, \lambda_{p\infty},$$

$$\text{即 } \lambda_{p\max} = 5893 \text{ \AA}, \lambda_{d\max} = 8193 \text{ \AA}, \lambda_{f\max} = 18459 \text{ \AA}, \lambda_{p\infty} = 2413 \text{ \AA}$$

容易看出：

$$T_{3S} = \tilde{\nu}_{\infty} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} = 4.144 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{3P} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} - \frac{1}{\lambda_{p\max}} = 2.447 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{3D} = T_{3P} - \frac{1}{\lambda_{d\max}} = 1.227 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{4F} = T_{3D} - \frac{1}{\lambda_{f\max}} = 0.685 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

4.3 K 原子共振线波长 7665 \AA ，主线系的系限波长为 2858 \AA 。已知 K 原子的基态 $4S$ 。

试求 $4S$ 、 $4P$ 谱项的量子数修正项 Δ_s, Δ_p 值各为多少？

$$\text{解：由题意知： } \lambda_{p\max} = 7665 \text{ \AA}, \lambda_{p\infty} = 2858 \text{ \AA}, T_{4s} = \tilde{\nu}_{p\infty} = 1/\lambda_p$$

$$\text{由 } T_{4s} = \frac{R}{(4 - \Delta_s)^2}, \text{ 得： } 4 - \Delta_s = \sqrt{R_k / T_{4s}}$$

$$\text{设 } R_k \approx R, \text{ 则有 } \Delta_s = 2.229, T_{4p} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} - \frac{1}{\lambda_{p\max}}$$

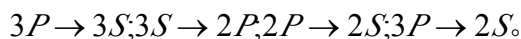
与上类似

$$\Delta_p \approx 4 - \sqrt{R_{\infty} / T_{4p}} = 1.764$$

4.4 Li 原子的基态项 $2S$ 。当把 Li 原子激发到 $3P$ 态后，问当 $3P$ 激发态向低能级跃迁时可能产生哪些谱线（不考虑精细结构）？

答：由于原子实的极化和轨道贯穿的影响，使碱金属原子中 n 相同而 l 不同的能级有很大差别，即碱金属原子价电子的能量不仅与主量子数 n 有关，而且与角量子数 l 有关，可以记为 $E = E(n, l)$ 。理论计算和实验结果都表明 l 越小，能量越低于相应的氢原子的能量。

当从 $3P$ 激发态向低能级跃迁时，考虑到选择定则： $\Delta l = \pm 1$ ，可能产生四条光谱，分别由以下能级跃迁产生：



4.5 为什么谱项 S 项的精细结构总是单层结构？试直接从碱金属光谱双线的规律和从电子自旋与轨道相互作用的物理概念两方面分别说明之。

答：碱金属光谱线三个线系头四条谱线精细结构的规律性。第二辅线系每一条谱线的二成分的间隔相等，这必然是由于同一原因。第二辅线系是诸 S 能级到最低 P 能级的跃迁产生

的。最低 P 能级是这线系中诸线共同有关的，所以如果我们认为 P 能级是双层的，而 S 能级是单层的，就可以得到第二辅线系的每一条谱线都是双线，且波数差是相等的情况。

主线系的每条谱线中二成分的波数差随着波数的增加逐渐减少，足见不是同一个来源。主线系是诸 P 能级跃迁到最低 S 能级所产生的。我们同样认定 S 能级是单层的，而推广所有 P 能级是双层的，且这双层结构的间隔随主量子数 n 的增加而逐渐减小。这样的推论完全符合碱金属原子光谱双线的规律性。因此，肯定 S 项是单层结构，与实验结果相符合。

碱金属能级的精细结构是由于碱金属原子中电子的轨道磁矩与自旋磁矩相互作用产生附加能量的结果。S 能级的轨道磁矩等于 0，不产生附加能量，只有一个能量值，因而 S 能级是单层的。

4.6 计算氢原子赖曼系第一条的精细结构分裂的波长差。

解：赖曼系的第一条谱线是 $n=2$ 的能级跃迁到 $n=1$ 的能级产生的。根据选择定则，跃迁只能发生在 $2^2P \rightarrow 1^2S$ 之间。而 S 能级是单层的，所以，赖曼系的第一条谱线之精细结构是由 P 能级分裂产生的。

氢原子能级的能量值由下式决定：

$$E = \frac{-Rhc(Z-\sigma)^2}{n^2} - \frac{Rhc\alpha^2(Z-S)^4}{n^3} \times \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$$

其中 $(Z-\sigma) = (Z-S) = 1$

$$\because E(2^2P_{3/2}) - E(1^2S_{1/2}) = h\frac{c}{\lambda_1}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{hc}{E(2^2P_{3/2}) - E(1^2S_{1/2})}$$

$$\because E(2^2P_{1/2}) - E(1^2S_{1/2}) = h\frac{c}{\lambda_2}$$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{hc}{E(2^2P_{1/2}) - E(1^2S_{1/2})}$$

因此，有：

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 = \\ &= \frac{hc[E(2^2P_{3/2}) - E(1^2S_{1/2})]}{[E(2^2P_{3/2}) - E(1^2S_{1/2})][E(2^2P_{1/2}) - E(1^2S_{1/2})]} \\ E(2^2P_{3/2}) &= -Rhc\frac{16+a^2}{64} \\ E(2^2P_{1/2}) &= -Rhc\frac{16+5a^2}{64} \\ E(1^2S_{1/2}) &= -Rhc\frac{4+a^2}{4} \end{aligned}$$

将以上三个能量值代入 $\Delta\lambda$ 的表达式，得：

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{\frac{4a^2}{64}}{\frac{48+11a^2}{64} \times \frac{48+15a^2}{64}} \cdot \frac{1}{R} \\ &= \frac{64}{R(48+11a^2)(48+15a^2)} \frac{4a^2}{64} \\ &= 5.39 \times 10^{-13} \text{ 米} = 5.39 \times 10^{-3} \text{ \AA}\end{aligned}$$

4.7 Na 原子光谱中得知其 3D 项的项值 $T_{3D} = 1.2274 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$ ，试计算该谱项之精细结构裂距。

解：已知 $T_{3D} = 1.2274 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$, $R_{Na} = 1.0974 \times 10^7 \text{ 米}^{-1}$

$$\therefore n^* = \sqrt{\frac{R_{Na}}{T_{3D}}} = 2.9901$$

$$\text{而 } Z^* = n / n^*$$

$$\text{所以有: } \Delta T = \frac{Ra^2 Z^{*4}}{n^3 l(l+1)} = 3.655 \text{ 米}^{-1}$$

4.8 原子在热平衡条件下处在各种不同能量激发态的原子的数目是按玻尔兹曼分布的，

即能量为 E 的激发态原子数目 $N = N_0 \frac{g}{g_0} e^{-(E-E_0)/KT}$ 。其中 N_0 是能量为 E_0 的状态的

原子数， g 和 g_0 是相应能量状态的统计权重，K 是玻尔兹曼常数。从高温铯原子气体光谱中

测出其共振光谱双线 $\lambda_1 = 8943.5 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 8521.1 \text{ \AA}$ 的强度比 $I_1 : I_2 = 2:3$ 。试估算此气体的温度。已知相应能级的统计权重 $g_1 = 2, g_2 = 4$ 。

解：相应于 λ_1, λ_2 的能量分别为：

$$E_1 = hc / \lambda_1; E_2 = hc / \lambda_2$$

所测得的光谱线的强度正比于该谱线所对应的激发态能级上的粒子数 N，即

$$I \propto N$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{I_1}{I_2} &= \frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{E_1-E_2}{KT}} = \frac{2}{3} \\ e^{-\frac{E_1-E_2}{KT}} &= \frac{2g_2}{3g_1}\end{aligned}$$

由此求得 T 为：

$$T = \frac{E_2 - E_1}{K \ln \frac{2g_2}{3g_1}} = 2773K$$

第五章 多电子原子

5.1 H_e 原子的两个电子处在 2p3d 电子组态。问可能组成哪几种原子态?用原子态的符号表示之。已知电子间是 LS 耦合。

解: 因为 $l_1 = 1, l_2 = 2, s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$,

$$S = s_1 + s_2 \text{ 或 } s_1 - s_2;$$

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|,$$

$$\therefore S = 0, 1; L = 3, 2, 1$$

所以可以有如下 12 个组态:

$$L = 1, S = 0, {}^1P_1$$

$$L = 1, S = 1, {}^3P_{0,1,2}$$

$$L = 2, S = 0, {}^1D_2$$

$$L = 2, S = 1, {}^3D_{1,2,3}$$

$$L = 3, S = 0, {}^1F_3$$

$$L = 3, S = 1, {}^3F_{2,3,4}$$

5.2 已知 H_e 原子的两个电子被分别激发到 2p 和 3d 轨道, 器所构成的原子态为 3D , 问这两电子的轨道角动量 p_{l1} 与 p_{l2} 之间的夹角, 自旋角动量 p_{s1} 与 p_{s2} 之间的夹角分别为多少?

解: (1) 已知原子态为 3D , 电子组态为 2p3d

$$\therefore L = 2, S = 1, l_1 = 1, l_2 = 2$$

因此,

$$\begin{aligned}
 p_{l_1} &= \sqrt{l_1(l_1+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{2}\hbar \\
 p_{l_2} &= \sqrt{l_2(l_2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar \\
 P_L &= \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar \\
 P_L^2 &= p_{l_1}^2 + p_{l_2}^2 + 2p_{l_1}p_{l_2}\cos\theta_L \\
 \therefore \cos\theta_L &= (P_L^2 - p_{l_1}^2 - p_{l_2}^2)/2p_{l_1}p_{l_2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 \theta_L &= 106^\circ 46'
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \because s_1 = s_2 &= \frac{1}{2} \\
 \therefore p_1 = p_2 &= \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \\
 P_S &= \sqrt{S(S+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 P_S^2 &= p_{s_1}^2 + p_{s_2}^2 + 2p_{s_1}p_{s_2}\cos\theta_s \\
 \therefore \cos\theta_s &= (P_S^2 - p_{s_1}^2 - p_{s_2}^2)/2p_{s_1}p_{s_2} = \frac{1}{3} \\
 \theta_s &= 70^\circ 32'
 \end{aligned}$$

5.3 锌原子 (Z=30) 的最外层电子有两个, 基态时的组态是 4s4s。当其中有一个被激发, 考虑两种情况: (1) 那电子被激发到 5s 态; (2) 它被激发到 4p 态。试求出 LS 耦合情况下这两种电子组态分别组成的原子状态。画出相应的能级图。从 (1) 和 (2) 情况形成的激发态向低能级跃迁分别发生几种光谱跃迁?

$$\text{解: (1) 组态为 } 4s5s \text{ 时 } l_1 = l_2 = 0, s_1 = s_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore L = 0, S = 0, 1$$

$$S = 0 \text{ 时, } J = L = 0, \text{ 单重态 } {}^1S_0$$

$$S = 1 \text{ 时; } J = 1, \text{ 三重态 } {}^3S_1$$

根据洪特定则可画出相应的能级图, 有选择定则能够判断出能级间可以发生的 5 种跃迁:

$$5^1S_0 \rightarrow 4^1P_1, 5^3S_1 \rightarrow 4^3P_0;$$

$$5^3S_1 \rightarrow 4^3P_1; 5^3S_1 \rightarrow 4^3P_2$$

$$4^1P_1 \rightarrow 4^1S_0$$

所以有 5 条光谱线。

(2) 外层两个电子组态为 4s4p 时:

$$l_1 = 0, l_2 = 1, s_1 = s_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore L=1, S=0,1$$

$$S=0 \text{ 时, } J=L=1, \text{ 单重态 } {}^1P_1$$

$$S=1 \text{ 时; } J=2,1,0, \text{ 三重态 } {}^3P_{2,1,0}$$

根据洪特定则可以画出能级图, 根据选择定则可以看出, 只能产生一种跃迁, $4^1P_1 \rightarrow 4^1S_0$, 因此只有一条光谱线。

5.4 试以两个价电子 $l_1=2$ 和 $l_2=3$ 为例说明, 不论是 LS 耦合还是 jj 耦合都给出同样数目的可能状态.

证明: (1) LS 耦合

$$S=0,1; L=5,4,3,2,1,$$

$$S=0 \text{ 时; } J=L$$

5 个 L 值分别得出 5 个 J 值, 即 5 个单重态.

$$S=1 \text{ 时; } J=L+1, L, L-1;$$

代入一个 L 值便有一个三重态. 5 个 L 值共有 5 乘 3 等于 15 个原子态:

$${}^3P_{0,1,2}; {}^3D_{1,2,3}; {}^3F_{2,3,4}; {}^3G_{3,4,5}; {}^3H_{4,5,6}$$

因此, LS 耦合时共有 20 个可能的状态.

(2) jj 耦合:

$$j=l+s \text{ 或 } j=l-s; j_1 = \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2}; j_2 = \frac{7}{2} \text{ 或 } \frac{5}{2}$$

$$J=j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots, |j_1-j_2|$$

将每个 j_1 、 j_2 合成 J 得:

$$j_1 = \frac{5}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{7}{2}, \text{ 合成 } J=6,5,4,3,2,1$$

$$j_1 = \frac{3}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{7}{2}, \text{ 合成 } J=5,4,3,2$$

$$j_1 = \frac{5}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{5}{2}, \text{ 合成 } J=5,4,3,2,1,0$$

$$j_1 = \frac{3}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{5}{2}, \text{ 合成 } J=4,3,2,1$$

$$\text{共 20 个状态: } \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)_{6,5,4,3,2,1}, \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)_{5,4,3,2}, \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)_{5,4,3,2,1,0}, \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)_{4,3,2,1}$$

所以, 对于相同的组态无论是 LS 耦合还是 jj 耦合, 都会给出同样数目的可能状态.

5.5 利用 LS 耦合、泡利原理和洪特定则来确定碳 $Z=6$ 、氮 $Z=7$ 的原子基态。

解: 碳原子的两个价电子的组态 $2p^2$, 属于同科电子. 这两个电子可能有的 m_l 值是

1, 0, -1; 可能有 m_s 值是 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, 两个电子的主量子数和角量子数相同, 根据泡利原理, 它们的其余两个量子数 m_l 和 m_s 至少要有有一个不相同. 它们的 m_l 和 m_s 的可能配合如下表所示.

为了决定合成的光谱项, 最好从 $M_L = \sum m_{li}$ 的最高数值开始, 因为这就等于 L 出现的最高数值. 现在, M_L 得最高数值是 2, 因此可以得出一个 D 项. 又因为这个 M_L 只与 $M_S = 0$ 相伴发生, 因此这光谱项是 1D 项. 除了 $M_L = 2$ 以外, $M_L = +1, 0, -1, -2$ 也属于这一光谱项, 它们都是 $M_S = 0$. 这些谱项在表中以 M_L 的数字右上角的记号 “.” 表示. 共有两项是 $M_L = \pm 1, M_S = 0$; 有三项是 $M_L = 0, M_S = 0$. 在寻找光谱项的过程中, 把它们的哪一项选作 1D 项的分项并不特别重要. 类似地可以看出有九个组态属于 3P 项, 在表中以 M_L 的

碳原子

m_{s1}	m_{s2}	m_{l1}	m_{l2}	$\sum_i m_{si} = M_S$	$\sum_i m_{li} = M_L$
1/2	1/2	1	0	1	1*
1/2	1/2	1	-1	1	0*
1/2	1/2	0	-1	1	-1*
1/2	-1/2	1	1	0	2 ⁰
1/2	-1/2	1	0	0	1 ⁰
1/2	-1/2	1	-1	0	0 ⁰
1/2	-1/2	0	1	0	1*
1/2	-1/2	0	0	0	0
1/2	-1/2	0	-1	0	-1*
1/2	-1/2	-1	1	0	0*
1/2	-1/2	-1	0	0	-1 ⁰
1/2	-1/2	-1	-1	0	-2 ⁰
-1/2	-1/2	1	0	-1	1*
-1/2	-1/2	1	-1	-1	0*
-1/2	-1/2	0	-1	-1	-1*

氮原子

m_{s1}	m_{s2}	m_{s3}	m_{l1}	m_{l2}	m_{l3}	$\sum_i m_{si} = M_S$	$\sum_i m_{li} = M_L$
1/2	1/2	1/2	1	0	-1	3/2	0
1/2	1/2	1/2	0	1	-1	3/2	0*

1/2	1/2	1/2	-1	0	1	3/2	0
-1/2	-1/2	-1/2	1	0	-1	3/2	0*
-1/2	-1/2	-1/2	0	1	-1	3/2	0
-1/2	-1/2	-1/2	-1	0	1	3/2	0*
...
1/2	1/2	-1/2	1	0	1	1/2	2
1/2	1/2	-1/2	1	0	0	1/2	1
1/2	1/2	-1/2	1	0	-1	1/2	0*
1/2	1/2	-1/2	-1	0	0	1/2	-1
1/2	1/2	-1/2	-1	0	-1	1/2	-2
1/2	1/2	-1/2	1	-1	1	1/2	1
1/2	1/2	-1/2	1	-1	0	1/2	0
1/2	1/2	-1/2	1	-1	-1	1/2	-1
...

数字右上角的记号“*”表示。剩下一个组态 $M_L = 0, M_S = 0$ ，它们只能给出一个 1S 项。

因此，碳原子的光谱项是 1D 、 3P 和 1S ，而没有其它的项。

因为在碳原子中 3P 项的 S 为最大，根据同科电子的洪特定则可知，碳原子的 3P 项应最低。碳原子两个价电子皆在 p 次壳层， p 次壳层的满额电子数是 6，因此碳原子的能级是正常次序， 3P_0 是它的基态谱项。

氮原子的三个价电子的组态是 $2p^2 2p^2 p$ ，亦属同科电子。它们之间满足泡利原理的可能配合如下表所示。

表中删节号表示还有其它一些配合，相当于此表下半部给出的 m_s 间以及 m_l 间发生交换。由于电子的全同性，那些配合并不改变原子的状态，即不产生新的项。

由表容易判断，氮原子只有 2D 、 2P 和 4S 。根据同科电子的洪特定则，断定氮原子的基态谱项应为 $^4S_{3/2}$ 。

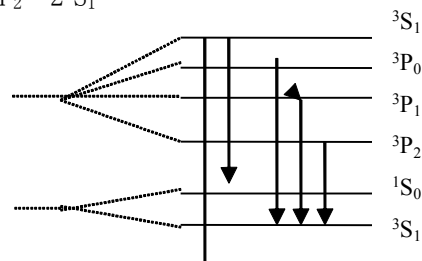
5.6 已知氦原子的一个电子被激发到 $2p$ 轨道，而另一个电子还在 $1s$ 轨道。试作出能级跃迁图来说明可能出现哪些光谱线跃迁？

解： $l_1 = 0, l_2 = 1, s_1 = s_2 = 1/2; S = 0, 1; L = 1$

对于 $S = 0, J = L = 1$ ，单态 1P_1

对于 $S = 1, J = 2, 1, 0$ ，三重态 $^3P_{2, 1, 0}$

根据选择定则，可能出现 5 条谱线，它们分别由下列跃迁产生： $2^1P_1 \rightarrow 1^1S_0$ ； $2^1P_1 \rightarrow 2^1S_0$
 $2^3P_0 \rightarrow 2^3S_1$ ； $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$ ； $2^3P_2 \rightarrow 2^3S_1$



1s2p

1s2s

1s1s

5.7 *Ca* 原子的能级是单层和三重结构，三重结构中 J 的能级高。其锐线系的三重线的频率 $\nu_2 > \nu_1 > \nu_0$ ，其频率间隔为 $\Delta\nu_1 = \nu_1 - \nu_0, \Delta\nu_2 = \nu_2 - \nu_1$ 。试求其频率间隔比值

$$\frac{\Delta\nu_2}{\Delta\nu_1}。$$

解：*Ca* 原子处基态时两个价电子的组态为 $4s4s$ 。*Ca* 的锐线系是电子由激发的 s 能级向 $4p$ 能级跃迁产生的光谱线。与氢的情况类似，对 $4s4p$ 组态可以形成 1P_1 和 $^3P_{2,1,0}$ 的原子态，也就是说对 $L=1$ 可以有 4 个能级。电子由诸激发 3S 能级上跃迁到 $^3P_{2,1,0}$ 能级上则产生锐线系三重线。

根据朗德间隔定则，在多重结构中能级的二相邻间隔 $\Delta\nu_1 = \nu_1 - \nu_0, \Delta\nu_2 = \nu_2 - \nu_1$ 同有关的 J 值中较大的那一个成正比，因此， $\Delta\nu_1 \propto 2, \Delta\nu_2 \propto 1$ ，所以 $\frac{\Delta\nu_2}{\Delta\nu_1} = \frac{1}{2}$ 。

5.8 *Pb* 原子基态的两个价电子都在 $6p$ 轨道。若其中一个价电子被激发到 $7s$ 轨道，而其价电子间相互作用属于 jj 耦合。问此时 *Pb* 原子可能有哪些状态？

解：激发后铅原子的电子组态是 $6p7s$ 。

$$\begin{aligned} l_1 &= 1, l_2 = 0; s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2} \\ \therefore j &= l + s \text{ 或 } l - s \\ \therefore j_1 &= \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2}; j_2 = \frac{1}{2} \\ j_1 &= \frac{3}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{1}{2} \text{ 合成 } J = 2, 1. \\ j_1 &= \frac{1}{2} \text{ 和 } j_2 = \frac{1}{2} \text{ 合成 } J = 1, 0 \end{aligned}$$

因此，激发后 *Pb* 原子可能有四种状态：

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_2, \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_0。$$

5.9 根据 LS 耦合写出在下列情况下内量子数 J 的可能值

$$(1) L=3, S=2, (2) L=3, S=\frac{7}{2}, (3) L=3, S=\frac{3}{2}$$

解：(1) 因为 $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$

所以 $J = 5, 4, 3, 2, 1$, 共 $2S+1=5$ 个值。

(2) 类似地, $J = 6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 共有 7 个值。这里 $L < S$, 其个数等于 $2L+1$ 。

(3) 同样地, 可得: $J = 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 。

第六章 磁场中的原子

6.1 已知钷原子的基态是 $^4F_{3/2}$ 。(1) 问钷原子束在不均匀横向磁场中将分裂为几束?

(2) 求基态钷原子的有效磁矩。

解：(1) 原子在不均匀的磁场中将受到力的作用，力的大小与原子磁矩（因而于角动量）在磁场方向的分量成正比。钷原子基态 $^4F_{3/2}$ 之角动量量子数 $J = 3/2$ ，角动量在磁场方向的分量的个数为 $2J+1 = 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 4$ ，因此，基态钷原子束在不均匀横向磁场中将分裂为 4 束。

$$(2) \mu_J = g \frac{e}{2m} P_J$$

$$P_J = \sqrt{J(J+1)}\hbar = \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

$$\text{按 LS 耦合: } g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \mu_J = \frac{2}{5} \cdot \frac{e}{2m} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \hbar = \frac{\sqrt{15}}{5} \mu_B \approx 0.7746 \mu_B$$

6.2 已知 He 原子 $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$ 跃迁的光谱线在磁场中分裂为三条光谱线，其间距

$\Delta\tilde{\nu} = 0.467$ / 厘米，试计算所用磁场的感应强度。

解：裂开后的谱线同原谱线的波数之差为：

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = (m_2 g_2 - m_1 g_1) \frac{Be}{4\pi mc}$$

氦原子的两个价电子之间是 LS 型耦合。对应 1P_1 原子态， $M_2 = 1, 0, -1$ ； $S = 0, L = 1, J = 1$ ，

对应 1S_0 原子态， $M_1 = 0$ ， $S = 0, L = 0, J = 0, g_1 = 1 = g_2$ 。

$$\Delta\tilde{\nu} = (1, 0, -1) Be / 4\pi mc$$

又因谱线间距相等： $\Delta\tilde{\nu} = Be / 4\pi mc = 0.467$ / 厘米。

$$\therefore B = \frac{4\pi mc}{e} \times 0.467 = 1.00 \text{ 特斯拉}。$$

6.3 Li 漫线系的一条谱线 ($3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$) 在弱磁场中将分裂成多少条谱线？试作出相应的能级跃迁图。

解：在弱磁场中，不考虑核磁矩。

$$3^2D_{3/2} \quad \text{能级: } l=2, S=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2},$$

$$M = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

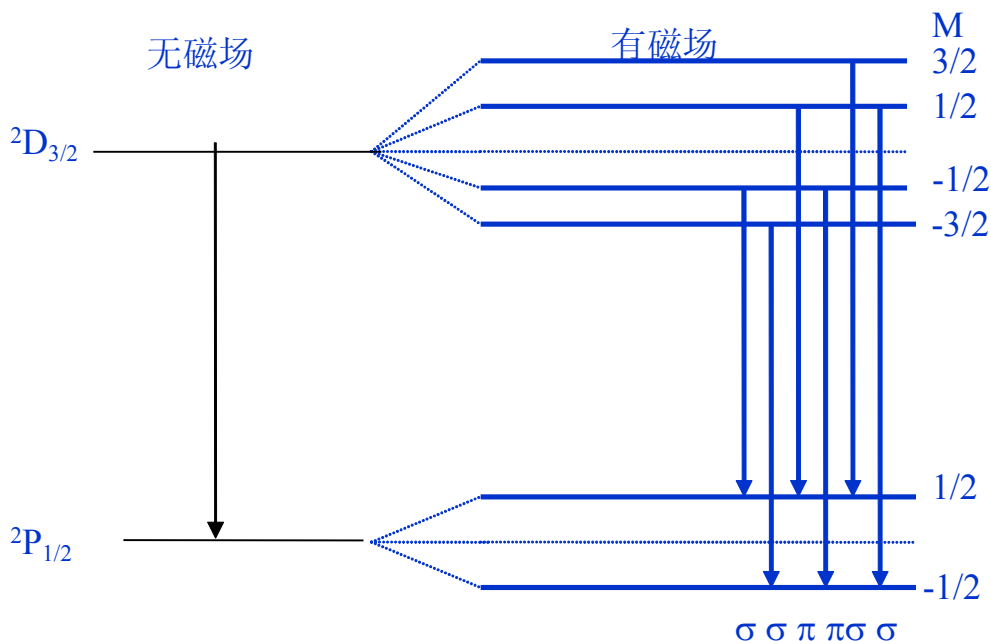
$$g_2 = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = \frac{4}{5}$$

$$2^2P_{1/2} \quad \text{能级: } l=1, S=\frac{1}{2}, j=\frac{1}{2},$$

$$M = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, g_1 = \frac{2}{3}$$

$$\Delta\tilde{\nu} = \left(-\frac{26}{30}, -\frac{22}{30}, -\frac{2}{30}, \frac{2}{30}, \frac{22}{30}, \frac{26}{30}\right)L$$

所以：在弱磁场中由 $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$ 跃迁产生的光谱线分裂成六条，谱线之间间隔不等。



6.4 在平行于磁场方向观察到某光谱线的正常塞曼效应分裂的两谱线间波长差是 $0.40 \text{ } ^\circ\text{A}$ 。所用的磁场的 B 是 2.5 特斯拉，试计算该谱线原来的波长。

解：对单重项（自旋等于零）之间的跃迁所产生谱线可观察到正常塞曼效应。它使原来的一条谱线分裂为三条，两个 σ 成分，一个 π 成分。 π 成分仍在原来位置，两个 σ 成分在 π 成分两侧，且与 π 成分间的波数间隔都是一个洛伦兹单位 L。

$$\text{又 } \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}, \Delta\tilde{\nu} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\Delta\lambda / \lambda^2$$

符号表示波长增加波数减少。根据题设，把 $\Delta\lambda$ 近似地看作 σ 成分与 π 成分间的波长差，则有：

$$|\Delta\tilde{\nu}| = \Delta\lambda / \lambda^2 = L$$

其中 $L = Be/4\pi mc$

$$\text{因此, } \lambda = \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{L}} \approx 4.1405 \times 10^{-7} \text{ 米} = 4140.5 \text{ } ^\circ\text{A}$$

6.5 氢原子光谱中波长为 $6678.1 \text{ } ^\circ\text{A} (1s3d^1D_2 \rightarrow 1s2p^1P_1)$ 及 $7065.1 \text{ } ^\circ\text{A} (1s3s^1S_1 \rightarrow 1s2p^3P_0)$ 的两条谱线，在磁场中发生塞曼效应时应分裂成几条？分别作出能级跃迁图。问哪一个正常塞曼效应？哪个不是？为什么？

解：(1) 1D_2 谱项： $L=2, S=0, J=2, M_2 = \pm 2, \pm 1, 0, g_2 = 1$ 。

1P_1 谱项： $L=1, S=0, J=1, M_1 = \pm 1, 0, g_1 = 1$

$\Delta\tilde{\nu} = (-1, 0, +1)L$ 。可以发生九种跃迁，但只有三个波长，所以 $\lambda = 6678.1 \text{ } ^\circ\text{A}$ 的光谱线

分裂成三条光谱线，且裂开的两谱线与原谱线的波数差均为 L ，是正常塞曼效应。

$$(2) \text{ 对 } {}^3S_1 \text{ 能级: } L=0, S=1, J=1, M_2 = \pm 1, 0, g_2 = 2$$

$$\text{对 } {}^3P_0 \text{ 能级: } L=1, S=1, J=0, M_1 = 0, g_1 = \frac{0}{0}, M_1 g_1 = 0$$

$\Delta\tilde{\nu} = (-2, 0, +2)L$ ，所以 $\lambda = 7065.1 \text{ \AA}$ 的光谱线分裂成三条，裂开的两谱线与原谱线的波数差均为 $2L$ ，所以不是正常塞曼效应。

6.6 Na 原子从 $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ 跃迁的光谱线波长为 5896 \AA ，在 $B=2.5$ 特斯拉的磁场中发生塞曼分裂。问从垂直于磁场方向观察，其分裂为多少条光谱线？其中波长最长和最短的两条光谱线的波长各为多少 Å ？

$$\text{解: 对于 } 3^2P_{1/2} \text{ 能级: } L=1, S=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}, M_2 = \pm \frac{1}{2}, g_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{对于 } 3^2S_{1/2} \text{ 能级: } L=0, S=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}, M_1 = \pm \frac{1}{2}, g_1 = 2$$

$$\Delta\tilde{\nu} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)L, \text{ 所以从垂直于磁场方向观察, 此谱线分裂为四条。}$$

根据塞曼效应中裂开后的谱线同原谱线波数之差的表达式：

$$\Delta\tilde{\nu} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\Delta\lambda / \lambda^2, \quad |\Delta\tilde{\nu}| = \Delta\lambda / \lambda^2 = \frac{4}{3}L$$

$$\text{因此, 波长改变 } \Delta\lambda \text{ 为: } \Delta\lambda = \frac{4}{3}L\lambda^2 = 0.54 \text{ \AA}$$

所以，最长的波长 λ_{\max} 为：

$$\lambda_{\max} = \lambda + \Delta\lambda = 5896.54 \text{ \AA}$$

最短的波长 λ_{\min} 为：

$$\lambda_{\min} = \lambda - \Delta\lambda = 5895.46 \text{ \AA}$$

6.7 Na 原子从 $3P \rightarrow 3S$ 跃迁的精细结构为两条，波长分别为 5895.93 埃和

5889.96 埃。试求出原能级 ${}^2P_{3/2}$ 在磁场中分裂后的最低能级与 ${}^2P_{1/2}$ 分裂后的最高能级相并合时所需要的磁感应强度 B 。

解：对 $^2P_{3/2}$ 能级： $l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2}, M=\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, g=\frac{4}{3}$ ；

$^2P_{1/2}$ 能级： $l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{1}{2}, M=\pm\frac{1}{2}, g=\frac{2}{3}$ ；磁场引起的附加能量为：

$$\Delta E = Mg \frac{he}{4\pi m} B$$

设 $^2P_{3/2}, ^2P_{1/2}, ^2S_{1/2}$ ，对应的能量分别为 E_2, E_1, E_0 ，跃迁 $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}, ^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ ，产

生的谱线波长分别为 λ_2, λ_1 ；那么， $\lambda_2 = 5889.96 \text{ \AA}, \lambda_1 = 5895.93 \text{ \AA}$ 。 2P 能级在磁场中发生分裂， $^2P_{3/2}, ^2P_{1/2}$ ，的附加磁能分别记为 $\Delta E_2, \Delta E_1$ ；现在寻求 $E_2 + \Delta E_2 = E_1 + \Delta E_1$ 时的 B。

$$E_2 - E_1 = \Delta E_1 - \Delta E_2 = (M_1 g_1 - M_2 g_2) \frac{eh}{4\pi m} B$$

$$\text{由此得：} \frac{(E_2 - E_1) - (\Delta E_1 - \Delta E_2)}{hc} = (M_1 g_1 - M_2 g_2) \frac{eB}{4\pi mc}$$

$$\text{即：} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = (M_1 g_1 - M_2 g_2) \frac{eB}{4\pi mc}$$

$$\text{因此，有：} B = \frac{4\pi mc}{e} \frac{1}{M_1 g_1 - M_2 g_2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

其中 $M_1 g_1 = \frac{1}{3}, M_2 g_2 = -2$ ，将它们及各量代入上式得：

$$B = 15.8 \text{ 特斯拉。}$$

6.8 已知铁的原子束在横向不均匀磁场中分裂为 9 束。问铁原子的 J 值多大？其有效磁矩多大？如果已知上述铁原子的速度 $v = 10^3$ 米/秒，铁的原子量为 55.85，磁极范围 $L_1 = 0.03$ 米，磁铁到屏的距离 $L_2 = 0.10$ 米，磁场中横向的磁感应强度的不均匀度

$$\frac{dB}{dy} = 10^3 \text{ 特斯拉/米，试求屏上偏离最远的两束之间的距离 d。}$$

解：分裂得条数为 $2J+1$ ，现 $2J+1=9$ 。所以 $J=4$ ，有效磁矩 μ_J 为：

$$\mu_J = g \frac{e}{2m} P_J = g \sqrt{J(J+1)} \mu_B$$

$$\text{而 } \sqrt{J(J+1)} = 2\sqrt{5}$$

对 5D 原子态： $L=2, S=2, g=\frac{3}{2}$ ，因此 $\mu_J = 3\sqrt{5} \mu_B \approx 6.21 \times 10^{-23} \text{ 安} \cdot \text{米}^2$

与第二章 11 题相似,

$$v_{\perp} = at, a = \frac{f}{m} = \frac{\mu_y}{m} \frac{dB}{dy}, t = L_1 / v$$

$$\therefore v_{\perp} = \frac{\mu_y}{m} \frac{dB}{dy} \frac{L_1}{v}$$

$$\therefore \frac{v_{\perp}}{v} = \tan \theta, m_{Fe} = \frac{A_{Fe}}{N_0}$$

$$\text{而 } S' = L_2 \tan \theta = L_2 \frac{v_{\perp}}{v} = \frac{\mu_y}{m} \frac{dB}{dy} \frac{L_1 L_2}{v^2} = -\frac{Mg\mu_B}{m} \frac{dB}{dy} \frac{L_1 L_2}{v^2}$$

将各量的数值代入上式, 得: $S' = 1.799 \times 10^{-3}$ 米

原子束在经过磁场 L_1 距离后, 偏离入射方向的距离:

$$S = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{dB}{dy} \left(\frac{L_1}{v}\right)^2 Mg\mu_B$$

其中, $M = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$, 可见, 当 $M = \pm 4$ 时, 偏离最大。把 $M = -4$ 代入上式, 得:

$$S = \frac{N_0}{2A_{Fe}} \cdot \frac{dB}{dy} \left(\frac{L_1}{v}\right)^2 \cdot \frac{4 \times 3}{2} \mu_B$$

把各量的数值代入上式, 得: $S = 2.79 \times 10^{-3}$ 米。

所以: $d = 2(S + S') = 9.18 \times 10^{-3}$ 米。

6.9 铯原子气体在 $^2P_{1/2}$ 状态。当磁铁调到 $B = 0.2$ 特斯拉时, 观察到顺磁共振现象。问微波发生器的频率多大?

$$\text{解: 对 } ^2P_{1/2} \text{ 原子态: } L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}, g = \frac{2}{3}$$

$$\text{由 } h\nu = g\mu_B B$$

$$\text{得 } \nu = g\mu_B B / h$$

代入各已知数, 得 $\nu = 1.9 \times 10^9$ 秒⁻¹。

6.10 钾原子在 $B = 0.3$ 特斯拉的磁场中, 当交变电磁场的频率为 8.4×10^9 赫兹时观察到顺磁共振。试计算朗德因子 g , 并指出原子处在何种状态?

$$\text{解: 由公式 } h\nu = g\mu_B B, \text{ 得: } g \approx 2$$

钾外层只有一个价电子，所以 $s = \frac{1}{2}$, $j = l + s$ 或 $l - s$

$$\text{又 } g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

将 $g = 2$ 和 $l = j - s$ 代入上式，得到：

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - (j-s)(j-s+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 2$$

整理，得： $j^2 + (1-s)j - s = 0$

当 $s = \frac{1}{2}$ 时，上方程有两个根： $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = -1$

当 $s = -\frac{1}{2}$ 时，上方程有两个根： $j_3 = -\frac{1}{2}, j_4 = -1$

由于量子数不能为负数，因此 j_2, j_3, j_4 无意义，弃之。

$$\therefore j = j_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore j = l + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore l = 0$$

因此钾原子处于 $^2S_{\frac{1}{2}}$ 状态。

6.11 氩原子 ($Z=18$) 的基态为 1S_0 ；钾原子 ($Z=19$) 的基态为 $^2S_{\frac{1}{2}}$ ；钙原子 ($Z=20$) 的

基态为 1S_0 ；钪原子 ($Z=21$) 的基态为 $^2D_{\frac{3}{2}}$ 。问这些原子中哪些是抗磁性的？哪些是顺磁性的？为什么？

答：凡是总磁矩等于零的原子或分子都表现为抗磁性；总磁矩不等于零的原子或分子都表现为顺磁性。

$$\text{而总磁矩为 } \mu_J = g \frac{e}{2m} P_J = g \sqrt{J(J+1)} \mu_B$$

氩原子的基态为 1S_0 ： $L = 0, S = 0, J = 0$ 所以有 $\mu_J = 0$ 故氩是抗磁性的。

同理，钙也是抗磁性的。

钾原子的基态为 $^2S_{\frac{1}{2}}$ ： $L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}, g = 2$ ，所以有 $\mu_J \neq 0$ ，故钾是顺磁性的。

钪原子的基态为 $^2D_{\frac{3}{2}}$ ： $L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}, g = \frac{4}{5}$ ，所以有 $\mu_J \neq 0$ ，故钪是顺磁性

的。

6.22 若已知钒 (4F), 锰 (6S), 铁 (5D) 的原子束, 按照史特恩-盖拉赫实验方法通过及不均匀的磁场时, 依次分裂成 4, 6 和 9 个成分, 试确定这些原子的磁矩的最大投影值。括号中给出了原子所处的状态。

解: 原子的磁矩 μ_J 在磁矩方向的分量为 μ_Z

$$\mu_Z = -Mg\mu_B$$

其中 $M=J, J-1, \dots, -J$; 式中的负号表示当 M 是正值时, μ_Z 和磁场方向相反, 当 M 是负值时 μ_Z 和磁场方向相同。

μ_J 在磁场中有 $2J+1$ 个取向。 μ_J 在磁场中的最大分量: $\mu_{Z_{\text{最大}}} = Jg\mu_B$

对于钒 (4F): 因为 $2S+1=4$, 所以: 自旋 $S=3/2$

因为是 F 项, 所以角量子数 $L=3$, 因为在非均匀磁场中, 其原子束分裂为 4 个成分, 则有 $2J+1=4$, 所以 $J=3/2$ 。

根据 S 、 L 、 J 值求得 g 为:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{2}{5}$$

$$\mu_{Z_{\text{最大}}} = Jg\mu_B = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \mu_B = \frac{3}{5} \mu_B$$

锰 (6S): 因为 $2S+1=6$, 所以: 自旋 $S=5/2$

因为是 S 项, 所以角量子数 $L=0$, 因为在非均匀磁场中, 其原子束分裂为 6 个成分, 则有 $2J+1=6$, 所以 $J=5/2$ 。

因为 $L=0$, 所以 $g=2$, $\mu_{Z_{\text{最大}}} = Jg\mu_B = 5\mu_B$

铁 (5D): 因为 $2S+1=5$, 所以: 自旋 $S=2$

因为是 D 项, 所以角量子数 $L=2$, 因为在非均匀磁场中, 其原子束分裂为 9 个成分, 则有 $2J+1=9$, 所以 $J=4$ 。

根据 S 、 L 、 J 值求得 g 为:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\mu_{Z_{\text{最大}}} = Jg\mu_B = 4 \times \frac{3}{2} \mu_B = 6\mu_B$$

第七章 原子的壳层结构

7.1 有两种原子，在基态时其电子壳层是这样添充的：（1） $n=1$ 壳层、 $n=2$ 壳层和 $3s$ 次壳层都填满， $3p$ 次壳层填了一半。（2） $n=1$ 壳层、 $n=2$ 壳层、 $n=3$ 壳层及 $4s$ 、 $4p$ 、 $4d$ 次壳层都填满。试问这是哪两种原子？

解：根据每个壳层上能容纳的最多电子数为 $2n^2$ 和每个次壳层上能容纳得最多电子数为 $2(2l+1)$ 。

$$(1) \quad n=1 \text{ 壳层、} n=2 \text{ 壳层填满时的电子数为：} 2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 = 10$$

$$3s \text{ 次壳层填满时的电子数为：} 2(2 \times 0 + 1) = 2$$

3p 次壳层填满一半时的电子数为： $\frac{1}{2} \times 2(2 \times 1 + 1) = 3$

所以此中原子共有 15 个电子，即 $Z=15$ ，是 P(磷)原子。

(2) 与 (1) 同理： $n=1,2,3$ 三个壳层填满时的电子数为 28 个
4s、4p、4d 次壳层都填满的电子数为 18 个。

所以此中原子共有 46 个电子，即 $Z=46$ ，是 Pd (钯) 原子。

7.2 原子的 3d 次壳层按泡利原理一共可以填多少电子？为什么？

答：电子的状态可用四个量子数 n, l, m_l, m_s 来描写。根据泡利原理，在原子中不能有两个电子处在同一状态，即不能有两个电子具有完全相同的四个量子数。

3d 次壳层上的电子，其主量子数 n 和角量子数 l 都相同。因此，该次壳层上的任意两个电子，它们的轨道磁量子数和自旋磁量子数不能同时相等，至少要有一个不相等。对于一个给定的 l, m_l 可以取 $m_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ；共有 $2l+1$ 个值；对每个给定的 m_l, m_s 的取值是

$\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ ，共 2 个值；因此，对每一个次壳层 l ，最多可以容纳 $2(2l+1)$ 个电子。

3d 次壳层的 $l=2$ ，所以 3d 次壳层上可以容纳 10 个电子，而不违背泡利原理。

7.3 Na 原子的 S、P、D 项的量子修正值 $\Delta s = 1.35, \Delta p = 0.86, \Delta d = 0.01$ 。把谱项表

达成 $\frac{R(Z-\sigma)^2}{n^2}$ 形式，其中 Z 是核电荷数。试计算 3S、3P、3D 项的 σ 分别为何值？并说明 σ 的物理意义。

解：Na 原子的光谱项可以表示为 R/n^{*2} 。

因此 $n^* = n - \Delta = \frac{n}{Z - \sigma}$ 。

由此得： $\sigma = Z - n/(n - \Delta)$

$$\sigma_s = 11 - \frac{3}{3 - 1.35} = 9.18$$

故：
$$\sigma_p = 11 - \frac{3}{3 - 0.86} = 9.6$$

$$\sigma_d = 11 - \frac{3}{3 - 0.01} \approx 10$$

σ 的物理意义是：轨道贯穿和原子实极化等效应对价电子的影响，归结为内层电子对价电子的屏蔽作用。

7.4 原子中能够有下列量子数相同的最大电子数是多少？

(1) n, l, m ; (2) n, l ; (3) n 。

答：(1) n, l, m 相同时， m_s 还可以取两个值： $m_s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}$ ；所以此时最大电子数为 2 个。

(2) n, l 相同时, m_l 还可以取两 $2l+1$ 个值, 而每一个 m_s 还可取两个值, 所以 n, l 相同的最大电子数为 $2(2l+1)$ 个。

(3) n 相同时, 在 (2) 基础上, l 还可取 n 个值。因此 n 相同的最大电子数是:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

7.5 从实验得到的等电子体系 K I、Ca II 等的莫塞莱图解, 怎样知道从钾 $Z=19$ 开始不填 $3d$ 而填 $4s$ 次壳层, 又从钪 $Z=21$ 开始填 $3d$ 而不填 $4s$ 次壳层?

解: 由图 7—1 所示的莫塞莱图可见, 3^2D 和 4^2S 相交于 $Z=20$ 与 21 之间。当 $Z=19$ 和 20 时, 4^2S 的谱项值大于 3^2D 的值, 由于能量同谱项值有 $E = -hcT$ 的关系, 可见从钾 $Z=19$ 起到钙 $Z=20$ 的 4^2S 能级低于 3^2D 能级, 所以钾和钙从第 19 个电子开始不是填 $3d$ 而填 $4s$ 次壳层。从钪 $Z=21$ 开始, 4^2S 谱项低于 3^2D 谱项, 也就是 3^2D 能级低于 4^2S 能级, 所以, 从钪 $Z=21$ 开始填 $3d$ 而不填 $4s$ 次壳层。

7.6 若已知原子 Ar, Ne, Mg, P 和 Ar 的电子壳层结构与“理想”的周期表相符, 试写出这些原子组态的符号。

解: Ne 原子有 10 个电子, 其电子组态为: $1s^2 2s^2 2p^6$; Mg 原子有 12 个电子, 其电子组态为: Ne 的壳层 + $3s^2$; P 原子有 15 个电子, 其电子组态为: Ne 的壳层 + $3s^2 3p^3$;

Ar 原子有 18 个电子, 其电子组态为: Ne 的壳层 + $3s^2 3p^6$ 。

第八章 X 射线

8.1 某 X 光机的高压为 10 万伏, 问发射光子的最大能量多大? 算出发射 X 光的最短波长。

解: 电子的全部能量转换为光子的能量时, X 光子的波长最短。而光子的最大能量是:

$$\varepsilon_{\max} = Ve = 10^5 \text{ 电子伏特}$$

$$\text{而 } \varepsilon_{\max} = h \frac{c}{\lambda_{\min}}$$

$$\text{所以 } \lambda_{\min} = h \frac{c}{\varepsilon_{\max}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{10^5 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 0.124 \text{ \AA}$$

8.2 利用普通光学反射光栅可以测定 X 光波长。当掠射角为 θ 而出现 n 级极大值出射光线偏离入射光线为 $2\theta + \alpha$ ， α 是偏离 θ 级极大出射线的角度。试证：出现 n 级极大的条件是

$$2d \sin \frac{2\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = n\lambda$$

d 为光栅常数（即两刻纹中心之间的距离）。当 θ 和 α 都很小时公式简化为

$$d(\theta\alpha + \frac{\alpha^2}{2}) = n\lambda。$$

解：相干光出现极大的条件是两光束光的光程差等于 $n\lambda$ 。而光程差为：

$$\Delta L = d \cos \theta - d \cos(\theta + \alpha) = 2d \sin \frac{2\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

根据出现极大值的条件 $\Delta L = n\lambda$ ，应有

$$2d \sin \frac{2\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = n\lambda$$

当 θ 和 α 都很小时，有 $\sin \frac{2\theta + \alpha}{2} \approx \frac{2\theta + \alpha}{2} = \theta + \frac{\alpha}{2}$ ； $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$

由此，上式化为： $d(\theta + \frac{\alpha}{2})\alpha = n\lambda$ ；

$$\text{即 } d(\theta\alpha + \frac{\alpha^2}{2}) = n\lambda$$

8.3 一束 X 光射向每毫米刻有 100 条纹的反射光栅，其掠射角为 $20'$ 。已知第一级极大出现在离 0 级极大出现射线的夹角也是 $20'$ 。算出入射 X 光的波长。

解：根据上题导出公式：

$$2d \sin \frac{2\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = n\lambda$$

由于 $\theta = 20'$ ， $\alpha = 20'$ ，二者皆很小，故可用简化公式：

$$d(\theta\alpha + \frac{\alpha^2}{2}) = n\lambda$$

由此，得： $\lambda = \frac{d\alpha}{n}(\theta + \frac{\alpha}{2}) = 5.05 \text{ \AA}$

8.4 已知 Cu 的 K_{α} 线波长是 1.542 \AA ，以此 X 射线与 NaCl 晶体自然而成 $15^{\circ}50'$ 角入射而得到第一级极大。试求 NaCl 晶体常数 d 。

解：已知入射光的波长 $\lambda = 1.542 \text{ \AA}$ ，当掠射角 $\theta = 15^{\circ}50'$ 时，出现一级极大（ $n=1$ ）。

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = 2.825 \text{ \AA}$$

8.5 铝（Al）被高速电子束轰击而产生的连续 X 光谱的短波限为 5 \AA 。问这时是否也能

观察到其标志谱 K 系线?

解: 短波 X 光子能量等于入射电子的全部动能。因此

$$\varepsilon_{\text{电}} = h \frac{c}{\lambda} \approx 2.48 \times 10^3 \text{ 电子伏特}$$

要使铝产生标志谱 K 系, 则必须使铝的 1S 电子吸收足够的能量被电离而产生空位, 因此轰击电子的能量必须大于或等于 K 吸收限能量。吸收限能量可近似的表示为:

$$E_K = \frac{Rhc}{n^2} (Z - \sigma)^2$$

这里, $n=1, \sigma=0, Z=13$; 所以有:

$$\begin{aligned} E_K &= 13^2 Rhc \approx 13^2 R_{\infty} hc \\ &= 169 \times 1.097 \times 10^7 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \\ &= 2.30 \times 10^3 \text{ 电子伏特} \end{aligned}$$

故能观察到。

8.6 已知 Al 和 Cu 对于 $\lambda = 0.7 \text{ \AA}$ 的 X 光的质量吸收系数分别是

$0.5 \text{ 米}^2 / \text{公斤}$ 和 $5.0 \text{ 米}^2 / \text{公斤}$, Al 和 Cu 的密度分别是 $2.7 \times 10^3 \text{ 公斤} / \text{米}^3$ 和

$8.93 \times 10^3 \text{ 公斤} / \text{米}^3$ 。现若分别单独用 Al 板或 Cu 板作挡板, 要 $\lambda = 0.7 \text{ \AA}$ 的 X 光的强度减至原来强度的 1/100。问要选用的 Al 板或 Cu 板应多厚?

$$\text{解: } \lambda = 0.7 \text{ \AA}, \left(\frac{\tau}{\rho}\right)_{\text{Al}} = 0.5 \text{ 米}^2 / \text{公斤}; \left(\frac{\tau}{\rho}\right)_{\text{Cu}} = 5.0 \text{ 米}^2 / \text{公斤}$$

$$\rho_{\text{Al}} = 2.7 \times 10^3 \text{ 公斤} / \text{米}^3, \rho_{\text{Cu}} = 8.93 \times 10^3 \text{ 公斤} / \text{米}^3$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{100}$$

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

因为 X 光子能量较低, 通过物质时, 主要是电离吸收, 故可只考虑吸收而略掉散射。

$$\therefore \mu = \tau$$

$$I = I_0 e^{-\tau x}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{100} = e^{-\tau x}$$

$$\text{所以有: } x = \frac{1}{\tau} \ln 100$$

$$\text{对于 Al: } \frac{\tau}{\rho} = 0.5 \text{ 米}^2 / \text{公斤}$$

$$\therefore \tau = 0.5 \text{米}^2 / \text{公斤} \times 2.7 \times 10^3 \text{公斤} / \text{米}^3 = 1.35 \times 10^3 \text{米}^{-1}$$

$$x_{Al} = \frac{1}{\tau} \ln 100 = 3.41 \times 10^{-3} \text{米}$$

对于 Cu: $\frac{\tau}{\rho} = 5.0 \text{米}^2 / \text{公斤}$

$$\therefore \tau = 5.0 \text{米}^2 / \text{公斤} \times 8.93 \times 10^3 \text{公斤} / \text{米}^3 = 4.465 \times 10^4 \text{米}^{-1}$$

$$x_{Cu} = \frac{1}{\tau} \ln 100 = 1.03 \times 10^{-4} \text{米}$$

8.7 为什么在 X 光吸收光谱中 K 系带的边缘是简单的, L 系带是三重的, M 系带是五重的?

答: X 射线通过物质时, 原子内壳层电子吸收 X 射线能量而被电离, 从而产生吸收谱中带有锐利边缘的多个线系。吸收谱的 K、L、M、……系是高能 X 光子分别将 $n=1, 2, 3, \dots$ 壳层的电子电离而产生的。每一谱线的锐边相当于一极限频率, 在这频率下, X 光子恰好把电子从相应壳层电离而不使其具有动能。对应于 X 射线能级的谱项公式是:

$$T = \frac{R(Z-\sigma)^2}{n^2} + \frac{R\alpha^2(Z-S)^4}{n^4} \left(\frac{n}{K} - \frac{3}{4} \right) + \dots$$

式中 σ 对不同的 n 和不同的 l 都不同, $K=J+1/2$ 。由于 J 不同也有不同的谱项数。对于 K 壳层, $n=1, l=0, J=\frac{1}{2}, \sigma$ 只有一个值, 只有一个光谱项, 所以 K 系带的边缘是简单的。对于

L 壳层 $n=2$ 可以有三组量子数 $(l=0, J=\frac{1}{2}), (l=1, J=\frac{1}{2}), (l=1, J=\frac{3}{2})$ 。此三组量子数分别对应三种谱项值, 所以, L 系有三个吸收限, 即是三重的。M 壳层, $n=3$, 可以有五组量子数: $(l=0, J=\frac{1}{2}), (l=1, J=\frac{1}{2}), (l=1, J=\frac{3}{2}), (l=2, J=\frac{3}{2}), (l=2, J=\frac{5}{2})$ 。此五组量子数分别对应五个光谱项值, 所以 M 系带有五个吸收限, 即是五重的。同理可知: N 系是七重的。O 系是九重的。

8.8 试证明 X 光标识谱和碱金属原子光谱有相仿的结构。

证明: 我们以 X 光谱 L 系与碱金属光谱进行比较。L 系是由外层电子向 L 壳层 ($n=2$) 上的空位跃迁时发射的。它可分成三个小系。 L_I 系是电子由诸 $n > 2$ 的 p 能级向 $2s$ 能级跃迁产生的。 s 能级是单层的, p 能级是双层的且间隔随 n 的增大而逐渐减小。所以 L_I 系由双线构成且随波数增加而双线间隔缩小。对应的碱金属主线系也是诸 p 能级向较低的 s 能级跃迁产生的, 而 p 、 s 能级结构与 X 能级相仿。所以其光谱具有相仿的结构。 L_{II} 系是由诸的 $n > 3$ 能级跃迁到 $2P$ 能级上产生的, 而 s 是单层的, p 是双层的。所以 L_{II} 系谱必是由一组等间距的双线构成。 L_{II} 系对应于碱金属第二辅线系的跃迁。它们有相仿的结构。同理, L_{III} 系与碱金属第一辅线系有相仿结构。其他 X 光谱系也具有同金属相仿的结构。

X 光谱之所以与碱金属原子光谱具有相仿的结构，在于满壳层缺少一个电子形成的原子态同具有一个价电子的原子态相同。X 能级是有满壳层缺少一个电子构成的；碱金属能级是一个价电子形成的。根据第七章习题 8 的证明，它们应有相同的谱项，因而具有相仿的结构。在跃迁是，它们服从同样的选择定则，因此它们应有相仿的光谱线系。

第九章 分子结构和光谱

9.1 HBr 分子的远红外吸收光谱是一些 $\Delta\tilde{\nu} = 16.94 \text{ cm}^{-1}$ 等间隔的光谱线。试求 HBr 分子的转动惯量及原子核间的距离。已知 H 和 Br 的原子量分别为 1.008 和 79.92。

解：远红外光谱是由分子的转动能级跃迁产生的，谱线间隔都等于 $2B$ 。即 $\Delta\tilde{\nu} = 2B \dots\dots$
(1)

而 $B = h/8\pi^2 Ic \dots\dots$ (2)

由 (1)、(2) 两式可得：

$$I = \frac{h}{8\pi^2 BC} = \frac{2h}{8\pi^2 \Delta \tilde{\nu} c} = 3.302 \times 10^{-47} \text{ 千克} \cdot \text{米}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \left(I \cdot \frac{m_H + m_{Br}}{m_H m_{Br}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.42 \times 10^{-10} \text{ 米}$$

9.2 HCl 分子有一个近红外光谱带，其相邻的几条谱线的波数是：
2925.78, 2906.25, 2865.09, 2843.56, 2821.49 厘米⁻¹。H 和 Cl 的原子量分别是 1.008 和 35.46。试求这个谱带的基线波数 $\tilde{\nu}_0$ 和这种分子的转动惯量。

解：由谱线的波数之差可见：除 2906.25 - 2865.09 之外，其他相邻谱线之差近乎相等。而 2906.25 和 2865.09 之差相当于其他相邻谱线之差的二倍。显然这是一个振动转动谱带。上述两谱线之间有一空位，此空位即是只有振动跃迁是的基线波数 $\tilde{\nu}_0$ 。给出五条谱线中，显然，头两条属于 R 分支，其波数按大小顺序分别记为 $\tilde{\nu}_{R2}, \tilde{\nu}_{R1}$ ；后三条属于 P 分支，其波数按大小顺序分别写作 $\tilde{\nu}_{P1}, \tilde{\nu}_{P2}, \tilde{\nu}_{P3}$ 。

R 分支的谱线波数近似地由下述公式决定：

$$\tilde{\nu}_R = \tilde{\nu}_0 + 2B\mathcal{J}, \mathcal{J} = 1, 2, \dots$$

P 分支的谱线波数近似地由下述公式决定：

$$\tilde{\nu}_P = \tilde{\nu}_0 - 2B\mathcal{J}, \mathcal{J} = 1, 2, \dots$$

因此有：

$$(I) \begin{cases} \tilde{\nu}_{R1} = \tilde{\nu}_0 + 2B \dots (1) \\ \tilde{\nu}_{P1} = \tilde{\nu}_0 - 2B \dots (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \text{ 式, 得: } B = \frac{\tilde{\nu}_{R1} - \tilde{\nu}_{P1}}{4} = 10.29$$

$$(II) \begin{cases} \tilde{\nu}_{R2} = \tilde{\nu}_0 + 4B \dots (3) \\ \tilde{\nu}_{P2} = \tilde{\nu}_0 - 4B \dots (4) \end{cases}$$

(3)-(4) 式, 得:

$$B = \frac{\tilde{\nu}_{R2} - \tilde{\nu}_{P2}}{8} = 10.28, \therefore \bar{B} = \frac{10.29 + 10.28}{2} = 10.285$$

$$\text{转动惯量为: } I = \frac{h}{8\pi^2 Bc} \approx 2.72 \times 10^{-47} \text{ 千克} \cdot \text{米}^2$$

由 (I)、(II)，得基线波数为：

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{4}(\tilde{\nu}_{R2} + \tilde{\nu}_{R1} + \tilde{\nu}_{P1} + \tilde{\nu}_{P2}) = 2885.17 \text{ 厘米}^{-1} = 288517 \text{ 米}^{-1}$$

9.3 Cl 原子的两同位素 Cl^{35} 和 Cl^{37} 分别与 H 化合成两种分子 HCl^{35} 和 HCl^{37} 。试求这两种分子的振动光谱中相应光谱带基线的频率 ν_0 之比。

解:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= \Delta u \omega_1; \tilde{\nu}_2 = \Delta u \omega_2 \\ \frac{\nu_{01}}{\nu_{02}} &= \frac{C\tilde{\nu}_1}{C\tilde{\nu}_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_1}}}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_2}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{m_H \cdot m_{Cl^{37}}}{m_H + m_{Cl^{37}}}}{\frac{m_H \cdot m_{Cl^{35}}}{m_H + m_{Cl^{35}}}}} = 1.002\end{aligned}$$

9.4 试证明双原子分子相邻振动能量之间跃迁时发射光的频率与两核间固有振动频率一致。假设两原子间相互作用力为弹性力。

证明: 在同一电子态中, 有振动能级的跃迁时发光频率 ν 由下式决定: $h\nu = E_2 - E_1$

波数为:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \frac{1}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{hc} \\ &= \frac{1}{hc} \left\{ \left[\left(u' + \frac{1}{2} \right) a - \left(u' + \frac{1}{2} \right) b \right] - \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) a - \left(u + \frac{1}{2} \right) b \right] \right\} \\ &= (u' - u)\omega - (u' - u)(u' + u + 1)x\omega\end{aligned}$$

式中 $x = b/a$, $\omega = a/hc = f/c$, f 是固有振动频率。

若原子间为弹性作用, 第二项或能级修正项 $(u + \frac{1}{2})^2 b$ 应略去。因此

$\tilde{\nu} = (u' - u)\omega = \Delta u\omega$, $\Delta u = 1, 2, 3, \dots$, 也就是 $\tilde{\nu} = \omega, 2\omega, 3\omega, \dots$; 对于相应能级,

$$\Delta u = 1, \therefore \tilde{\nu} = \omega$$

而 $\omega = f/c$; 所以两相邻能级间跃迁时发射光的频率为: $\nu = C\tilde{\nu} = f$

9.5 怎样解释分子的组合散射有下列两个特点:

- (1) 波长短的伴线比波长长的伴线的强度弱;
- (2) 随散射体温度的升高, 波长短的伴线强度明显增强而波长长的伴线的强度几乎不变。

解: (1) 根据统计分布律, 处在较高能级的分子数少于处在较低能级的分子数。因此, 分子在纯转动能级间的受激辐射比受激吸收要弱得多。辐射的能量归并于原光子, 吸收的能量取自原光子。因而波长短的伴线比波长长的伴线的强度弱的多。

(2) 按玻尔兹曼分布律, $N_i = N_0 \frac{g_i}{g_0} e^{-(E_i - E_0)/KT}$, N_i 是处在高能级 E_i 上的分子数, N_0 是处在低能级 E_0 上的分子数。 g_i, g_0 是对应的权重。可见当 T 增高时, 位于较高能级上的分子数 N_i 就会明显增多。因而, 随温度升高, 波长短的伴线的强度明显增强。而在一般温度范围内, 处于低能级 (通常是基态) 上的分子数变化不十分显著, 因而波长长的伴线的强度几乎不变。

9.6 光在 HF 分子上组合散射使某谱线产生波长 2670 \AA 和 3430 \AA 为两条伴线。试由此计算该分子的振动频率和两原子间已知的原子量分别为 1.008 和 19.00。

解: 设两条伴线的频率分别为 ν' 和 ν'' , 则 $\nu' = \nu_0 + \nu_1$; $\nu'' = \nu_0 - \nu_1$;

式中 ν_0 是入射频率; ν_1 是振动谱带频率。由上两式可得:

$$\begin{aligned} \nu' - \nu_1 &= \nu'' + \nu_1 \\ \nu' &= \frac{1}{2}(\nu' + \nu'') = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} \right) = 1.24 \times 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}},$$

$$\begin{aligned} \therefore K &= (2\pi\nu_1)^2 m = (2\pi\nu_1)^2 \frac{m_H m_F}{m_H + m_F} \\ &= (2\pi\nu_1)^2 \frac{A_H A_F}{N_0 (A_H + A_F)} = 9.65 \times 10^2 \text{ 牛顿/米} \end{aligned}$$

第十章 原子核

10.1 ${}^1_1\text{H}$ 和 ${}^1_0\text{n}$ 的质量分别是 1.0078252 和 1.0086654 质量单位, 算出 ${}^{12}_6\text{C}$ 中每个核子的平均结合能 (1 原子量单位 = $931.5 \text{ MeV}/c^2$)。

解: 原子核的结合能为: $E = (Zm_H + Nm - m_A) \times 931.5 \text{ MeV}$

核子的平均结合能为: $\bar{E}_0 = \frac{E}{A}$

$$\therefore \bar{E} = \frac{1}{A}(ZE_H + Nm_n - m_A) \times 931.5 \text{ MeV} = 7.680 \text{ MeV}$$

10.2 从下列各粒子的质量数据中选用需要的数值, 算出 ${}^{30}_{14}\text{Si}$ 中每个核子的平均结合能:

$$e \rightarrow 0.000548, {}^2_1\text{H} \rightarrow 2.014102, {}^1_0\text{n} \rightarrow 1.008665$$

$${}^{30}_{14}\text{Si} \rightarrow 29.973786, {}^1_1\text{H} \rightarrow 1.007825$$

$$\text{解: } \bar{E}_0 = \frac{E}{A} = \frac{1}{A}(Zm_{{}^1_1\text{H}} + Nm_{{}^1_0\text{n}} - m_{{}^{30}_{14}\text{Si}}) \times 931.5 \text{ MeV} = 8.520 \text{ MeV}$$

10.3 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 放射 α 射线成为 ${}^{228}_{88}\text{Ra}$. 从含有 1 克 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 的一片薄膜测得每秒放射 4100 粒

α 粒子, 试计算出 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 的半衰期为 1.4×10^{10} 年.

$$\text{解: 根据放射性衰变规律: } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

如果在短时间 dt 内有 dN 个核衰变, 则衰变率 dN/dt 必定与当时存在的总原子核数目 N 成正比, 即:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{此式可写成: } \lambda e^{-\lambda t} = \frac{-\frac{dN}{dt}}{N_0} \dots\dots (1)$$

其中

$$\lambda e^{-\lambda t} = \frac{-\frac{dN}{dt}}{N_0} - \frac{dN}{dt} = 4100, t = 1 \text{ 秒}; N_0 = \frac{N'}{A} \times 1 \text{ 克},$$

$$N' = 6.02 \times 10^{23}, A = 232 \text{ 克}, \text{ 故}$$

$$N_0 = \frac{6.02 \times 10^{23}}{232} \times 1 = 26 \times 10^{20}$$

将各已知量代入 (1) 式, 得:

$$\lambda e^{-\lambda} = \frac{4100}{26 \times 10^{20}} = \frac{41}{26 \times 10^{18}} \dots\dots (2)$$

因为 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 的半衰期为 1.4×10^{10} 年, 所以可视 λ 为很小, 因此可以将 $e^{+\lambda}$ 展成级数, 取

前两项即有: $e^{+\lambda} \approx 1 + \lambda$

$$\text{这样 (2) 式变为: } \frac{\lambda}{\lambda + 1} = \frac{41}{26 \times 10^{18}}$$

由此得:

$$\lambda = 1.58 \times 10^{-18} / \text{秒}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0.438 \times 10^{18} \text{秒} = 1.4 \times 10^{10} \text{年}$$

所以, ${}_{90}^{232}\text{Th}$ 的半衰期为 1.4×10^{10} 年.

10.4 在考古工作中, 可以从古生物遗骸中 ${}^{14}\text{C}$ 的含量推算古生物到现在的时间 t . 设 ρ 是古生物遗骸中 ${}^{14}\text{C}$ 和 ${}^{12}\text{C}$ 存量之比, ρ_0 是空气中 ${}^{14}\text{C}$ 和 ${}^{12}\text{C}$ 存量之比, 是推导出下列公

式: $t = T \frac{\ln(\rho_0 / \rho)}{\ln 2}$ 式中 T 为 ${}^{14}\text{C}$ 的半衰期.

推证: 设古生物中 ${}^{12}\text{C}$ 的含量为 $N({}^{12}\text{C})$; 刚死时的古生物中 ${}^{14}\text{C}$ 的含量为 $N_0({}^{14}\text{C})$; 现在古生物遗骸中 ${}^{14}\text{C}$ 的含量为 $N({}^{14}\text{C})$; 根据衰变规律, 有: $N({}^{14}\text{C}) = N_0({}^{14}\text{C})e^{-\lambda t}$

$$\text{由题意知: } \rho = \frac{N({}^{14}\text{C})}{N({}^{12}\text{C})};$$

古生物刚死时 ${}^{14}\text{C}$ 的含量与 ${}^{12}\text{C}$ 的含量之比与空气二者之比相等, $\rho_0 = \frac{N_0({}^{14}\text{C})}{N({}^{12}\text{C})}$ 所

$$\text{以: } \frac{\rho_0}{\rho} = e^{\lambda t}$$

因此得:

$$\begin{aligned} \lambda t &= \ln \frac{\rho_0}{\rho} \\ \therefore t &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\rho_0}{\rho} = T \frac{\ln(\rho_0 / \rho)}{\ln 2} \end{aligned}$$

10.5 核力在原子核大小的距离内有很强的吸引力, 它克服了质子间的 (元素氢除外, 那里只有一粒质子) 库仑排斥力的作用而使原子核结合着, 足见在原子核中核力的作用超过质子间的库仑排斥力作用; 从质子间排斥力的大小可以忽略地了解到核力大小的低限。试计

算原子核中两粒质子间的库仑排斥力的大小 (用公斤表示)。(质子间的距离用 10^{-15} 米)

解: 库仑力是长程力, 核力的一个质子与其它所有的质子都要发生作用, 所以在 Z 个质子间的库仑排斥势能将正比于 $Z(Z-1)$, 当 $Z \gg 1$ 时, 则正比于 Z^2 。根据静电学的计算可知,

每一对质子的静电斥力能是 $E = \frac{6e^2}{5R}$, R 是核半径。若二质子间的距离为 R , 它们之间的库

仑力为 f ，则有 $fR = E$ ，由此得：

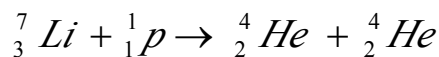
$$f = \frac{E}{R} = \frac{6}{5} \frac{e^2}{R^2}$$

采用 SI 制, 则: $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6}{5} \frac{e^2}{R^2} = 276.48 \text{ 牛顿} = 28.18 \text{ 公斤}.$

所以: 原子核中二质子之间的库仑力为 28.18 公斤.

10.6 算出 ${}^7_3\text{Li}(p, \alpha){}_2^4\text{He}$ 的反应能. 有关同位素的质量如下: ${}_1^1\text{H}, 1.007825; {}_2^4\text{He}, 4.002603; {}^7_3\text{Li}, 7.015999.$

解: 核反应方程式如下:



$$\begin{aligned} Q &= [(m_0 + m_1) - (m_2 + m_3)]c^2 \\ &= [(7.015999 + 1.007825) - (2 \times 4.002603)] \times 931.5 \text{ MeV} \\ &= 17.35 \text{ MeV} \end{aligned}$$

反应能是 17.35 MeV , 大于零, 是放能反应.

10.7 在第六题的核反应中, 如果以 1 MeV 的质子打击 Li , 问在垂直于质子束的方向观测到的 ${}_2^4\text{He}$ 能量有多大?

解: 根据在核反应中的总质量和联系的总能量守恒, 动量守恒, 可知, 反应所产生的两个相同的 ${}_2^4\text{He}$ 核应沿入射质子的方向对称飞开。如图所示。

根据动量守恒定律有: $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

矢量 $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ 合成的三角形为一个等腰三角形, 二底角皆为 θ 。

又因为 $m_2 = m_3$, 因而有 $E_2 = E_3$

已知反应能 $Q = 17.35 \text{ MeV}$, 由能量守恒定律得: $Q = E_2 + E_3 - E_1$ 其中 $E_1 = 1 \text{ MeV}$

由此可得: $E_2 = E_3 = \frac{1}{2}(Q + E_1) = 9.175 \text{ MeV}$

反应所生成的 α 粒子其能量为 9.175 MeV 。

${}_2^4\text{He}$ 核飞出方向与沿入射质子的方向之间的夹角为 θ :

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos \theta$$

由于 $P^2 = 2ME$

$$\text{所以得: } Q = (1 + \frac{A_2}{A_3})E_2 - (1 - \frac{A_1}{A_3})E_1 - \frac{2\sqrt{A_1 A_2 E_1 E_2}}{A_3} \cos \theta$$

(质量之比改为质量数之比)

$A_1 = 1, A_2 = A_3 = 4$ 代入上式得:

$$Q = 2E_2 - \frac{3}{4}E_1 - \sqrt{E_1 E_2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2E_2 - Q - \frac{3}{4}E_1}{\sqrt{E_1 E_2}} = 0.0825$$

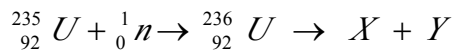
$$\therefore \theta = 85^\circ 16'$$

由此可知, 垂直于质子束的方向上观察到的 ${}^4_2\text{He}$ 的能量近似就是 9.175 MeV。

10.8 试计算 1 克 ${}^{235}_{92}\text{U}$ 裂变时全部释放的能量约为等于多少煤在空气中燃烧所放出的热

能 (煤的燃烧约等于 33×10^6 焦耳/千克; $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13}$ 焦耳)。

解: 裂变过程是被打击的原子核先吸收中子形成复核, 然后裂开。



我们知道, 在 $A=236$ 附近, 每个核子的平均结合能是 7.6 MeV; 在 $A=118$ 附近, 每一个核子的平均结合能量是 8.5 MeV。所以一个裂为两个质量相等的原子核并达到稳定态时, 总共放出的能量大约是:

$$\varepsilon = 2 \times \frac{236}{2} \times 8.5 \text{ MeV} - 236 \times 7.6 \text{ MeV} = 210 \text{ MeV}$$

而 $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13}$ 焦耳, 所以: $\varepsilon = 3.36 \times 10^{-11}$ 焦耳。

1 克 ${}^{235}_{92}\text{U}$ 中有 N 个原子;

$$N = \frac{MN_0}{A} = 2.56 \times 10^{21}$$

$$E = N\varepsilon = 8.6 \times 10^{10} \text{ 焦耳}$$

它相当的煤质量 $M = 2.6 \times 10^3$ 公斤 = 2.6 吨。

10.9 计算按照 (10.8-1) 式中前四式的核聚变过程用去 1 克氘所放出的能量约等于多少煤在空气中燃烧所放出的热能 (煤的燃烧热同上题)。

解: 四个聚变反应式是:

完成此四个核反应共用六个 ${}^2\text{H}$, 放出能量 43.2 MeV, 平均每粒 ${}^2\text{H}$ 放出 7.2 MeV, 单

位质量的 ${}^2\text{H}$ 放出 3.6 MeV。1 克氘包含 N 粒 ${}^2\text{H}$, 则

$$N = \frac{MN_0}{A} = 3.0 \times 10^{23}$$

所以 1 克氦放出的能量约等于:

$$E = N \times 7.2 \text{ MeV} = 2.2 \times 10^{24} \text{ MeV} = 3.5 \times 10^{11} \text{ 焦耳}$$

与它相当的煤: $M = \frac{E}{a} \approx 10.6 \times 10^3 \text{ 公斤} = 10.6 \text{ 吨}$

10.10 包围等离子体的磁通量密度 B 是 2 韦伯/米², 算出被围等离子体的压强。

解: 根据公式: $P_{\text{内}} + \frac{B_{\text{内}}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{\text{外}}^2}{2\mu_0}$ 得:

$$P_{\text{内}} = \frac{B_{\text{内}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{\text{外}}^2}{2\mu_0}, \text{ 式中 } P_{\text{内}} \text{ 是等离子体的压强; } B \text{ 是磁通密度; } \mu_0 \text{ 是真空中磁导率,}$$

等于 $4\pi \times 10^{-7}$ 亨/米, 设 $B_{\text{内}}$ 小到可以忽略, 则得到: $P_{\text{内}} = \frac{B_{\text{外}}^2}{2\mu_0} = 15.92 \times 10^5 \text{ 牛顿/米}^2$

因 1 大气压 = $1.013 \times 10^5 \text{ 牛顿/米}^2$, 故 $P_{\text{内}} = 15.7 \text{ 大气压}$

第十一章 基本粒子

11.1 算出原子核中两个质子间的重力吸引力和静电排斥力。可以看出重力吸引力远不足以抵抗静电排斥力。这说明原子核能够稳固地结合着, 必有更强的吸引力对抗库仑力而有余。

解: 原子核中两个质子间的静电斥力势能近似为 $\frac{e^2}{R}$, R 是原子核半径, e 是电子电荷

绝对值。因此, 两个质子间的排斥力近似地为 $F \approx \frac{e^2}{R^2}$ 。注意到

$$e = 4.80 \times 10^{-10} \text{ CGSE}, R \approx 10^{-13} \text{ cm}, \text{ 则 } F \approx 23.50 \text{ (公斤力)}$$

如果把 R 视作两质子间的距离, 则它们间的重力吸引力 f 可估算如

下: $f \approx r \frac{m_p m_p}{R^2} \approx 2.85 \times 10^{-35} \text{ (公斤力)}$

由上面的结果看出，重力吸引力远不能抵消库仑斥力。原子核能稳固地存在，质子间必有强大的吸引力。这种力就是核力。

11.2 在 π 介子撞击质子的实验中，当 π 介子的实验室能量为 200MeV 时， Δ 共振态的激发最大，求 Δ 的质量。

解： π 介子的动能 $T_\pi = 200\text{MeV}$

$$\pi \text{ 介子的静能 } m_\pi c^2 = 273 \times 0.511\text{MeV} \approx 140\text{MeV}$$

$$\pi \text{ 介子的总能量 } E_\pi = T_\pi + m_\pi c^2 = 340\text{MeV}$$

$$\text{实验室系中 } \pi \text{ 介子的动量是 } P_\pi = \frac{1}{c} \sqrt{E_\pi^2 - (m_\pi c^2)^2} \approx 310\text{MeV}/c$$

$$\text{质子的静能 } m_p c^2 \approx 938\text{MeV}$$

Δ 共振粒子的总能量 E_Δ 等于 π 介子总能量和质子静能之和：

$$E_\Delta = E_\pi + m_p c^2 = 1278\text{MeV}$$

碰撞前质子静止。根据动量守恒定律， Δ 粒子的动量 P_Δ 等于 π 介子的动量 P_π ： $P_\Delta = P_\pi$ 。

根据狭义相对论， Δ 粒子的质量 m_Δ 由下式决定：

$$m_\Delta = \frac{1}{c^2} \sqrt{E_\Delta^2 - (cp_\Delta)^2} = 1240\text{MeV}/c^2$$

与 Δ 粒子的质量相联系的能量是 1240MeV 。

11.3 在下列各式中，按照守恒定律来判断，哪些反应属于强相互作用，哪些是弱相互作用，哪些是不能实现的，并说明理由。

$$(1) p \rightarrow \pi^+ + e^+ + e^-$$

$$(2) \Lambda^0 \rightarrow p + e^-$$

$$(3) \mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \nu_\mu$$

$$(4) n + p \rightarrow \Sigma^+ + \Lambda^0$$

$$(5) p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$(6) p + \bar{p} \rightarrow n + \bar{\Sigma}^0 + K^0$$

$$(7) K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0.$$

解：（1）左侧重子数是+1，右侧重子数是0，衰变前后重子数不相等。三种基本相互作用重子数都要守恒。因此，所列衰变实际上是不存在的。

（2）左侧轻子数是0，右侧轻子数是+1，衰变前后轻子数不相等。这种衰变方式不能实现，因为三种基本相互作用都要求轻子数守恒。

（3）两侧 μ 轻子数都是+1，守恒。但左侧电轻子数是0，右侧电轻子数是+2，电轻子数不守恒。这种衰变实际上也不能出现，因为三种基本相互作用要求两类轻子数分别守恒。

（4）左侧奇异数是0，右侧奇异数是-2。奇异数不守恒，只可能是弱相互作用。这个作

用没有轻子参加。实际存在的这种类型的弱相互作用，要满足 $|\Delta S|=1$ ，而这里的 $|\Delta S|=2$ 。

因此，这种过程实际上是不存在的。

(5) 光子的重子数和奇异数都是0。 p 的重子数是+1， \bar{p} 的重子数是奇异性是-1。 p 和 \bar{p} 的奇异数都是0。 p 和 \bar{p} 的同位旋相同。所列反应重子数和奇异数分别守恒，不可能是弱相互作用。质子 p 和反质子 \bar{p} ，通常在强作用下湮灭后转变成若干个介子。这里所列的反应，可以在电磁相互作用下实现。

(6) 反应前奇异数是0，反应后是+2，奇异数不守恒。奇异粒子只在强相互作用过程中产生，并且要求奇异数守恒。因此，上列反应不可能实现。

$$(7) K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0.$$

$$\text{衰变后静能 } E_{\text{后}} = 548.2 \text{ MeV}$$

$$\text{衰变前静能 } E_{\text{前}} = 497.8 \text{ MeV}$$

因此，从能量守恒考虑，这种衰变方式实际上并不存在。

11.4 对重子 p 、 n 、 Λ^0 、 Σ 、 Σ^0 、 Σ^- 、 Ω^- ，从它的有关量子数来考虑，试认出是那三个层子构成的。

解：重子由三个层子按不同的组合构成，这三个层子是 u 、 d 、 s 。 s 层子是奇异层子。奇异重子中一定要有奇异层子 s ，非奇异重子中不能有 s 存在。三个层子的性质如下表所示。

按照简单的规则把三个层子结合起来就构成重子。例如，质子 p 和介子 Λ^0 ，它们的性质可列成下面的表。质子不是奇异粒子，它一定不包括 s ，除了同位旋1之外，将构成质子的每个层子的各种量子数分别相加，应该等于质子的相应量子数。这样，可以确认质子是由两个 u 层子和一个 d 层子构成的。类似地可以断定 Λ^0 由 u 、 d 、 s 构成。因此，题中给出的重子的层子成分可开列如下：

$$p(uud), n(udd), \Lambda^0(uds), \Sigma^+(uus), \Sigma^0(uds), \Sigma^-(dds), \Omega^-(sss)$$

Λ^0 和 Σ^0 都是由 u 、 d 、 s 构成，但它们是 u 、 d 、 s 的不同组合。

层子是费米子，自旋是 $\frac{1}{2}$ 。实验给出 Ω 的自旋是 $\frac{3}{2}$ ，奇异数是-3。因此， Ω^- 一定是三个 s 层子构成。但是，三个 s 层子的自旋必须平行，这违背泡里原理。为了解决类似的矛盾，提出了层子有“颜色”自由度，每个层子皆有自己的“色荷”。 Ω 中的三个 s 层子，尽管自旋平行，但因它们具有不同的“色荷”，泡里原理是容许的。

把重子中的各个层子换成相应的反层子，则重子就成了相应的反重子。

11.5 认出下列介子的成分：

$$\pi^+, \pi^0, \pi^-, K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0, \eta^0, \eta^+$$

解：介子有一个层子和一个反层子构成。把层子的量子数（同位旋除外）变号就得相应

的反层子的量子数。与上题类似，上述介子的层子成分可开列如下：

$$\pi^+(u\bar{d}), \pi^-(d\bar{u}), K^+(u\bar{s}), K^0(d\bar{s}), K^-(s\bar{u}), \bar{K}^0(s\bar{d})$$

π^0, η^0, η' 的结构较为复杂：

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}),$$

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

而且后两者的成分尚有混合。

11.6 试讨论下列三式：

$$(1) \Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

$$(2) \rightarrow n + \pi^-$$

$$(3) \nu_e + p \rightarrow n + \mu^+$$

讨论：(1) Σ 的质量比 n 与 e^+ 的质量之和大的多。从能量角度考虑衰变似乎可以产生。但是， Σ^+ 的奇异数 $S = -1$ ，右侧奇异数是 0，奇异数的改变 $\Delta S = 1$ 。奇异粒子衰变成强子和轻子，要克服从 $\Delta Q = \Delta S$ ， ΔQ 是奇异粒子和强子间的电荷改变。在这个衰变式中， $\Delta Q = -1 = -\Delta S$ 因此是不能实现的过程。

(2) 奇异粒子只在强作用过程中协同产生，只在弱作用过程中衰变。奇异粒子的产生和衰变服从如下的选择定则：

$$\Delta S = \begin{cases} 0, (\text{对奇异粒子的强产生}) \\ \pm 1, (\text{对奇异粒子不产生 } \mu \text{ 和 } e \text{ 的弱衰变}) \\ \Delta Q = \Delta S, (\text{奇异粒子衰变为强子和轻子}), \end{cases}$$

ΔQ 是过程中奇异粒子与强子间的电荷改变。

本例中，左侧奇异数是 -2，右侧奇异数是 0。奇异数改变 $\Delta S = 2 \neq \pm 1$ 。因此，这个过程实际不能实现。

(3) 电轻子数，左侧是 +1，右侧是 0，不相等。 $\bar{\mu}$ 轻子数，左侧是 0，右侧是 -1，不相等。此反应违背轻子数守恒定律，用任何一种方式的基本相互作用都不能实现。