Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ дано еще в Началах Евклида.

Доказывается от противного: предположим, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, делаем выводы:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \implies p^2 = 2 \cdot q^2$$

Здесь нужна лемма: “Если квадрат числа четный, то число тоже четно”. Из этого делаем вывод, что т.к. квадрат p — четный, то p — тоже четно. Пусть $p = 2 \cdot m$:

$$(2 \cdot m)^2 = 2 \cdot q^2 \implies 4 \cdot m^2 = 2 \cdot q^2 \implies 2 \cdot m^2 = q^2$$

Из леммы “Если квадрат числа четный, то число тоже четно” следует, что q — четное число. Пусть $q = 2 \cdot n$. Тогда мы получаем, что:

$$\frac{p}{q} = \frac{2 \cdot m}{2 \cdot n} = \frac{m}{n}$$

Но по условию $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, а мы доказали, что её можно сократить на 2. Мы пришли к противоречию, следовательно наше предположение не верно, и $\sqrt{2}$ не может быть представлен в виде несократимой дроби вида $\frac{p}{q}$.

Для доказательства в coq нам понадобятся рациональные числа, лемма про четность: если квадрат числа четный, то и число четно. Как-то описать условие несократимости дроби.

При доказательстве от противного мы должны получить False в контексте.