



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

类型检查 II

《编译原理和技术(H)》、《编译原理(H)》

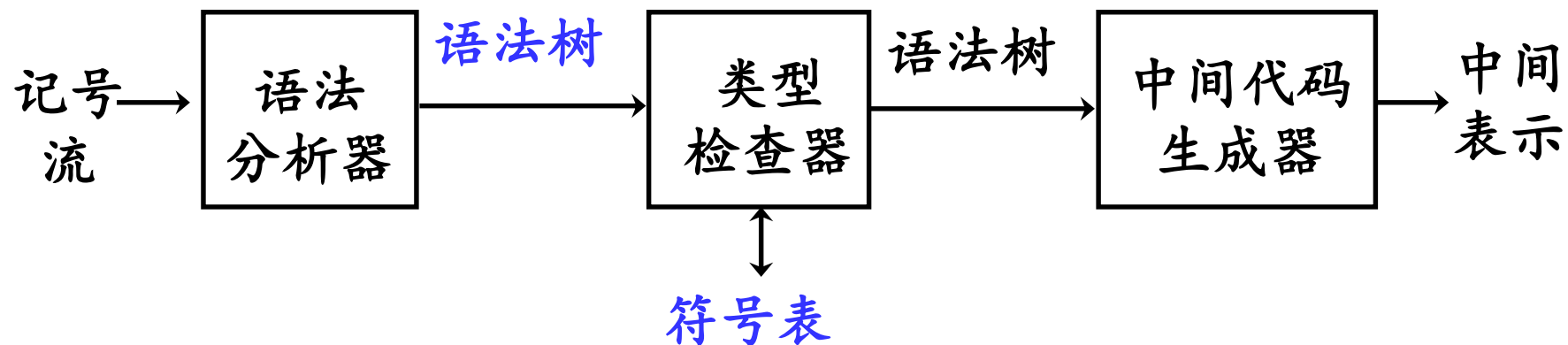
张昱

0551-63603804, yuzhang@ustc.edu.cn

中国科学技术大学
计算机科学与技术学院



本章内容



□ 语义检查中最典型的部分——类型检查

- 类型系统、类型检查、符号表的作用
- 多态函数、重载

□ 其他的静态检查（不详细介绍）

- 控制流检查、唯一性检查、关联名字检查



5.4 类型表达式的等价

- 类型表达式的命名
- 名字等价、结构等价
- 记录类型的定义



类型表达式的等价

□ 对类型表达式命名= \rangle 如何解释类型表达式相同?

- 结构等价、名字等价
- 是类型表达式的一个语法约定，而不是引入新的类型

```
typedef cell *link;
```

```
link next;
```

```
link last;
```

```
cell *p;
```

```
cell *q, *r;
```



结构等价

□ 结构等价

- 无类型名时，两个类型表达式完全相同
- 有类型名时，用类型名所定义的类型表达式代换它们，所得表达式完全相同（类型定义无环时）

```
typedef cell *link;
```

```
link next;
```

```
link last;
```

```
cell *p;
```

```
cell *q, *r;
```

next, last, p, q和r的类型是结构等价的



□ $\text{sequiv}(s, t)$ (无类型名时)

if s 和 t 是相同的基本类型 then

return true

else if $s == \text{array}(s_1, s_2)$ and $t == \text{array}(t_1, t_2)$ then

return $\text{sequiv}(s_1, t_1)$ and $\text{sequiv}(s_2, t_2)$

else if $s == s_1 \times s_2$ and $t == t_1 \times t_2$ then

return $\text{sequiv}(s_1, t_1)$ and $\text{sequiv}(s_2, t_2)$

else if $s == \text{pointer}(s_1)$ and $t == \text{pointer}(t_1)$ then

return $\text{sequiv}(s_1, t_1)$

else if $s == s_1 \rightarrow s_2$ and $t == t_1 \rightarrow t_2$ then

return $\text{sequiv}(s_1, t_1)$ and $\text{sequiv}(s_2, t_2)$

else return false



名字等价

□ 名字等价

- 把每个类型名看成是一个可区别的类型
- 两个类型表达式不做名字代换就结构等价

```
typedef cell *link;
```

```
link next;
```

```
link last;
```

```
cell *p;
```

```
cell *q, *r;
```

next和last的类型是名字等价的

p, q和r的类型是名字等价的



类型表达式的等价

Pascal语言的许多实现用**隐含的类型名**和每个声明的标识符联系起来，例如
下面每个**↑cell**都隐含不同的类型名

type	link = ↑cell;	type	link = ↑cell;
var	next : link;		np = ↑cell;
	last : link;		nqr = ↑cell;
	p : ↑cell;	var	next : link;
	q, r : ↑cell;		last : link;
			p : np;
			q : nqr;
			r : nqr;

p的类型与
q和r的类
型不是名
字等价的



记录类型

□ 记录类型

- 记录类型可看成其各个域类型的积类型
- 记录和积之间的主要区别是记录的域被命名

例如，C语言的记录类型

```
typedef struct {  
    int address;  
    char lexeme [15 ];  
}row;
```

的类型表达式是

record(address : int, lexeme : *array*(15, char))



记录类型

□ 定型规则

(Type Record)
(l_i 是有区别的)

$$\frac{\Gamma \vdash T_1, \dots, \Gamma \vdash T_n}{\Gamma \vdash \text{record}(l_1:T_1, \dots, l_n:T_n)}$$

(Val Record) (l_i 是有区别的)

$$\frac{\Gamma \vdash M_1:T_1, \dots, \Gamma \vdash M_n:T_n}{\Gamma \vdash \text{record}(l_1=M_1, \dots, l_n=M_n) : \text{record}(l_1:T_1, \dots, l_n:T_n)}$$

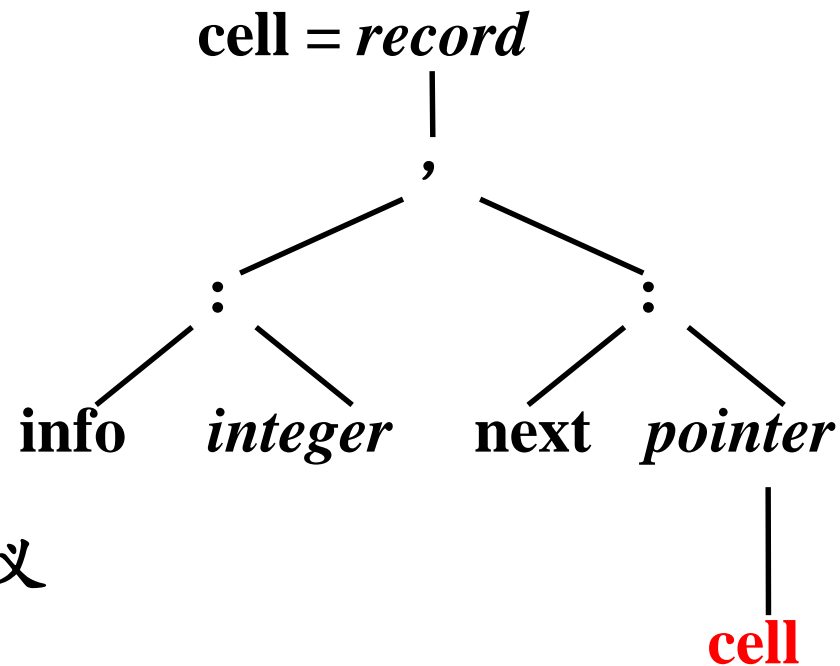
(Val Record Select)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{record}(l_1:T_1, \dots, l_n:T_n)}{\Gamma \vdash M.l_j : T_j \quad (j \in 1..n)}$$



类型表示中的环

```
type link = ↑ cell ;  
cell = record  
    info : integer ;  
    next : link  
end;
```

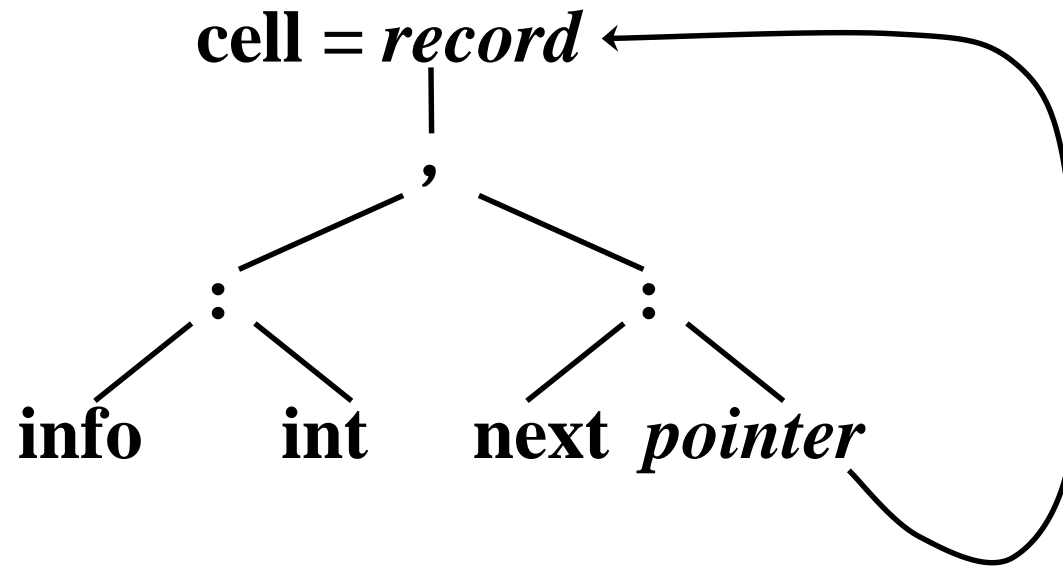


引入环的话，递归定义
的类型名可以替换掉



类型表示中的环

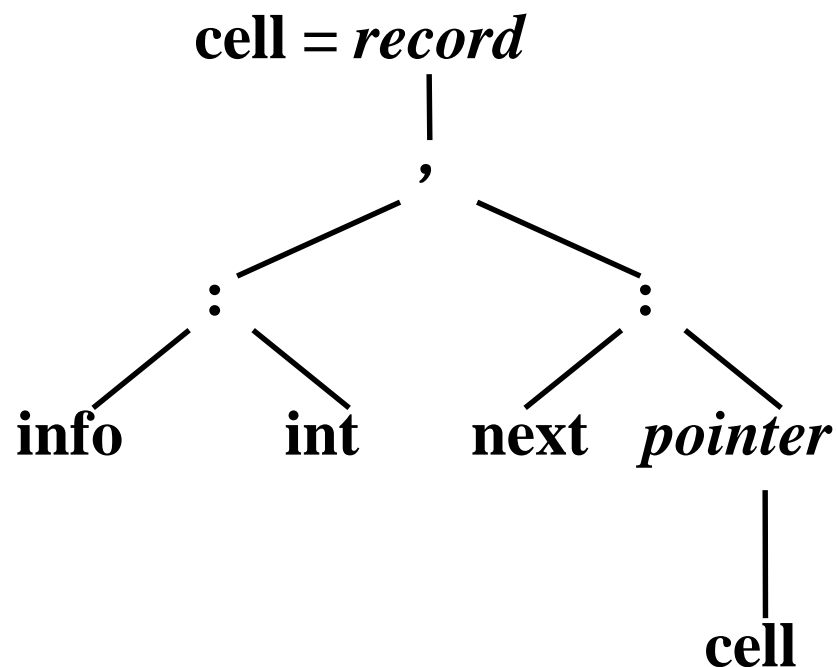
```
typedef struct cell {  
    int info;  
    struct cell *next;  
} cell;
```





类型表示中的环

C语言对除记录（结构体）、共用体以外的所有类型使用结构等价，而对记录类型用的是名字等价，以避免类型图中的环。





例题 4

在 X86/Linux 机器上，编译器报告蓝色行有错误：
incompatible types in return

```
typedef int A1[10];           | A2 *fun1( ) {  
typedef int A2[10];           |     return(&a);  
A1 a;                         | }  
typedef struct {int i;}S1;    | S2 fun2( ) {  
typedef struct {int i;}S2;    |     return(s);  
S1 s;                         | }
```

S1和S2是
不同的类型

在C语言中，数组和结构体都是构造类型，为什么上面
第2个函数有类型错误，而第1个函数却没有？



5.5 多态函数

- ☐ 参数化多态
- ☐ 类型系统的定义
- ☐ 类型检查



多态函数的引出

例 如何编写求表长的通用程序？

```
typedef struct {  
    int info;  
    link next;  
} cell, *link;
```

编译没报错？

那用选项 `-Wall` 再试试
<https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gcc/Warning-Options.html>

unknown type name 'link'

因为link的定义在后



例 如何编写求表长的通用程序？

```
typedef struct cell{  
    int info;  
    struct cell *next;  
} cell, *link;
```

计算过程与表元的数据类型无关，但语言的类型系统使该函数不能通用

```
int length(link lptr) {  
    int len = 0;  
    link p = lptr;  
    while (p != NULL) {  
        len++;  
        p = p->next;  
    }  
    return len;  
}
```



多态函数的引出

例 如何编写求表长的通用程序？

用ML语言很容易写出求表长的程序而不必管表元的类型

```
fun length (lptr) =
```

```
  if null (lptr) then 0
```

```
  else length (tl (lptr)) + 1;
```

tl- 返回表尾 null-测试表是否为空

```
length ( [“sun”, “mon”, “tue”] )
```

```
length ( [10, 9, 8 ] )
```

都等于3



□ 多态函数(polymorphic functions) 参数化多态

- 允许函数参数的类型有多种不同的情况
- 函数体中语句的执行能适应参数为不同类型的情况

□ 多态算符(polymorphic operators) Ad-hoc多态

- 例如：数组索引、函数应用、通过指针间接访问相应操作的代码段接受不同类型的数组、函数等
- C语言手册中关于取地址算符&的论述是：

如果运算对象的类型是‘...’，那么结果类型是指向‘...’的指针”



类型变量及其应用

□ 类型变量

- `length`的类型可以写成 $\forall \alpha. list(\alpha) \rightarrow integer$

- 类型变量的引入便于讨论未知类型

如，在不要求标识符的声明先于使用的语言中，可以通过使用类型变量来确定程序变量的类型

```
function deref (p);
```

```
begin
```

```
    return p↑
```

```
end;
```

-- 对`p`的类型一无所知: β

-- $\beta = pointer(\alpha)$

`deref` 的类型是 $\forall \alpha. pointer(\alpha) \rightarrow \alpha$



多态函数的类型系统

□ 一个含多态函数的语言

$P \rightarrow D; E$

$D \rightarrow D; D / \text{id} : Q$

$Q \rightarrow \forall \text{type-variable}. Q$ 多态函数
 $/ T$

$T \rightarrow T ' \rightarrow ' T$

$/ T \times T$ 笛卡儿积类型

$/ \text{unary-constructor} (T)$

$/ \text{basic-type}$

$/ \text{type-variable}$ 引入类型变量

$/ (T)$

$E \rightarrow E (E) / E, E / \text{id}$

这是一个抽象语言，忽略了函数定义的函数体



多态函数的类型系统

□ 一个含多态函数的语言

$P \rightarrow D; E$

$D \rightarrow D; D / \text{id} : Q$

$Q \rightarrow \forall \text{type-variable. } Q$
 $/ T$

$T \rightarrow T \text{ '}\rightarrow\text{' } T$

$/ T \times T$

$/ \text{unary-constructor } (T)$

$/ \text{basic-type}$

$/ \text{type-variable}$

$/ (T)$

$E \rightarrow E (E) / E, E / \text{id}$

一个程序：

```
deref :  $\forall \alpha. \text{pointer}(\alpha) \rightarrow \alpha$  ;  
 $q : \text{pointer} (\text{pointer} (\text{integer}))$ ;  
deref (deref (q))
```



多态函数的类型系统

□ 类型系统中增加的推理规则

■ 环境规则 类型变量 α 加到定型环境中

(Env Var)

$$\frac{\Gamma \vdash \diamond, \alpha \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma, \alpha \vdash \diamond}$$

■ 语法规则

(Type Var)

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \diamond}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \alpha}$$

(Type Product)

$$\frac{\Gamma \vdash T_1, \Gamma \vdash T_2}{\Gamma \vdash T_1 \times T_2}$$



多态函数的类型系统

□ 类型系统中增加的推理规则

■ 语法规则

(Type Parenthesis)

$$\frac{\Gamma \vdash T}{\Gamma \vdash (T)}$$

(Type Forall)

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash T}{\Gamma \vdash \forall \alpha. T}$$

(Type Fresh) 类型变量换名 (α_i 不在 Γ 中)

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha. T, \quad \Gamma, \alpha_i \vdash \diamond}{\Gamma, \alpha_i \vdash [\alpha_i / \alpha] T}$$



多态函数的类型系统

■ 定型规则

(Exp Pair)

$$\frac{\Gamma \vdash E_1 : T_1, \Gamma \vdash E_2 : T_2}{\Gamma \vdash \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 : T_1 \times T_2}$$

(Exp FunCall)

$$\frac{\Gamma \vdash E_1 : T_1 \rightarrow T_2, \Gamma \vdash E_2 : T_3}{\Gamma \vdash \mathbf{E}_1 (\mathbf{E}_2) : S(T_2)}$$

(其中 S 是 T_1 和 T_3 的**最一般的合一**代换)

代换：类型表达式中的类型变量用其所代表的类型表达式去替换

$\text{subst}(t:\text{type_exp}, Sv:\text{type_var} \rightarrow \text{type_exp}) : \text{type_exp}$

实例：把 subst 函数用于 t 后所得的类型表达式是 t 的一个实例，用 $S(t)$ 表示



代换和实例

```
function subst (t : type_exp, Sv : type_var → type_exp ) :  
                                type_exp;
```

```
begin
```

```
  if t 是基本类型 then return t
```

```
  else if t 是类型变量 then return Sv(t)
```

```
  else if t 是  $t_1 \rightarrow t_2$  then return
```

```
    subst( $t_1$ , Sv) → subst( $t_2$ , Sv)
```

```
end
```

例子 ($s < t$ 表示 s 是 t 的实例, α 、 β 是类型变量)

$pointer(integer) < pointer(\alpha)$ $pointer(real) < pointer(\alpha)$

$integer \rightarrow integer < \alpha \rightarrow \alpha$ $pointer(\alpha) < \beta$

$\alpha < \beta$



不合法的实例

例 下面左边的类型表达式不是右边的实例

integer

real

代换不能用于基本类型

integer \rightarrow *real*

$\alpha \rightarrow \alpha$

α 的代换不一致

integer $\rightarrow \alpha$

$\alpha \rightarrow \alpha$

α 的所有出现都应该代换



□ 合一(unify)

- 如果存在某个代换 S_v 使得 $S(t_1) = S(t_2)$, 那么这两个表达式 t_1 和 t_2 能够合一

□ 最一般的合一代换(the most general unifier) S

- $S(t_1) = S(t_2)$;
- 对任何其它满足 $S'(t_1) = S'(t_2)$ 的代换 $S_{v'}$, 代换 $S'(t_1)$ 是 $S(t_1)$ 的实例

例如, $t_1 = \text{pointer}(\text{list}(\alpha))$ $t_2 = \text{pointer}(\beta)$

代换 $S_v: \alpha \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \text{list}(\alpha)$, 使得 $S(t_1) = S(t_2) = \text{pointer}(\text{list}(\alpha))$

代换 $S_{v'}: \alpha \rightarrow \text{integer}, \beta \rightarrow \text{list}(\text{integer})$, 使得 $S'(t_1) = S'(t_2) = \text{pointer}(\text{list}(\text{integer}))$

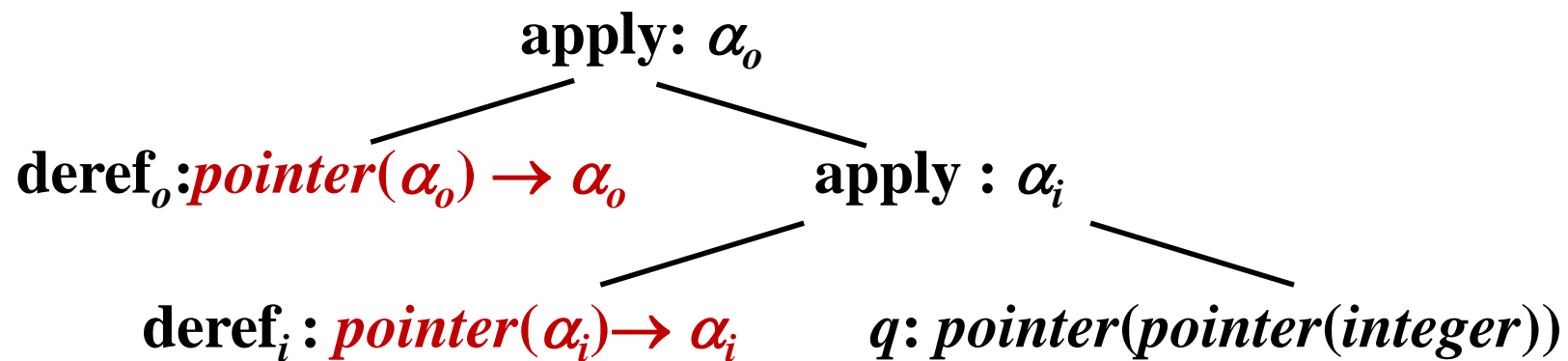
代换 S_v 是最一般的合一代换



多态函数的类型检查

□ 多态函数和普通函数在类型检查上的区别

- (1) 同一多态函数的不同出现不要求变元/参数有相同类型
- (2) 必须把类型相同的概念推广到类型合一
- (3) 要记录类型表达式合一的结果



deref(deref(q))的带标记的语法树



检查多态函数的翻译方案

$E \rightarrow E_1(E_2)$

$\{ p = mkleaf(newtypevar); \text{// 返回类型}$
 $unify(E_1.type, mknode(' \rightarrow ', E_2.type, p));$
 $E.type = p \}$

$E \rightarrow E_1, E_2$

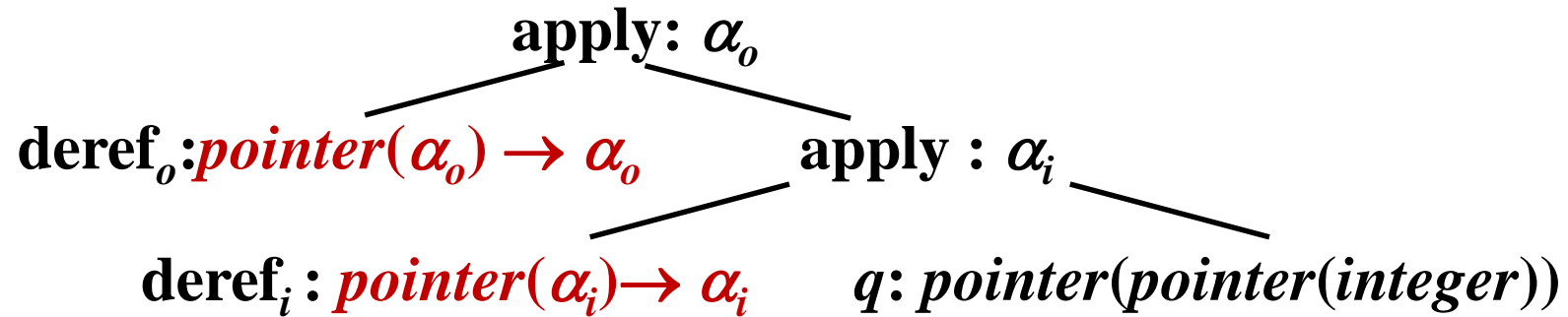
$\{ E.type = mknode(' \times ', E_1.type, E_2.type) \}$

$E \rightarrow id$

$\{ E.type = fresh(lookup(id.entry)) \} \text{// 类型变量}$



例：多态函数的检查



表达式：类型	代换
$q : \text{pointer}(\text{pointer}(\text{integer}))$	
$\text{deref}_i : \text{pointer}(\alpha_i) \rightarrow \alpha_i$	
$\text{deref}_i(q) : \text{pointer}(\text{integer})$	$\alpha_i = \text{pointer}(\text{integer})$
$\text{deref}_o : \text{pointer}(\alpha_o) \rightarrow \alpha_o$	
$\text{deref}_o(\text{deref}_i(q)) : \text{integer}$	$\alpha_o = \text{integer}$



求表长的函数的检查

$\text{length} : \beta; \quad \text{lptr} : \gamma;$
 $\text{if} : \forall \alpha. \text{boolean} \times \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha;$
 $\text{null} : \forall \alpha. \text{list}(\alpha) \rightarrow \text{boolean};$
 $\text{tl} : \forall \alpha. \text{list}(\alpha) \rightarrow \text{list}(\alpha);$
 $0 : \text{integer}; \quad 1 : \text{integer};$
 $+: \text{integer} \times \text{integer} \rightarrow \text{integer};$
 $\text{match} : \forall \alpha. \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha;$
 $\text{match} ($
 $\text{length}(\text{lptr}),$
 $\text{if}(\text{null}(\text{lptr}), 0, \text{length}(\text{tl}(\text{lptr})) + 1)$
 $)$

$\text{fun length}(\text{lptr}) =$
 $\text{if null}(\text{lptr}) \text{ then } 0$
 $\text{else length}(\text{tl}(\text{lptr})) + 1;$

类型声明部分

-- 表达式, 匹配length函数的

-- 函数首部和函数体的类型



求表长的函数的检查

行	定 型 断 言	代 换	规 则
(1)	$\text{lptr} : \gamma$		(Exp Id)
(2)	$\text{length} : \beta$		(Exp Id)
(3)	$\text{length}(\text{lptr}) : \delta$	$\beta = \gamma \rightarrow \delta$	(Exp FunCall)
(4)	$\text{lptr} : \gamma$		从(1)可得
(5)	$\text{null} : \text{list}(\alpha_n) \rightarrow \text{boolean}$		(Exp Id)和 (Type Fresh)
(6)	$\text{null}(\text{lptr}) : \text{boolean}$	$\gamma = \text{list}(\alpha_n)$	(Exp FunCall)
(7)	$0 : \text{integer}$		(Exp Num)
(8)	$\text{lptr} : \text{list}(\alpha_n)$		从(1)可得



求表长的函数的检查

行	定 型 断 言	代 换	规 则
(9)	$tl : list(\alpha_t) \rightarrow list(\alpha_t)$		(Exp Id)和 (Type Fresh)
(10)	$tl(lptr) : list(\alpha_n)$	$\alpha_t = \alpha_n$	(Exp FunCall)
(11)	$length : list(\alpha_n) \rightarrow \delta$		从(2)可得
(12)	$length(tl(lptr)) : \delta$		(Exp FunCall)
(13)	$1 : integer$		(Exp Num)
(14)	$+ : integer \times integer$ $\rightarrow integer$		(Exp Id)



求表长的函数的检查

行	定 型 断 言	代 换	规 则
(15)	$\text{length (tl(lptr))} + 1 : \text{integer}$	$\delta = \text{integer}$	(Exp FunCall)
(16)	$\text{if} : \text{boolean} \times \alpha_i \times \alpha_i \rightarrow \alpha_i$		(Exp Id)和 (Type Fresh)
(17)	$\text{if} (\dots) : \text{integer}$	$\alpha_i = \text{integer}$	(Exp FunCall)
(18)	$\text{match} : \alpha_m \times \alpha_m \rightarrow \alpha_m$		(Exp Id)和 (Type Fresh)
(19)	$\text{match} (\dots) : \text{integer}$	$\alpha_m = \text{integer}$	(Exp FunCall)

length函数的类型是 $\forall \alpha. \text{list}(\alpha) \rightarrow \text{integer}$



5.6 函数和算符重载

- Ad-hoc多态
- 可能的类型集合及其缩小
- 附加：子类型关系引起的协变和逆变



□ 重载符号

- 有多个含义，但在每个引用点的含义都是唯一的

例如：

- 加法算符+可用于不同类型，“+”是多个函数的名字，而不是一个多态函数的名字
- 在Ada中，()是重载的， $A(I)$ 有不同含义

□ 重载的消除

- 在重载符号的引用点，其含义能确定到唯一



表达式的可能类型集合

例 Ada语言

声明:

function “*” ($i, j : \text{integer}$) return complex;

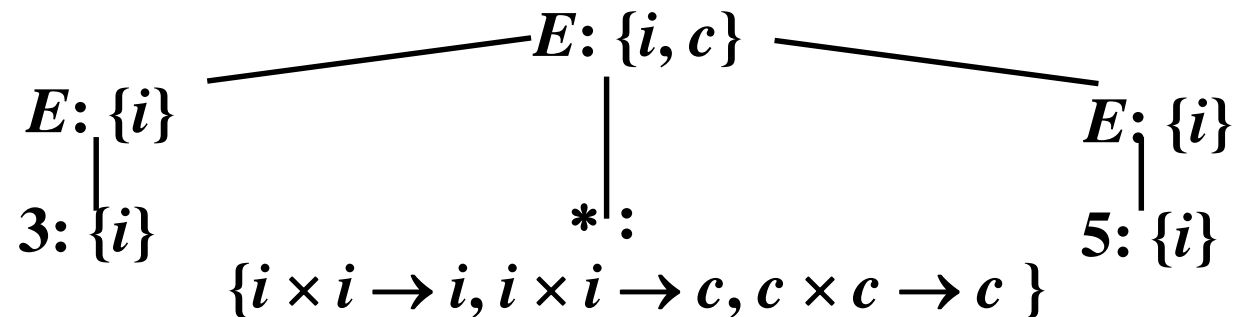
function “*” ($x, y : \text{complex}$) return complex;

使得算符*重载, 可能的类型包括:

$\text{integer} \times \text{integer} \rightarrow \text{integer}$ --这是预定义的类型

$\text{integer} \times \text{integer} \rightarrow \text{complex}$

$\text{complex} \times \text{complex} \rightarrow \text{complex}$ $(3 * 5) * z \ (z:\text{complex})$





□ 缩小可能类型的集合

■ $E' \rightarrow E$

$E.$ unique = if $E.types == \{ t \}$
then t else type_error

■ $E \rightarrow \text{id}$ $E.\text{types} = \text{lookup}(\text{id. entry})$

- $E \rightarrow E_1 (E_2) \quad E. types = \{s' \mid E_2. types \text{中存在一个 } s, \text{ 使得 } s \rightarrow s' \text{ 属于 } E_1. types\}$

t = E. unique

$$S = \{s \mid s \in E_2.\text{types} \text{ and } s \rightarrow t \in E_1.\text{types} \}$$
$$E_2. unique = \text{if } S == \{ s \} \text{ then } s \text{ else } type_error$$
$$E_1. unique = \text{if } S == \{ s \} \text{ then } s \rightarrow t \text{ else } type_error$$



附加：子类型 - 协变和逆变

□ 子类型关系 $<$

- 类型上的偏序关系 τ
- 满足包含原理：如果 s 是 t 的子类型，则需要类型为 t 的值时，都可以将类型为 s 的值提供给它

□ 协变 (covariant) $t < t'$, 则 $c(t) < c(t')$

- 函数类型在值域上是协变的
假设 $e: \sigma \rightarrow \tau$, $e1: \sigma$, 则 $e(e1): \tau$. 如果 $\tau < \tau'$, 则 $e(e1): \tau'$.

□ 逆变 (contravariant) $t < t'$, 则 $c(t') < c(t)$

- 函数类型在定义域上是逆变的
假设 $e: \sigma \rightarrow \tau$, $e1: \sigma'$, 如果 $\sigma' < \sigma$, 则 $e(e1): \tau$.



例题 5

编译器和连接装配器未能发现下面的调用错误

```
long gcd (p, q) long p, q;{ /*这是参数声明的传统形式*/  
/*参数声明的现代形式是long gcd ( long p, long q) { */  
    if (p%q == 0)  
        return q;  
    else  
        return gcd (q, p%q);  
}  
main() {  
    printf(“%ld,%ld\n”, gcd(5), gcd(5,10,20));  
}
```