中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 类型检查 II

《编译原理和技术(H)》、《编译原理(H)》

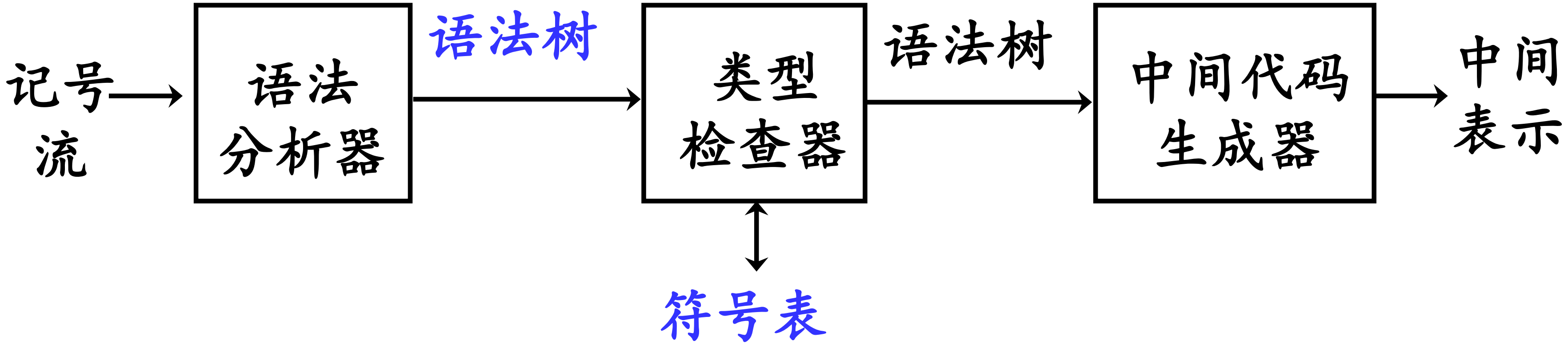
张昱

0551-63603804，yuzhang@ustc.edu.cn

中国科学技术大学

计算机科学与技术学院

# 本章内容




- 语义检查中最典型的部分——类型检查
  - 类型系统、类型检查、符号表的作用
  - 多态函数、重载
- 其他的静态检查（不详细介绍）
  - 控制流检查、唯一性检查、关联名字检查

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 5.4 类型表达式的等价

- □ 类型表达式的命名
- □ 名字等价、结构等价
- □ 记录类型的定义

# 类型表达式的等价

- 对类型表达式命名=〉如何解释类型表达式相同？
  - 结构等价、名字等价
  - 是类型表达式的一个语法约定，而不是引入新的类型

```
typedef cell *link;
link next;
link last;
cell  *p;
cell  *q, *r;
```

# 结构等价



## 结构等价

- 无类型名时，两个类型表达式完全相同
- 有类型名时，用类型名所定义的类型表达式代换它们，所得表达式完全相同（类型定义无环时）

```
typedef cell *link;
link next;
link last;
cell  *p;
cell  *q, *r;
```

**next, last, p, q和r的类型是结构等价的**

# 结构等价测试

- sequiv(*s*, *t*) (无类型名时)

if (*s* 和 *t* 是相同的基本类型)
    return true ;
else if ($s == array(s_1, s_2)$ && $t == array(t_1, t_2)$ )
    return sequiv($s_1$, $t_1$) && sequiv($s_2$, $t_2$) ;
else if ($s == s_1 \times s_2$ && $t == t_1 \times t_2$ )
    return sequiv($s_1$, $t_1$) && sequiv($s_2$, $t_2$) ;
else if ($s == pointer(s_1)$ && $t == pointer(t_1)$ )
    return sequiv($s_1$, $t_1$) ;
else if ($s == s_1 \rightarrow s_2$ && $t == t_1 \rightarrow t_2$ )
    return squiv($s_1$, $t_1$) && sequiv($s_2$, $t_2$) ;
else return false;

红色部分去掉则表示
忽略对数组的界的检查

# 名字等价



## □ 名字等价

- 把每个类型名看成是一个可区别的类型
- 两个类型表达式不做名字代换就结构等价

```
typedef cell *link;
link next;
link last;
cell  *p;
cell  *q, *r;
```

**next和last的类型是名字等价的**

**p, q和r的类型是名字等价的**

# 类型表达式的等价

Pascal语言的许多实现用**隐含的类型名**和每个声明的标识符联系起来，例如下面每个↑cell都隐含不同的类型名

```
type    link = ↑cell;              type    link = ↑cell;
var     next    : link;                    np = ↑cell;
        last    : link;                    nqr = ↑cell;
        p       : ↑cell;           var     next : link;
        q, r    : ↑cell;                   last : link;
                                           p : np;
                                           q : nqr;
                                           r : nqr;
```

p的类型与q和r的类型不是名字等价的

# 记录类型

## 记录类型

- 记录类型可看成其各个域类型的积类型
- 记录和积之间的主要区别是记录的域被命名

例如，C语言的记录类型

```
typedef struct {
        int address;
        char lexeme [15 ];
}row;
```

的类型表达式是

*record*(address : int, lexeme : *array*(15, char) )

# 记录类型

## 定型规则

(Type Record)
($l_i$是有区别的)

$$\frac{\Gamma \mid\!- T_1, \ldots, \Gamma \mid\!- T_n}{\Gamma \mid\!- \mathbf{record}(l_1{:}T_1, \ldots, l_n{:}T_n)}$$

(Val Record) ($l_i$是有区别的)

$$\frac{\Gamma \mid\!- M_1{:}T_1, \ldots, \Gamma \mid\!- M_n{:}\ T_n}{\Gamma \mid\!- \mathrm{record}\ (l_1{=}M_1, \ldots, l_n{=}M_n) : \mathrm{record}\ (l_1{:}T_1, \ldots, l_n{:}T_n)}$$

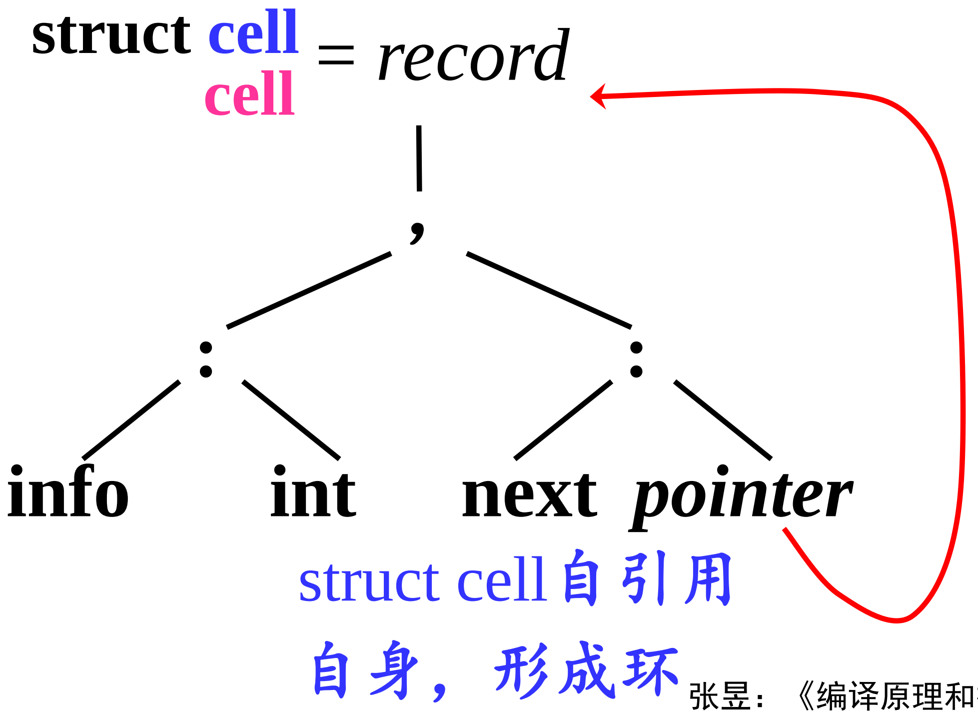
(Val Record Select)

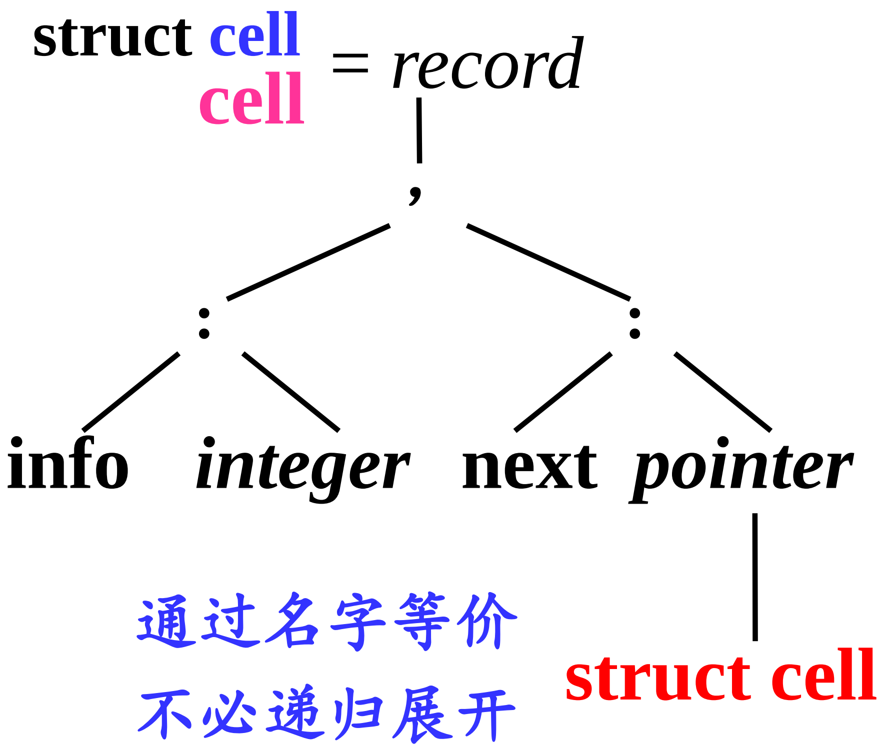
$$\frac{\Gamma \mid\!- M : \mathrm{record}(l_1{:}T_1, \ldots, l_n{:}T_n)}{\Gamma \mid\!- M.l_i : T_i \quad (i \in 1..n)}$$

# 类型表示中的环

```
typedef struct cell {
        int info;
        struct cell *next;
} cell;
```

C语言对除**记录（结构体）**、**共用体**以外的所有类型使用结构等价，而对记录和共用体类型用的是名字等价，以避免类型图中的环。



# 例题 4

在X86/Linux机器上，编译器报告下面代码中蓝色行有错误：

incompatible types in return

```
typedef int A1[10];              | A2 *fun1( ) {
typedef int A2[10];              |     return(&a);
A1 a;                            | }
typedef struct {int i;}S1;       | S2  fun2( ) {
typedef struct {int i;}S2;       |     return(s);
S1 s;                            | }
```

S1和S2是不同的类型

在C语言中，数组和结构体都是构造类型，为什么上面第2个函数有类型错误，而第1个函数却没有？

# *5.5 多态函数

- 参数化多态
- 类型系统的定义
- 类型检查

# 多态函数的引出



例 如何编写求表长的通用程序?

```
typedef struct {
    int info;
    link next;
} cell, *link;
```

×

编译没报错?

那用选项 –Wall 再试试
https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gcc/Warning-Options.html

**unknown type name ‘link’**

因为link的定义在后

# 多态函数的引出



**例** 如何编写求表长的通用程序?

```
typedef struct cell{
    int info;
    struct cell *next;
} cell, *link;
```

```
int length(link lptr) {
    int len = 0;
    link p = lptr;
    while (p != NULL) {
        len++;
        p = p->next;
    }
    return len;
}
```

计算过程与表元的数据类型无关，但语言的类型系统使该函数不能通用

# 多态函数的引出

**例　如何编写求表长的通用程序？**

用ML语言很容易写出求表长的程序而不必管表元的类型

```
fun length (lptr) =
    if null (lptr) then 0
    else length (tl (lptr)) + 1;
```

tl- 返回表尾　　　null-测试表是否为空

length ( [“sun”, “mon”, “tue”] )

length ( [10, 9, 8 ] )

都等于3

# 参数化多态 与 Ad-hoc多态



- **多态函数(polymorphic functions) 参数化多态**
  - 允许函数参数的类型有多种不同的情况
  - 函数体中语句的执行能适应参数为不同类型的情况——相同的实现
- **多态算符(polymorphic operators) Ad-hoc多态**
  - 例如：数组索引、函数应用、通过指针间接访问相应操作的代码段接受不同类型的数组、函数等
  - 多态算符针对不同的参数类型有不同的实现
  - C语言手册中关于取地址算符&的论述是：

如果运算对象的类型是‘…’，那么结果类型是指向‘…’的指针”

# 类型变量及其应用



## 类型变量

- length的类型可以写成$\forall\alpha.list(\alpha) \rightarrow integer$
- 类型变量的引入便于讨论未知类型
  - 如，在不要求标识符先声明再使用的语言中，可通过类型变量确定程序变量的类型

例如，如下假想的程序

```
function deref (p){
    return *p;
}
```

-- 对p的类型一无所知：$\beta$

-- $\beta = pointer\ (\alpha)$

deref 的类型是$\forall\alpha.\ pointer(\alpha) \rightarrow \alpha$

# 多态函数的类型系统

- 一个含多态函数的语言

$P \rightarrow D;\ E$

$D \rightarrow D;\ D \mid \mathbf{id} : Q$

$Q \rightarrow \forall \textbf{type-variable}.\ Q$ 多态函数

$\quad \mid T$

$T \rightarrow T \text{ ‘}\rightarrow\text{’} T$

$\quad \mid T \times T$ 笛卡儿积类型

$\quad \mid \textbf{unary-constructor}\ (\ T\ )$

$\quad \mid \textbf{basic-type}$

$\quad \mid \textbf{type-variable}$ 引入类型变量

$\quad \mid (\ T\ )$

$E \rightarrow E\ (E\ ) \mid E, E \mid \mathbf{id}$

这是一个抽象语言，忽略了函数定义的函数体

# 多态函数的类型系统

## 一个含多态函数的语言

$P \rightarrow D;\ E$

$D \rightarrow D;\ D \mid \mathbf{id} : Q$

$Q \rightarrow \forall \textbf{type-variable}.\ Q$

$\quad \mid T$

$T \rightarrow T\ `\rightarrow'\ T$

$\quad \mid T \times T$

$\quad \mid \textbf{unary-constructor}\ (\ T\ )$

$\quad \mid \textbf{basic-type}$

$\quad \mid \textbf{type-variable}$

$\quad \mid (\ T\ )$

$E \rightarrow E\ (E\ ) \mid E, E \mid \mathbf{id}$

一个程序：

$\mathbf{deref} : \forall \alpha.\ pointer(\alpha) \rightarrow \alpha\ ;$

$q : pointer\ (pointer\ (integer));$

$\mathbf{deref}\ (\mathbf{deref}\ (q))$

# 多态函数的类型系统

## 类型系统中增加的推理规则

- 环境规则　　类型变量α加到定型环境中

(Env Var)

$$\frac{\Gamma \mid\!- \Diamond,\ \ \alpha \notin \mathrm{dom}\ (\Gamma)}{\Gamma, \alpha \mid\!- \Diamond}$$

- 语法规则

(Type Var)

$$\frac{\Gamma_1, \alpha\ , \Gamma_2 \mid\!- \Diamond}{\Gamma_1, \alpha\ , \Gamma_2 \mid\!- \alpha}$$

(Type Product)

$$\frac{\Gamma \mid\!- T_1,\ \ \Gamma \mid\!- T_2}{\Gamma \mid\!- T_1 \times T_2}$$

# 多态函数的类型系统

## 类型系统中增加的推理规则

- 语法规则

(Type Parenthesis)

$$\frac{\Gamma \vdash T}{\Gamma \vdash (T)}$$

(Type Forall)

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash T}{\Gamma \vdash \forall \alpha . T}$$

(Type Fresh)　类型变量换名（$\alpha_i$ 不在Γ中）

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha . T, \quad \Gamma, \alpha_i \vdash \Diamond}{\Gamma, \alpha_i \vdash [\alpha_i / \alpha]\, T}$$

# 多态函数的类型系统

■ 定型规则

(Exp Pair)
$$\frac{\Gamma \mid\!- E_1 : T_1,\quad \Gamma \mid\!- E_2 : T_2}{\Gamma \mid\!- E_1, E_2 : T_1 \times T_2}$$

(Exp FunCall)
$$\frac{\Gamma \mid\!- E_1 : T_1 \to T_2,\quad \Gamma \mid\!- E_2 : T_3}{\Gamma \mid\!- E_1\,(E_2) : S(T_2)}$$

(其中$S$是$T_1$和$T_3$的最一般的合一代换)

**代换**：类型表达式中的类型变量用其所代表的类型表达式去替换

*subst*(*t*:*type_exp*, *Sv*: *type_var*→ *type_exp*):*type_exp*

**实例**：把*subst*函数用于*t*后所得的类型表达式是*t* 的一个实例，用$S(t)$表示

# 代换和实例

```
typeExpression subst (typeExpression t, typeVar→typeExpression Sv) {
    if  (t 是基本类型) return t ;
    else if  (t 是类型变量) return Sv(t);
    else if  (t 是t1→ t2 ) return  subst(t1, Sv) → subst(t2, Sv);
}
```

**例子（$s < t$ 表示$s$是$t$ 的实例，$\alpha$、$\beta$是类型变量）**

$pointer(integer) < pointer(\alpha)$ $\qquad$ $pointer(real) < pointer(\alpha)$

$integer \to integer < \alpha \to \alpha$ $\qquad$ $pointer(\alpha) < \beta$

$\alpha < \beta$

# 不合法的实例

**例** 下面左边的类型表达式不是右边的实例

| | |
|---|---|
| $integer$ | $real$ |
| | 代换不能用于基本类型 |
| $integer \rightarrow real$ | $\alpha \rightarrow \alpha$ |
| | $\alpha$的代换不一致 |
| $integer \rightarrow \alpha$ | $\alpha \rightarrow \alpha$ |
| | $\alpha$的所有出现都应该代换 |

# 合一

- 合一(unify)
  - 如果存在某个代换 *Sv* 使得 $S(t_1) = S(t_2)$，那么这两个表达式$t_1$和 $t_2$能够合一
- 最一般的合一代换(the most general unifier) *S*
  - $S(t_1) = S(t_2)$；
  - 对任何其它满足$S'(t_1) = S'(t_2)$的代换$Sv'$，代换$S'(t_1)$是$S(t_1)$的实例

例如， $t_1 = pointer(\mathrm{list}(\alpha))$ $t_2 = pointer(\beta)$

代换$Sv$: $\alpha \rightarrow \alpha$, $\beta \rightarrow \mathrm{list}(\alpha)$，使得$S(t_1) = S(t_2) = pointer(\mathrm{list}(\alpha))$

代换$Sv'$ : $\alpha \rightarrow \mathrm{integer}$, $\beta \rightarrow \mathrm{list(integer)}$，使得$S'(t_1) = S'(t_2) = pointer(\mathrm{list(integer)})$

代换*Sv*是最一般的合一代换

# 多态函数的类型检查

## 多态函数和普通函数在类型检查上的区别

(1) 同一多态函数的不同出现不要求变元/参数有相同类型

(2) 必须把类型相同的概念推广到类型合一

(3) 要记录类型表达式合一的结果

$$\textbf{apply}: \alpha_o$$

$$\textbf{deref}_o: \mathit{pointer}(\alpha_o) \rightarrow \alpha_o \qquad \textbf{apply}: \alpha_i$$

$$\textbf{deref}_i: \mathit{pointer}(\alpha_i) \rightarrow \alpha_i \qquad q: \mathit{pointer}(\mathit{pointer}(\mathit{integer}))$$

**deref(deref (*q* ))**的带标记的语法树

# 检查多态函数的翻译方案

$E \rightarrow E_1 (E_2)$

{ $p$ = $mkleaf$ ($newtypevar$); // 返回类型

$unify$ ($E_1.type$, $mknode$ ( '$\rightarrow$', $E_2.type$, $p$) );

$E.type = p$; }

$E \rightarrow E_1, E_2$

{$E.type$ = $mknode$ ( '$\times$', $E_1.type$ , $E_2.type$); }

$E \rightarrow$ id

{$E.type$ = $fresh$ ($lookup$(id.$entry$)); } // 类型变量

# 例：多态函数的检查



apply: $\alpha_o$

deref$_o$: $pointer(\alpha_o) \rightarrow \alpha_o$ apply : $\alpha_i$

deref$_i$ : $pointer(\alpha_i) \rightarrow \alpha_i$ q: $pointer(pointer(integer))$

| 表达式 ： 类型 | 代 换 |
|---|---|
| q : $pointer(pointer(integer))$ | |
| deref$_i$ : $pointer(\alpha_i) \rightarrow \alpha_i$ | |
| deref$_i$(q) : $pointer(integer)$ | $\alpha_i = pointer(integer)$ |
| deref$_o$ : $pointer(\alpha_o) \rightarrow \alpha_o$ | |
| deref$_o$(deref$_i$(q)) : $integer$ | $\alpha_o = integer$ |

# 求表长的函数的检查

$\text{length} : \beta$ ;　　　$\text{lptr} : \gamma$ ;

$\text{if} : \forall \alpha . \, boolean \times \alpha \times \alpha \to \alpha$ ;

$\text{null} : \forall \alpha . \, list\,(\alpha) \to boolean$ ;

$\text{tl} : \forall \alpha . \, list\,(\alpha) \to list\,(\alpha)$ ;

$0 : integer$ ;　$1 : integer$ ;

$+ : integer \times integer \to integer$ ;

$\text{match} : \forall \alpha . \, \alpha \times \alpha \to \alpha$ ;

类型声明部分

```
fun length (lptr) =
    if null (lptr) then 0
    else length (tl (lptr)) + 1;
```

```
match (                          -- 表达式，匹配length函数的
    length (lptr),               -- 函数首部和函数体的类型
    if (null (lptr), 0, length (tl(lptr)) +1)
)
```

# 求表长的函数的检查

| 行 | 定 型 断 言 | 代 换 | 规 则 |
| --- | --- | --- | --- |
| (1) | lptr : $\gamma$ | | (Exp Id) |
| (2) | length : $\beta$ | | (Exp Id) |
| (3) | length(lptr) : $\delta$ | $\beta = \gamma \to \delta$ | (Exp FunCall) |
| (4) | lptr : $\gamma$ | | 从(1)可得 |
| (5) | null : $list(\alpha_n) \to$ *boolean* | | (Exp Id)和 (Type Fresh) |
| (6) | null(lptr) : *boolean* | $\gamma = list\ (\alpha_n)$ | (Exp FunCall) |
| (7) | 0 : *integer* | | (Exp Num) |
| (8) | lptr : $list(\alpha_n)$ | | 从(1)可得 |

# 求表长的函数的检查

| 行 | 定 型 断 言 | 代 换 | 规 则 |
|---|---|---|---|
| (9) | tl : $list(\alpha_t) \rightarrow list(\alpha_t)$ | | (Exp Id)和<br>(Type Fresh) |
| (10) | tl(lptr) : $list(\alpha_n)$ | $\alpha_t = \alpha_n$ | (Exp FunCall) |
| (11) | length : $list(\alpha_n) \rightarrow \delta$ | | 从(2)可得 |
| (12) | length(tl(lptr)) : $\delta$ | | (Exp FunCall) |
| (13) | 1 : *integer* | | (Exp Num) |
| (14) | + : $integer \times integer$<br>$\rightarrow integer$ | | (Exp Id) |

# 求表长的函数的检查

| 行 | 定 型 断 言 | 代 换 | 规 则 |
|---|---|---|---|
| (15) | length (tl(lptr)) +1 : *integer* | $\delta = integer$ | (Exp FunCall) |
| (16) | if : $boolean \times \alpha_i \times \alpha_i \to \alpha_i$ | | (Exp Id)和 (Type Fresh) |
| (17) | if ( ... ) : *integer* | $\alpha_i = integer$ | (Exp FunCall) |
| (18) | match : $\alpha_m \times \alpha_m \to \alpha_m$ | | (Exp Id)和 (Type Fresh) |
| (19) | match ( … ) : *integer* | $\alpha_m = integer$ | (Exp FunCall) |

length函数的类型是 $\forall\alpha.\ list(\alpha) \to integer$

# 5.6 函数和算符重载

- Ad-hoc多态
- 可能的类型集合及其缩小
- 附加：子类型关系引起的协变和逆变

# 重载

## □ 重载符号

- 有多个含义，但在每个引用点的含义都是唯一的

例如：

- 加法算符+可用于不同类型，"+"是多个函数的名字，而不是一个多态函数的名字
- 在Ada中，( ) 是重载的，*A*( *I* ) 有不同含义

## □ 重载的消除

- 在重载符号的引用点，其含义能确定到唯一

# 表达式的可能类型集合



## 例 Ada语言

声明：

function “$*$” ($i$, $j$ : integer ) return complex;

function “$*$” ($x$, $y$ : complex ) return complex;

使得算符$*$重载，可能的类型包括：

$integer \times integer \rightarrow integer$ --这是预定义的类型

$integer \times integer \rightarrow complex$

$complex \times complex \rightarrow complex$

$(3 * 5) * z$（$z$:complex）

$E$: {$i$, $c$}

$E$: {$i$}　　　　$E$: {$i$}

3: {$i$}　　$*$:　　5: {$i$}

{$i \times i \rightarrow i$, $i \times i \rightarrow c$, $c \times c \rightarrow c$ }

# 重载函数的应用

- 缩小可能类型的集合：

综合属性types：可能的类型集合

  - $E' \to E$　　$E'.types = E.types;$
  - $E \to \text{id}$　　$E.types = lookup(\text{id}.entry);$
  - $E \to E_1(E_2)$　　$E.types = \{s' \mid E_2.types$中存在一个$s$，使得$s \to s'$属于$E_1.types\};$

# 重载函数的应用

□ 缩小可能类型的集合：Ada 要求完整的表达式有唯一的类型

- $E' \rightarrow E$ $\quad E'.types = E.types;$

  继承属性

  if $(E'.types == \{\ t\ \})$ $E.unique = t$; else $E.unique = type\_error$ ;

  $E'.code = E.code;$

- $E \rightarrow \mathrm{id}$ $\quad E.types = lookup(\mathrm{id}.entry);$

  $E.code = gen(\mathrm{id}.lexeme,\ ‘:’,\ E.unique);$

- $E \rightarrow E_1(E_2)$ $\quad E.types = \{s' \mid E_2.types$中存在一个$s$，使得$s \rightarrow s'$属于$E_1.types\};$

  $t = E.unique;$

  $S = \{s \mid s \in E_2.types \ \&\&\ s \rightarrow t \in E_1.types\ \};$

  if $(S == \{\ s\ \})$ $E_2.unique = s$; else $E_2.unique = type\_error;$

  if $(\ S == \{\ s\ \})$ $E_1.unique = s \rightarrow t$ ; else $E_1.unique = type\_error;$

  $E.code = E_1.code \parallel E_2.code \parallel gen(‘apply’,\ ‘:’,\ E.unique);$

非L属性定义

只有归约到开始非终结符时，
才能确定唯一类型信息

不能边解析边类型检查

# 重载函数的应用



## 缩小可能类型的集合：Ada 要求完整的表达式有唯一的类型

- $E' \to E$ $\quad E'.types = E.types;$
  if $(E'.types == \{\, t \,\})$ $E.unique = t$; else $E.unique = type\_error$ ;
  $E'.code = E.code;$
- $E \to \mathbf{id}$ $\quad E.types = lookup(\mathbf{id}.entry);$
  $E.code = gen(\mathbf{id}.lexeme,$ ‘:’, $E.unique);$
- $E \to E_1(E_2)$ $\quad E.types = \{s' \mid E_2.types$中存在一个$s$，使得$s \to s'$属于$E_1.types\};$
  $t = E.unique;$
  $S = \{s \mid s \in E_2.types \;\&\&\; s \to t \in E_1.types\}$ ;
  if $(S == \{\, s \,\})$ $E_2.unique = s$; else $E_2.unique = type\_error;$
  if $(S == \{\, s \,\})$ $E_1.unique = s \to t$ ; else $E_1.unique = type\_error;$
  $E.code = E_1.code \,||\, E_2.code \,||\, gen($‘apply’, ‘:’, $E.unique);$

基于树访问的类型检查
简单地，可以采取两遍访问
①在exit时计算*types*
②在enter时计算*unique*，
在exit时计算*code*

# 附加：子类型 - 协变和逆变



- 子类型关系 <
  - 类型上的偏序关系 $\tau$
  - 满足包含原理：如果s是t的子类型，则需要类型为t的值时，都可以将类型为s的值提供给它
- 协变（covariant）t<t', 则c(t)<c(t')
  - 函数类型在值域上是协变的

    假设$e:\sigma\rightarrow\tau$，$e1:\sigma$，则$e(e1):\tau$. 如果$\tau<\tau'$，则$e(e1):\tau'$.
- 逆变（contravariant）t<t', 则c(t')<c(t)
  - 函数类型在定义域上是逆变的

    假设$e:\sigma\rightarrow\tau$，$e1:\sigma'$，如果$\sigma'<\sigma$，则$e(e1):\tau$.

# 例 题 5

编译器和连接装配器未能发现下面的调用错误

```
long gcd (p, q) long p, q;{/*这是参数声明的传统形式*/
    /*参数声明的现代形式是long gcd ( long p, long q) { */
    if (p%q == 0)
            return q;
    else
            return gcd (q, p%q);
}
main() {
    printf("%ld,%ld\n", gcd(5), gcd(5,10,20));
}
```