



# 第三章：图像变换

---

中国科学技术大学  
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 ([lihq@ustc.edu.cn](mailto:lihq@ustc.edu.cn))  
周文罡 ([zhwg@ustc.edu.cn](mailto:zhwg@ustc.edu.cn))  
李 礼 ([li11@ustc.edu.cn](mailto:li11@ustc.edu.cn))  
胡 洋 ([eeychu@ustc.edu.cn](mailto:eeychu@ustc.edu.cn))



# 图像变换

## □ 图像变换

- ✓ 可分离和正交图象变换
- ✓ 离散傅立叶变换 (DFT)
- ✓ 离散余弦变换 (DCT)
- ✓ 沃尔什/哈达玛变换
- ✓ Karhunen-Loeve变换 (KLT)
- ✓ 小波变换 (DWT)

# 可分离和正交图象变换

## □ 1-D变换

### ■ 正变换

正向变换核

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

### ■ 反变换

反向变换核

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

# 可分离和正交图象变换

## □ 2-D变换

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) h(x, y, u, v) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) k(x, y, u, v) \quad (2)$$

正向变换核

变换核与  
原始函数及  
变换后函数无关

反向变换核



# 可分离和正交图象变换

## □ 可分离

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)h_2(y, v) \quad T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v)h_1(x, u)$$

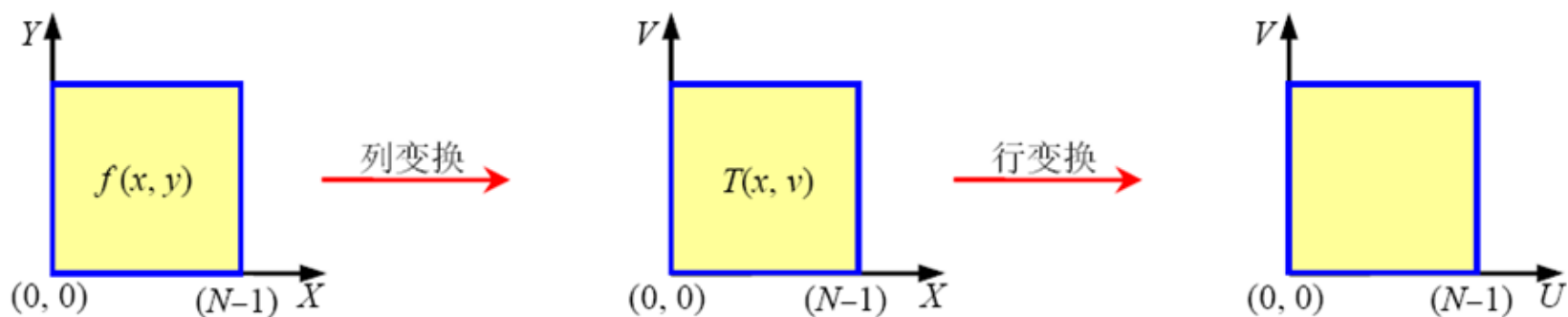
## □ 对称

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_1(y, v)$$

( $h_1$ 与 $h_2$ 的函数形式一样)

# 可分离和正交图象变换

- 具有可分离变换核的2-D变换可以分成两个步骤计算，每个步骤用一个1-D变换



由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换

# 可分离和正交图象变换

## □ 可分离且对称

变换结果

$$\mathbf{T} = \mathbf{AFA}$$

对称变换矩阵

图象矩阵

反变换矩阵

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{A}^{-1}$$



# 可分离和正交图象变换

## □ 正交

考虑变换矩阵：  $B = A^{-1}$   $F = BTB$

酉矩阵（\*代表共轭）：  $A^{-1} = A^{*T}$

如果A为实矩阵，且：  $A^{-1} = A^T$

则A为正交矩阵，构成正交变换对





# 离散傅立叶变换 (DFT)

## □ 二维离散傅立叶变换式

■ 对于 $N \times N$ 的二维矩阵（方阵），二维离散傅立叶变换对为：

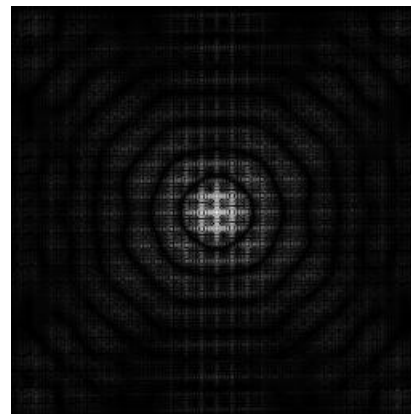
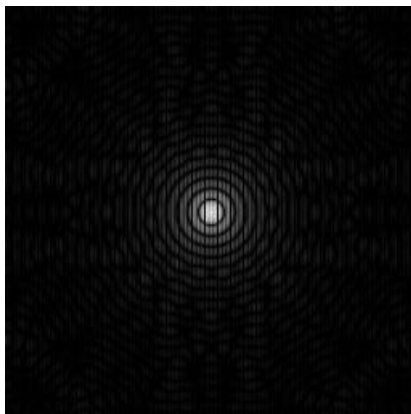
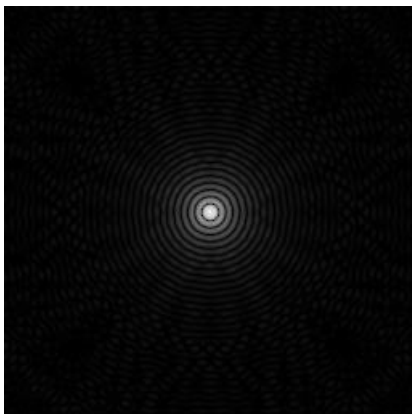
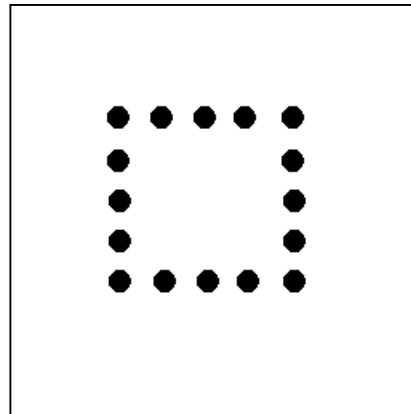
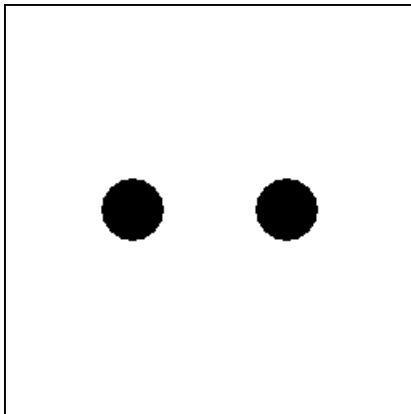
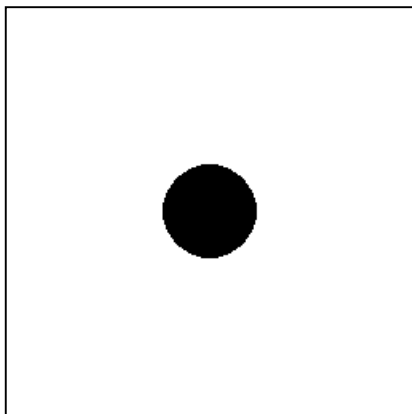
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left\{ \frac{-2\pi j (ux + vy)}{N} \right\}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left\{ \frac{+2\pi j (ux + vy)}{N} \right\}$$

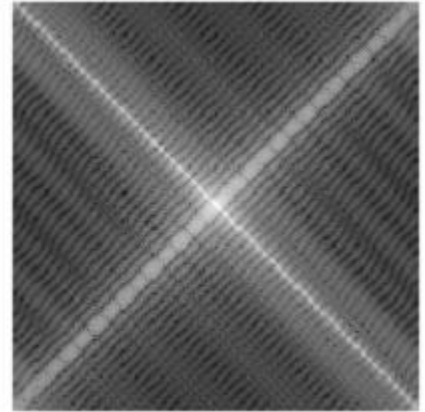
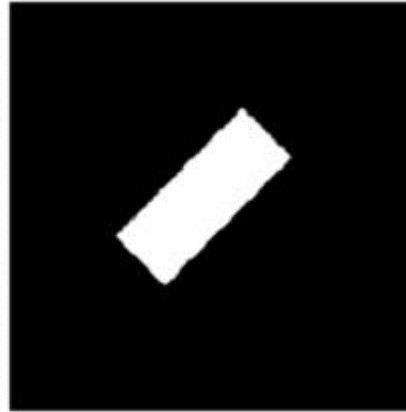
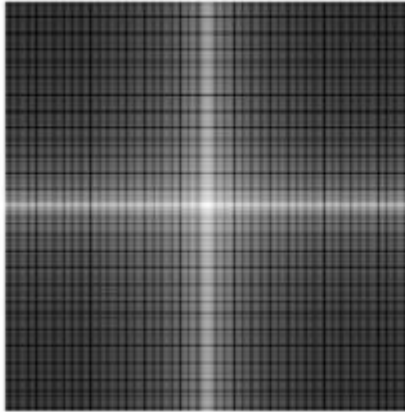
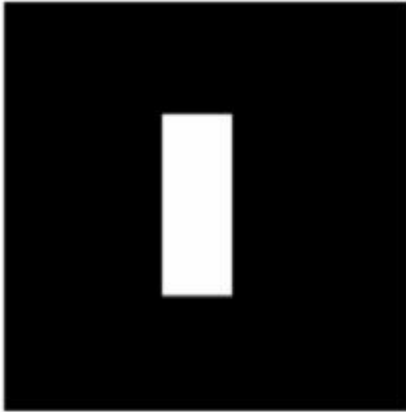
# 二维DFT的性质

- 线性  $f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad F_1(u, v) + F_2(u, v)$
- 比例  $f(ax, by) \quad \frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
- 平移  $f(x-a, y-b) \quad e^{-j2\pi(au+bv)} F(u, v)$   
 $e^{j2\pi(cx+dy)} f(x, y) \quad F(u-c, v-d)$
- 卷积  $f_1(x, y) * f_2(x, y) \quad F_1(u, v) F_2(u, v)$   
 $f_1(x, y) f_2(x, y) \quad F_1(u, v) * F_2(u, v)$
- 旋转  $f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$   
 $F(u \cos \theta + v \sin \theta, -u \sin \theta + v \cos \theta)$

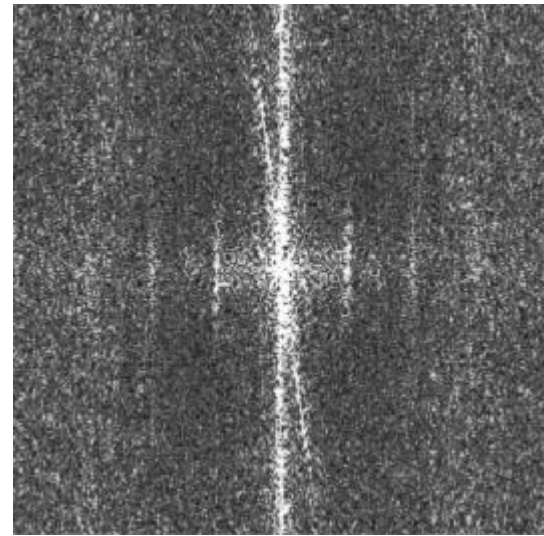
# 线性叠加及尺度变化



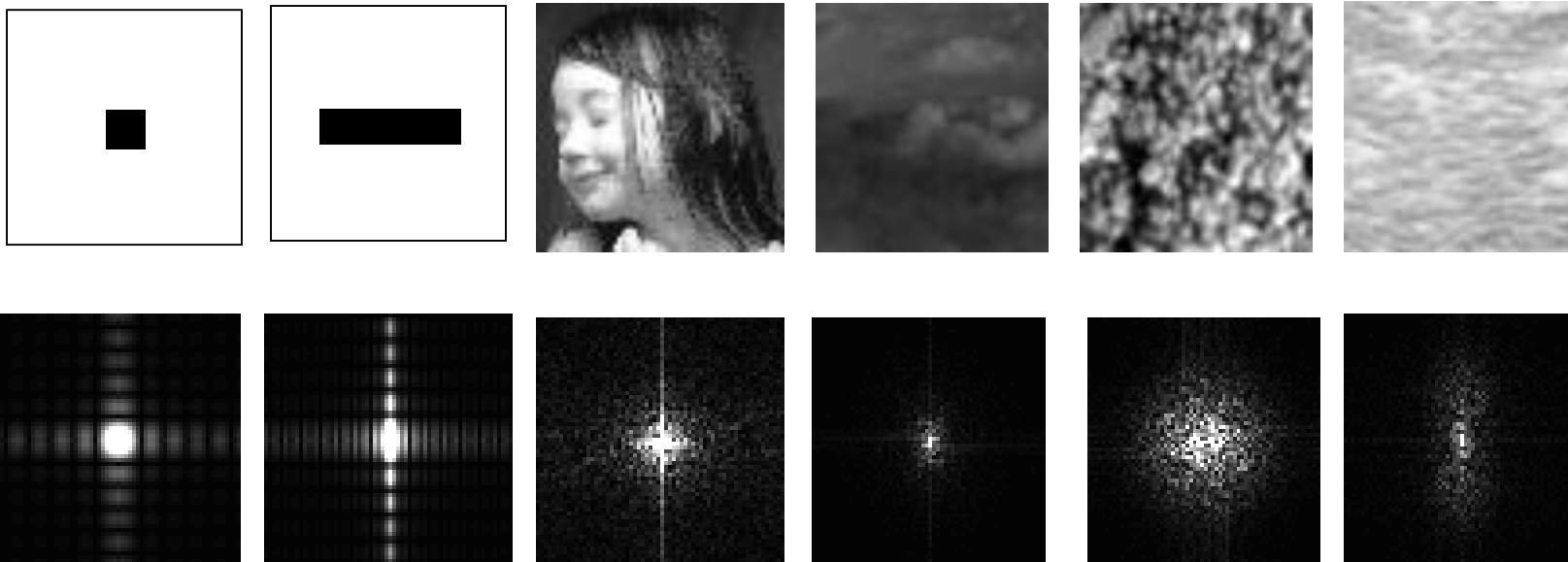
# 旋转性



# 实例



# 典型图象的频谱



# 离散余弦变换 (DCT)

- 一种可分离、正交、对称的变换
- 1-D离散余弦变换

$$C(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) C(u) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{当 } u = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{当 } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



# 离散余弦变换 (DCT)

## □ 2-D离散余弦变换

$$C(u, v) = a(u)a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[ \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

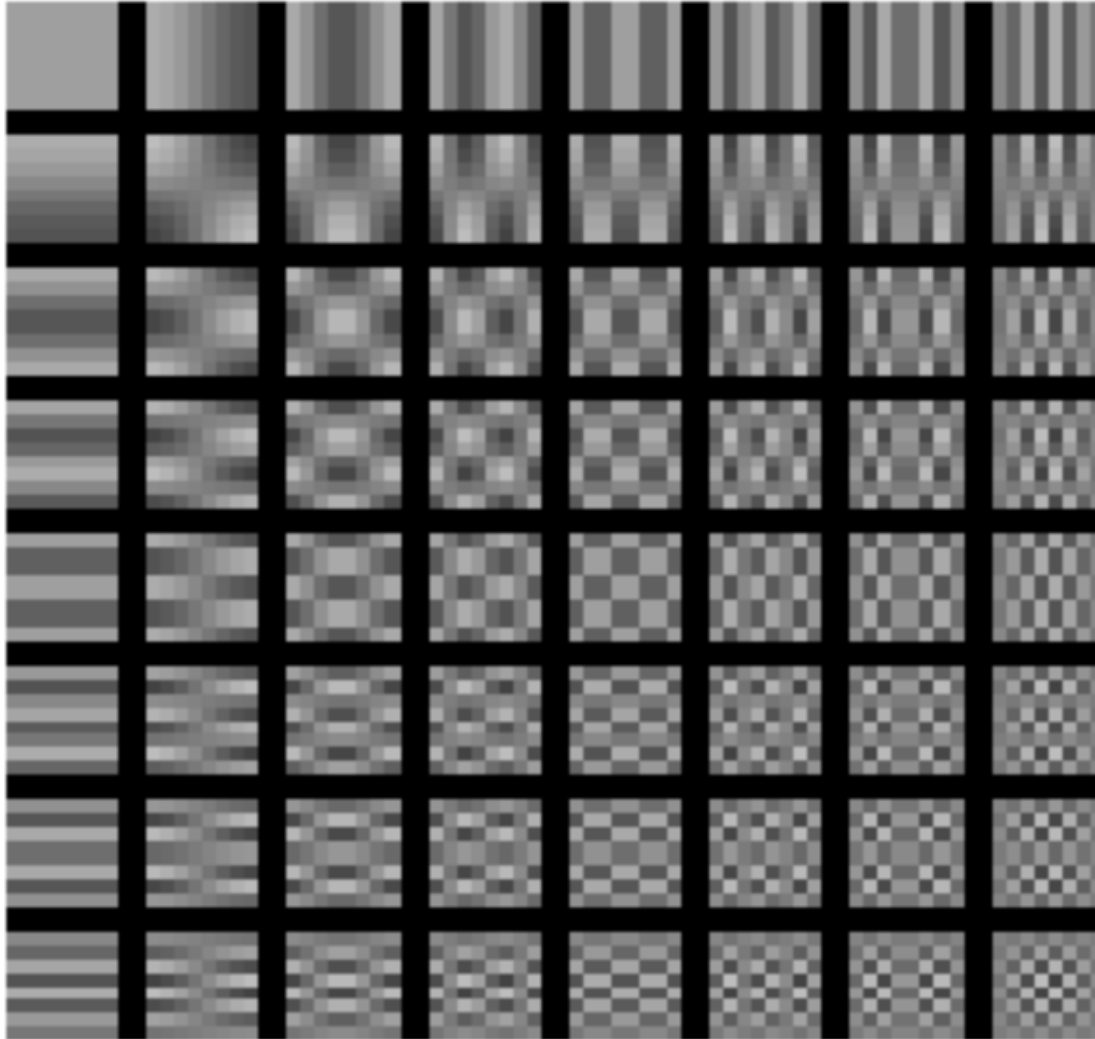
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u)a(v) C(u, v) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[ \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

讨论可分离性和对称性

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v) \quad h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_1(y, v)$$



# DCT基函数





# DCT的性质

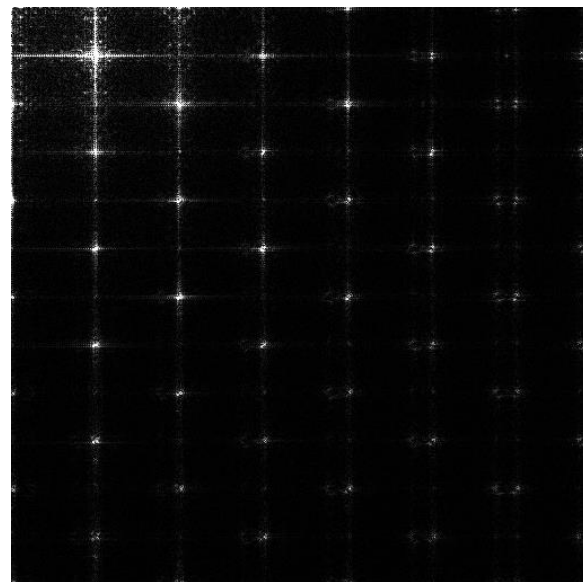
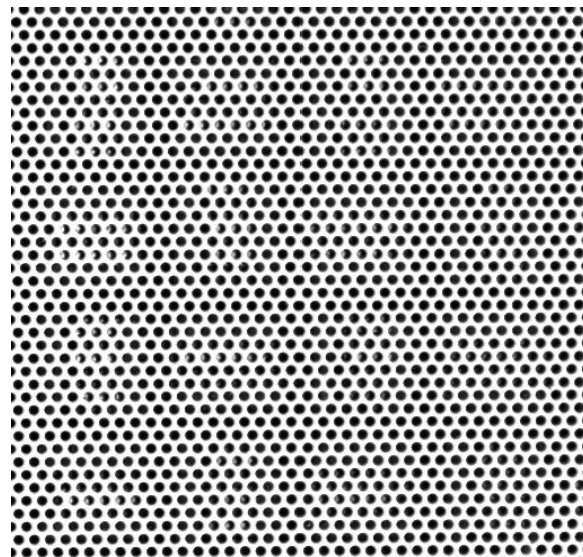
- 实规范正交基
  - 基向量模长为1
- 与DFT的关系
  - DCT对应实偶函数的DFT
- 有快速算法
  - 比如类似FFT的算法
- 能量压缩
  - 应用于JPEG压缩编码

# DCT变换结果示例

---

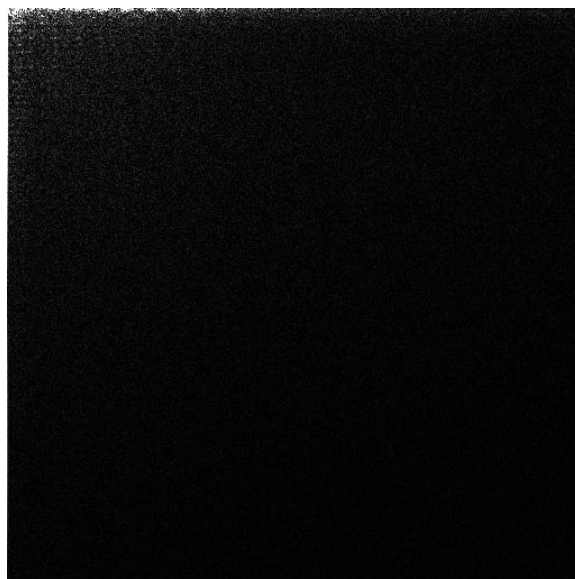
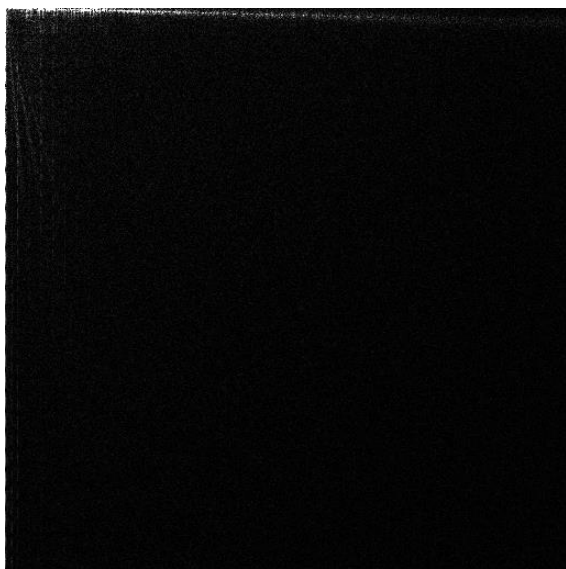
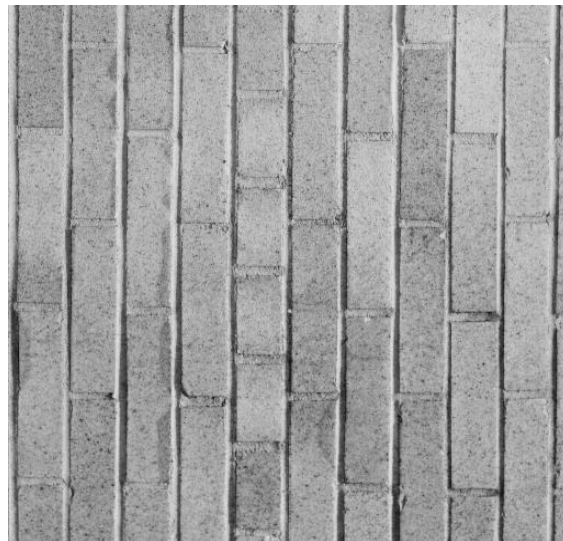
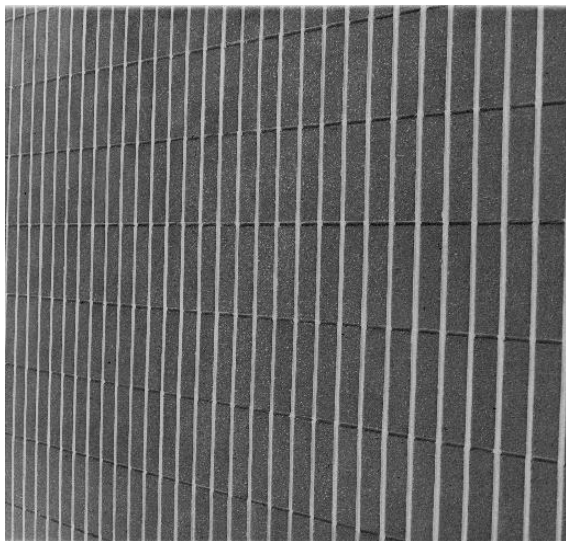


# DCT变换结果示例





# DCT变换结果示例



# 沃尔什/哈达玛变换

---

- 沃尔什（Walsh）/哈达玛变换,其基函数与DFT和DCT不同，不是正弦形的，而是方波的各种变形
- 在这类变换中，哈达玛（Hadamard）变换在图象处理中应用比较广泛
- 运算简单，只需加减运算
- 缺乏明确物理意义和较直观的解释



# 哈达玛变换的递推式

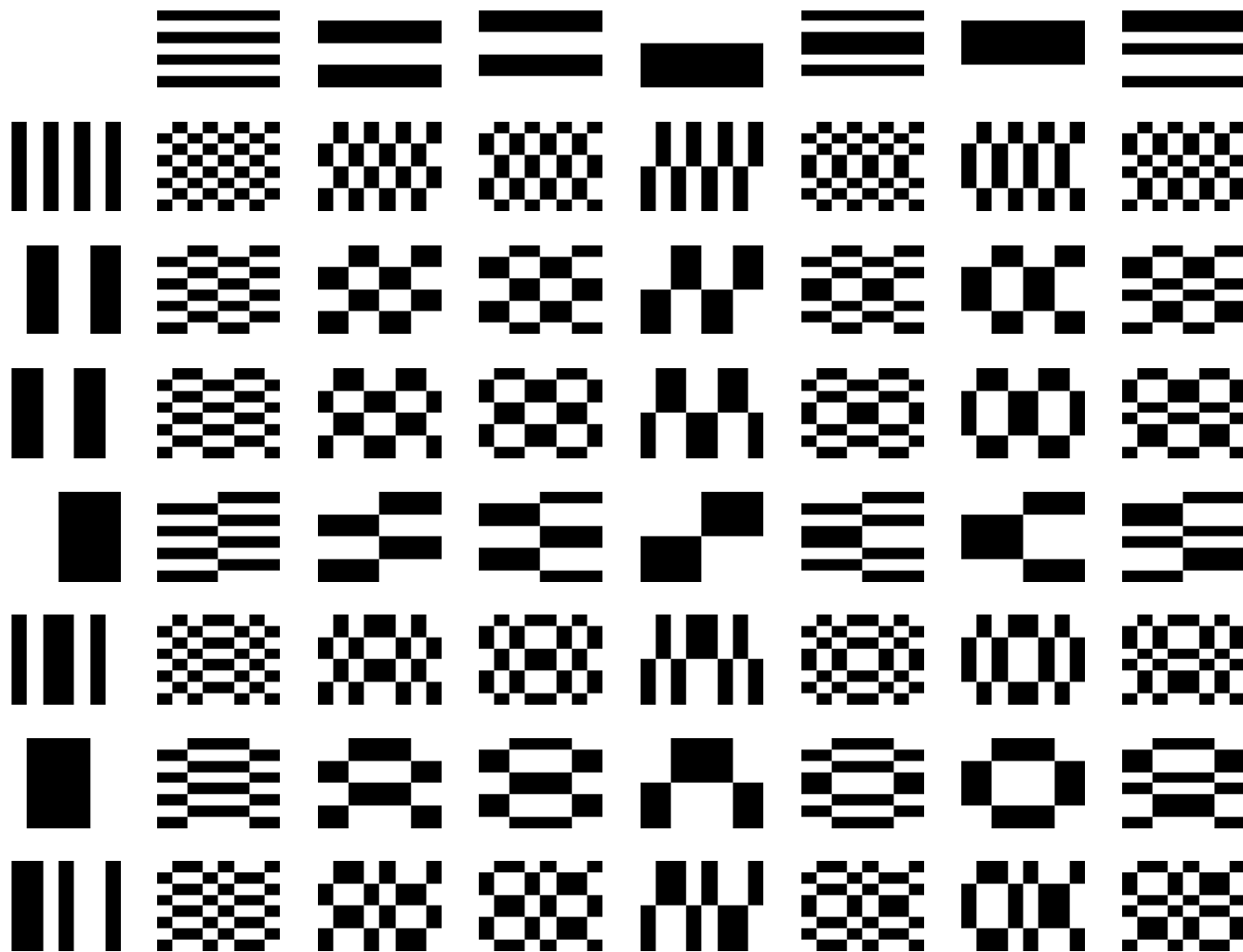
□  $2^K \times 2^K$  哈达玛递推式：

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

# 沃尔什/哈达玛变换

基  
图  
象







# Karhunen-Loeve变换 (PCA)

Principle Component Analysis

- 对于零均值的  $f(x, y)$ ，对其自相关函数  $R_{ff}$ ，可以找到一组正交变换基  $\phi_{mn}$ ， $\phi_{mn}$  满足积分方程：

$$\iint R_{ff}(x, y, u, v) \phi_{mn}(u, v) du dv = \gamma_{mn} \phi_{mn}(x, y)$$

其中  $R_{ff}(x, y, u, v) = \text{cov}(f(x, y), f(u, v))$

- 用这样的正交基系列进行变换，可使变换后**完全去相关**
  - 该变换的**变换核**要根据原信号的统计性质求出
- KL变换是建立在统计特性基础上的一种变换
    - 一种特征提取方法
    - 最小均方误差意义下的最优正交变换
    - 在消除模式特征之间的相关性、突出差异性方面有最优的效果



# 协方差矩阵及优化目标

- 我们希望原始数据的新的表达在每个维度上不存在（线性）相关性，因为相关性意味着数据的不同维度间不完全独立，就必然存在重复表示的信息。即：**数据的不同维度的协方差为0**

我们希望由新的基所得到的数据表达的协方差矩阵中，除对角线上的方差元素外，其余所有的协方差元素全部为0（矩阵对角化）。

# 协方差矩阵及优化目标

□ 设原始数据为M个N维向量，首先将数据每个维度减去各自维度的均值，使每个维度的均值都变为0，记为矩阵X（每一列对应一个样本向量）

□ 基变换矩阵记为矩阵P，则基变换后的数据可以记为：

$$Y = PX$$

□ 显然，Y每个维度的均值也为0。因此Y的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} D_Y &= \frac{1}{M} Y Y^T \\ &= \frac{1}{M} (PX)(PX)^T \\ &= \frac{1}{M} P X X^T P^T \\ &= P \left( \frac{1}{M} X X^T \right) P^T \\ &= P D_X P^T \end{aligned}$$

目标变换矩阵P：  
能让原始数据协  
方差矩阵对角化



# 协方差矩阵及优化目标

## □ 我们知道：

- 协方差矩阵 $D_X$ 是一个实对称矩阵
- 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必然正交

## □ $P$ 是协方差矩阵 $D_X$ 的特征向量单位化后按行排列出的矩阵，其中每一行都是 $D_X$ 的一个特征向量

## □ 如果 $P$ 按照特征值从大到小，将特征向量从上到下排列，则用 $P$ 的前 $k$ 行组成的矩阵乘以原始数据矩阵 $X$ ，就得到了我们需要的降维后的数据矩阵 $Y$

# 算法步骤

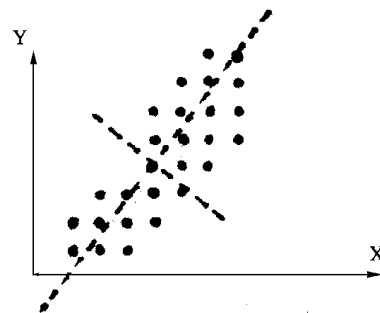
原始数据为M个N维向量：

1. 将原始数据按列组成N行M列的矩阵X；
2. 将X的每一行（每个维度）进行零均值化；
3. 求出协方差矩阵 $D_X = \frac{1}{M}XX^T$ ；
4. 求出 $D_X$ 的特征值及对应的特征向量；
5. 将特征向量按对应特征值大小从上到下按行排列成矩阵，取前k行组成矩阵P；
6.  $Y = PX$ 即为降维到k维后的数据。

# K-L变换一例(1)

图象点序列:

(1, 1), (1, 2),  
(2, 1), (2, 2), (2, 3),  
(3, 1), (3, 2), (3, 3),  
(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),  
(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7),  
(6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8),  
(7, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 8)



均值 
$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4 \\ 4.3 \end{bmatrix}$$

协方差 
$$\Sigma_x = E \left\{ \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} & y - \bar{y} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3.286 & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 \end{bmatrix}$$

# K-L变换一例(2)

- 在维数小时，由本征多项式为零求协方差矩阵的本征值：

$$\begin{bmatrix} 3.268 - \lambda & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7.865\lambda + 5.443 = 0$$

$$\lambda_1 = 7.098 \quad \lambda_2 = 0.768$$

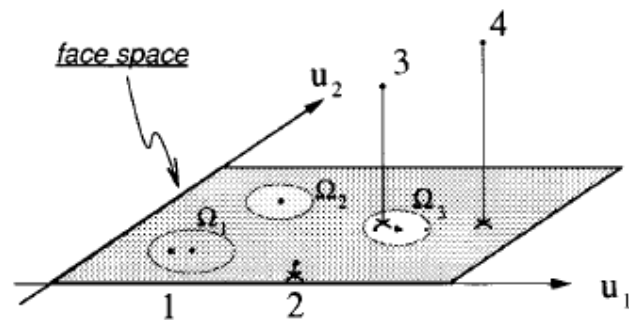
- 再把本征值代入  $\Sigma_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$ ，求出特征矢量：

$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.23 \end{bmatrix} \quad \vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 把相互垂直的二特征矢量作为新的坐标，新坐标的主轴方向为所变换数据方差最大的方向

# K-L变换应用实例 —— 人脸识别

1. 把每一幅人脸列化，视为随机向量 $F$ 的不同实现。
2. 估计 $F$ 协方差矩阵 $C$ ，并计算其特征值特征向量。  
( $C$ 是半正定矩阵，维数不大于图像数，对应不同特征值的特征向量正交，特征脸)
3. 选择对应少量最大特征值的特征向量组成特征脸空间
4. 每张脸映射为特征脸空间的点，以其坐标作为特征向量。
5. 采用模式识别方法，进行分类识别。  
(如欧式距离)

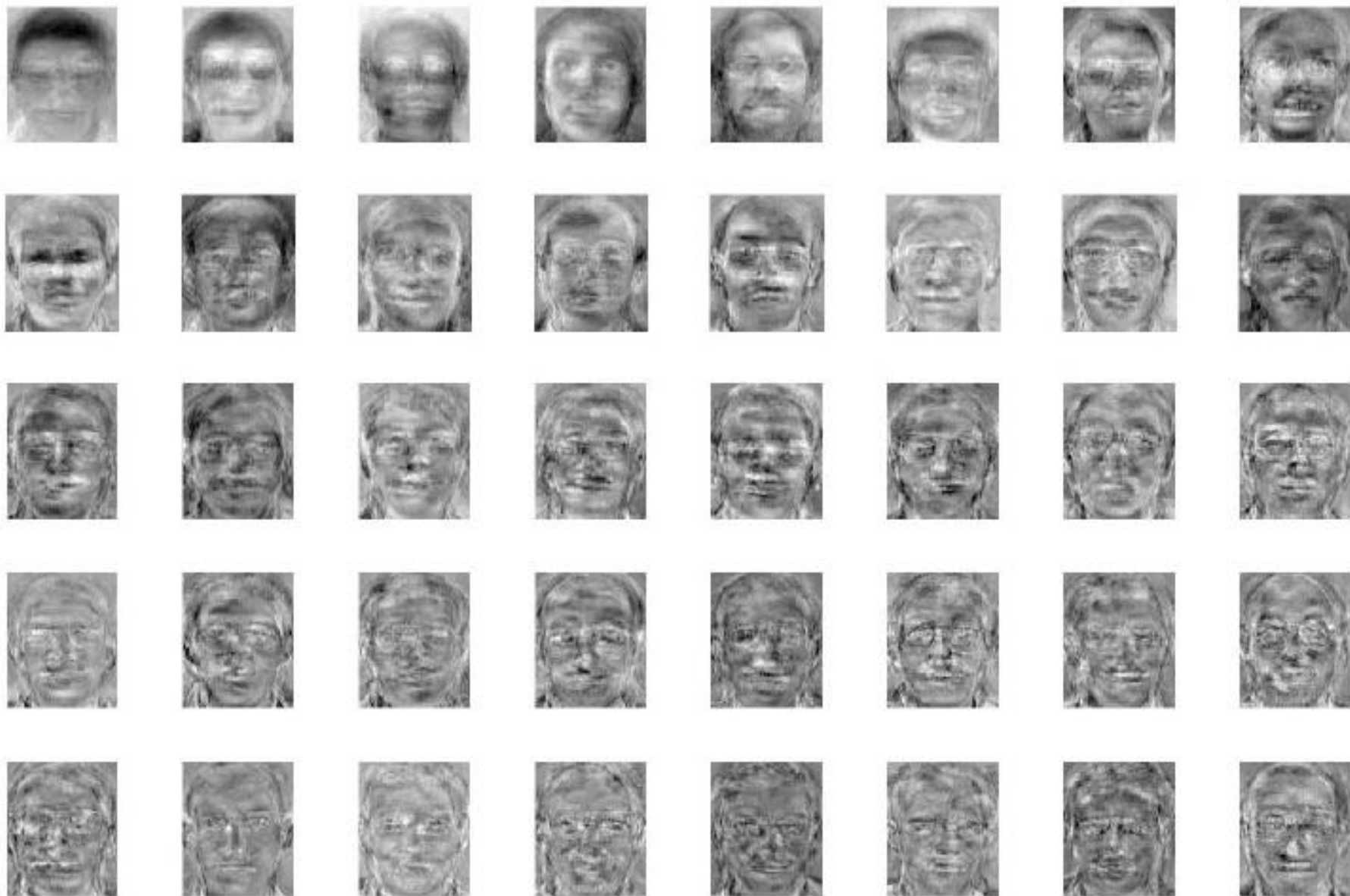




# 人脸库



# 特征脸



# 特征脸空间 (top 8)

---





# 小波变换 (DWT)

## □ 傅立叶变换

- 变换之后丢掉了时域信息
- 傅立叶变换在分析瞬态信号时仍有不足
  - ✓ 瞬态信号：持续时间短，有明显的开端和结束的信号

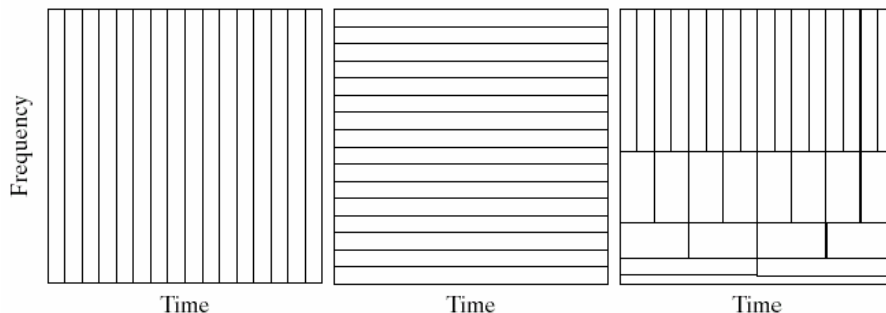
## □ 时频域分析

- 小波变换在二维时频空间分析信号

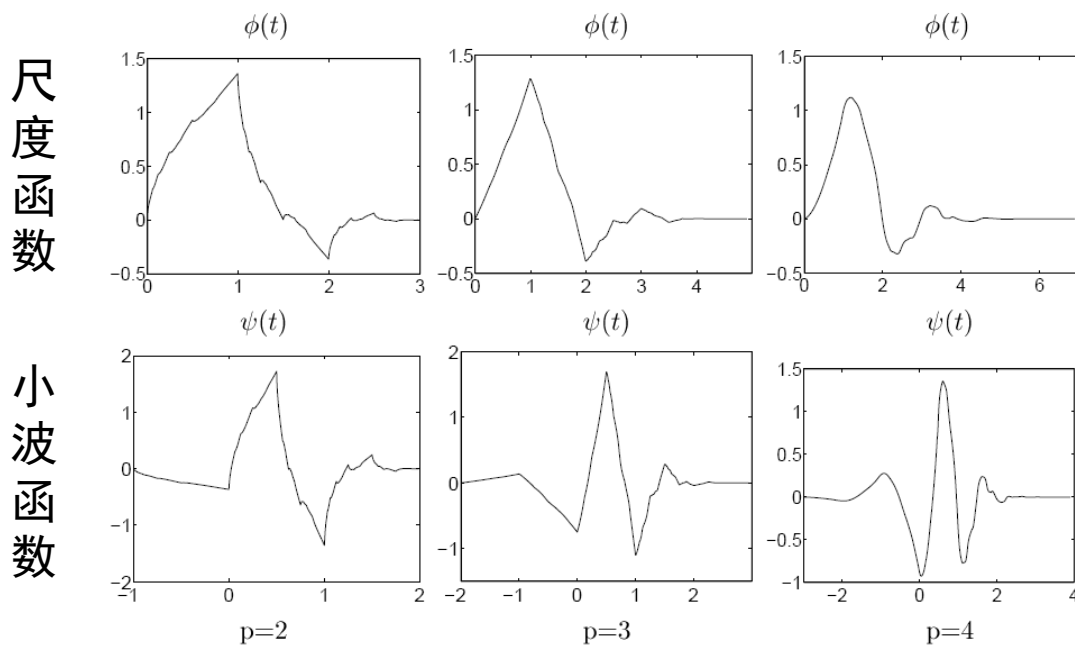
## □ 变换

- 理想的基本小波是过程很短的振荡函数
- 如同傅立叶变换有连续、离散的变换，小波也有连续、离散的变换

# 1维离散小波变换

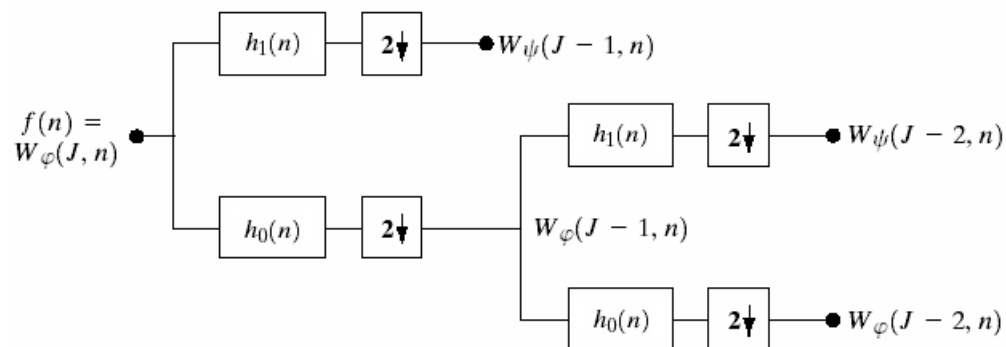
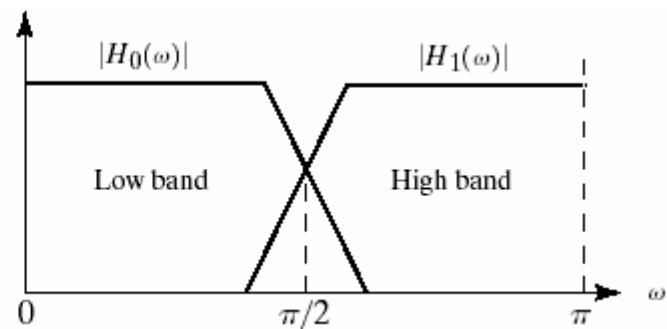
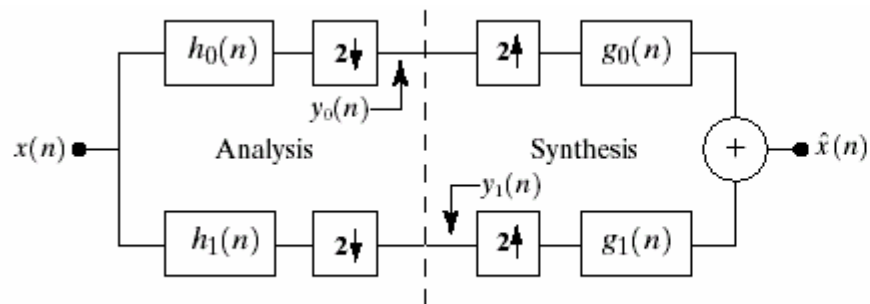


时频铺叠（从左到右：Dirac、Fourier、wavelet）

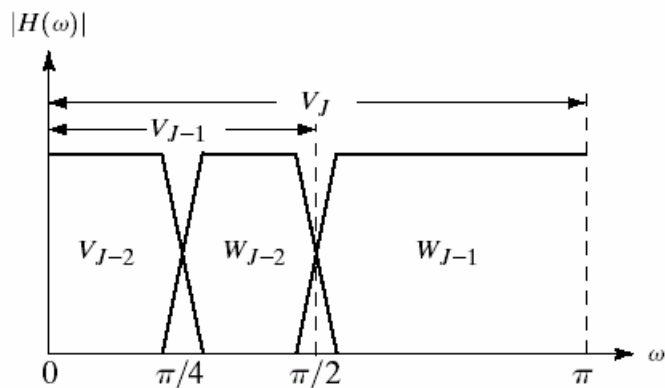


Daubechies 小波（高通）及尺度（低通）函数。（ $p$ 为消失矩 Vanishing Moment）

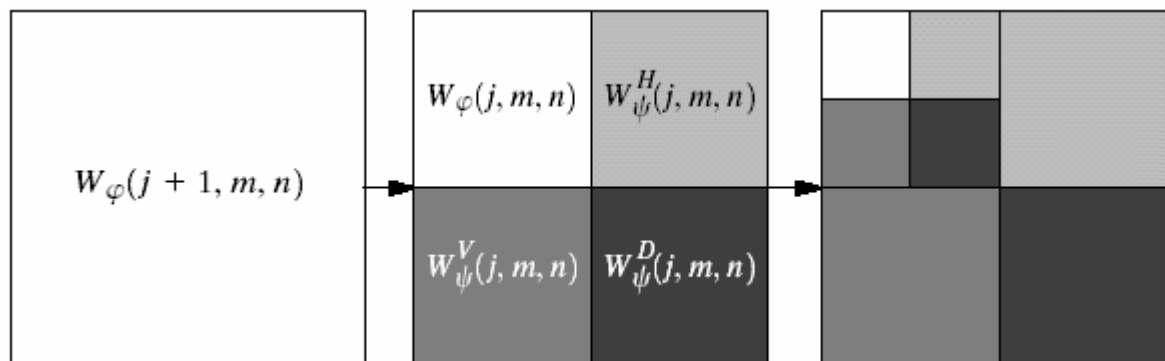
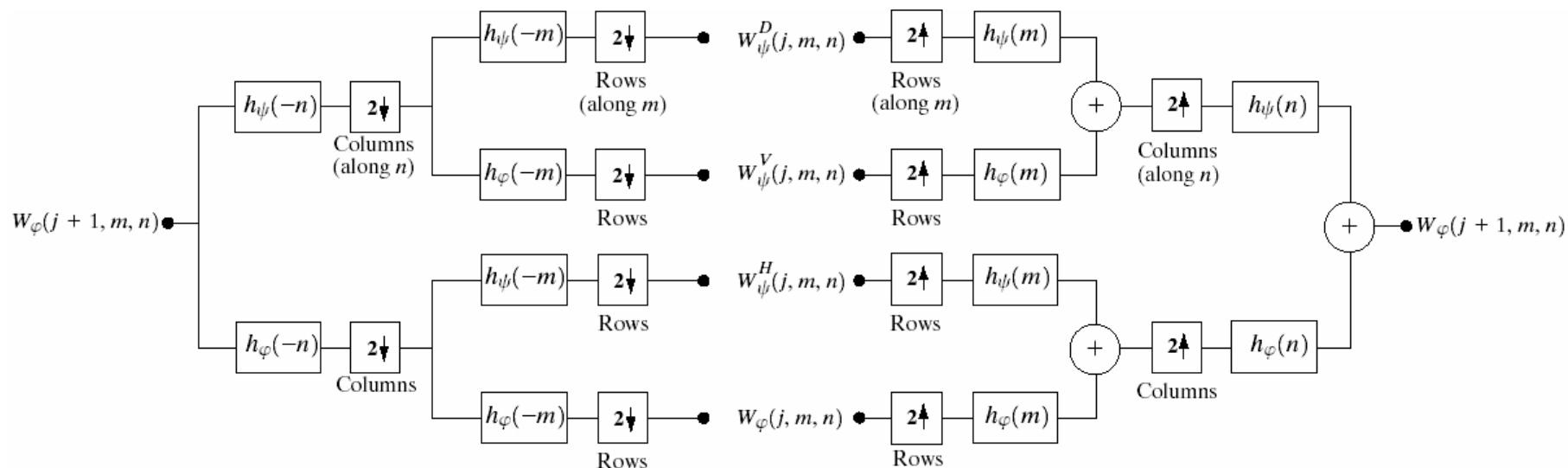
# 1维离散小波变换



对低频进行  
进一步分解



# 2维离散小波变换





# 实例

