



第三章：图像处理

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)
李 礼 (li11@ustc.edu.cn)
胡 洋 (eeychu@ustc.edu.cn)



图像处理

- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波
- 稀疏表达

灰度变换与空间滤波基础

- 空间域：包含图像像素的简单平面
- 空间域处理

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

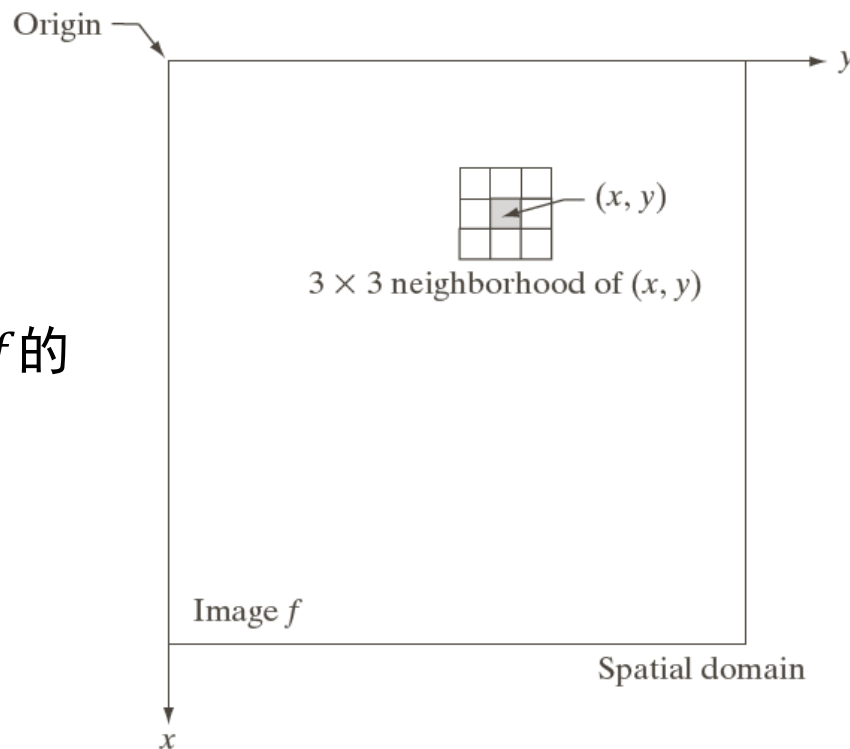
$f(x, y)$: 输入图像

$g(x, y)$: 输出图像

T : 在点 (x, y) 的邻域上定义的关于 f 的一种算子

- 空间邻域

- 决定了灰度操作的范围
- 1×1 : 灰度变换
- 3×3 等: 空间滤波





灰度变换与空域滤波

□ 空间域灰度变换

■ 直方图处理

□ 空域滤波

■ 空间域滤波基础

■ 空域平滑

■ 空域锐化

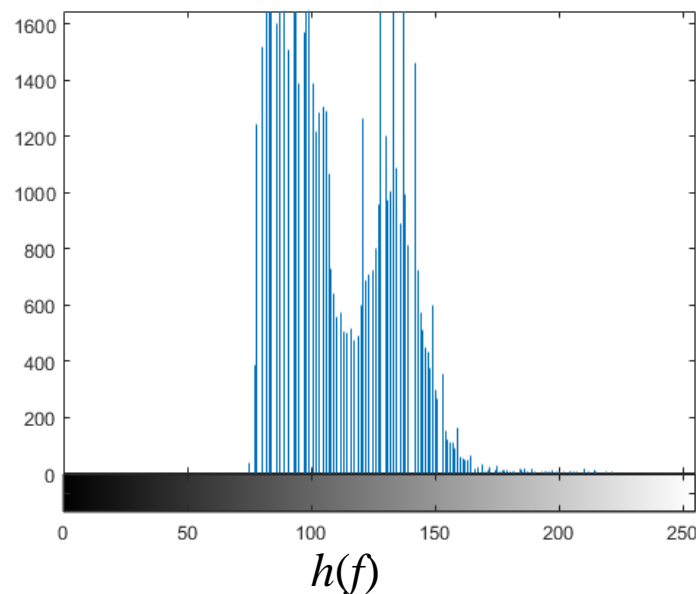
灰度直方图

□ 灰度直方图 (histogram)

- 是一种关于灰度级的函数，它表示数字图像中每一灰度级与该灰度级出现的频数之间的对应关系
- 一幅特定的图有唯一的直方图，但反之不成立
- 直方图在一定程度上可以反映图像的状况
 - ✓ 例如: 有时可以根据直方图确定分割物体和背景的背景

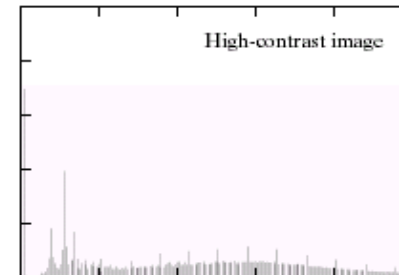
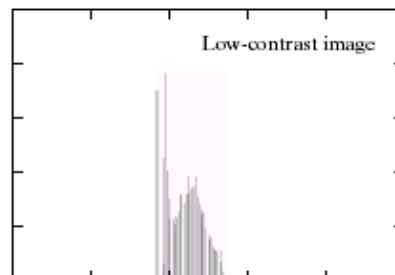
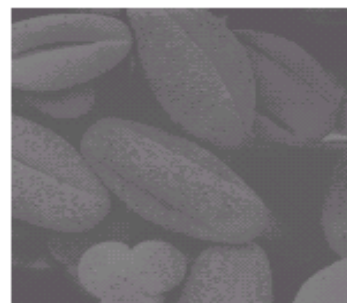
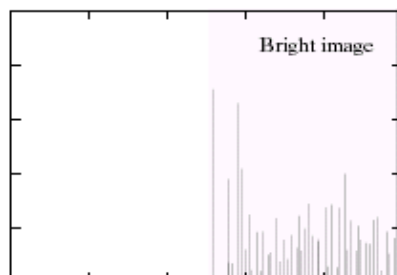
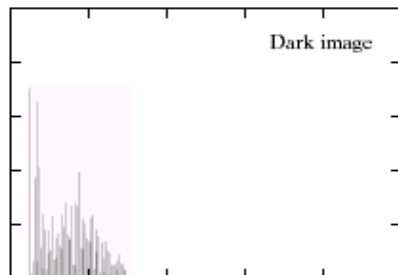
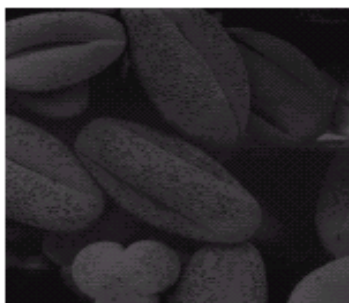


直方图



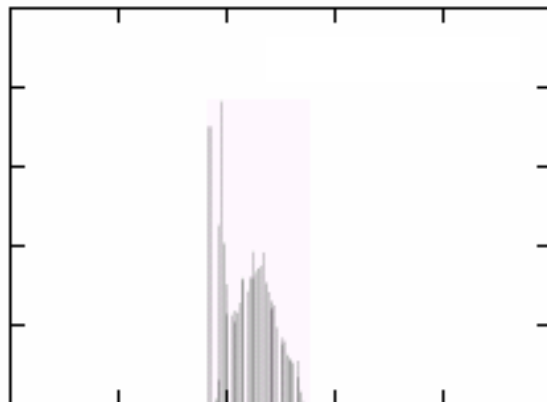
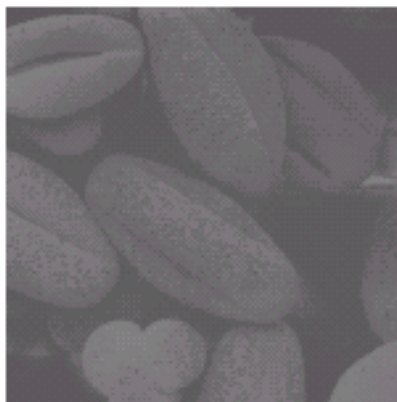
灰度直方图

- 低对比度图像的灰度级较窄
- 高对比度图像中直方图分量覆盖了很宽的灰度级范围
- 像素占据整个灰度级范围且均匀分布的图像，具有高对比度的外观和多种灰色调

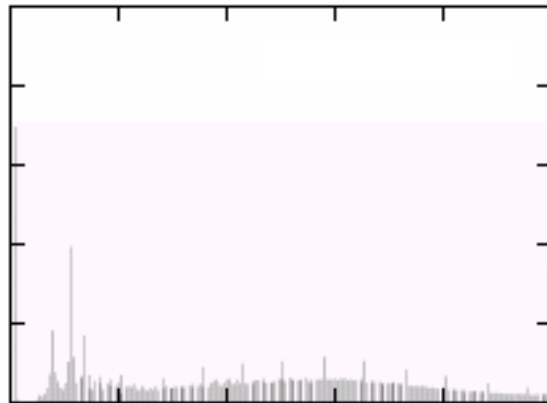


直方图修正

- 通过修改直方图可以达到增强图象的对比度、使感兴趣的部分看得更清楚



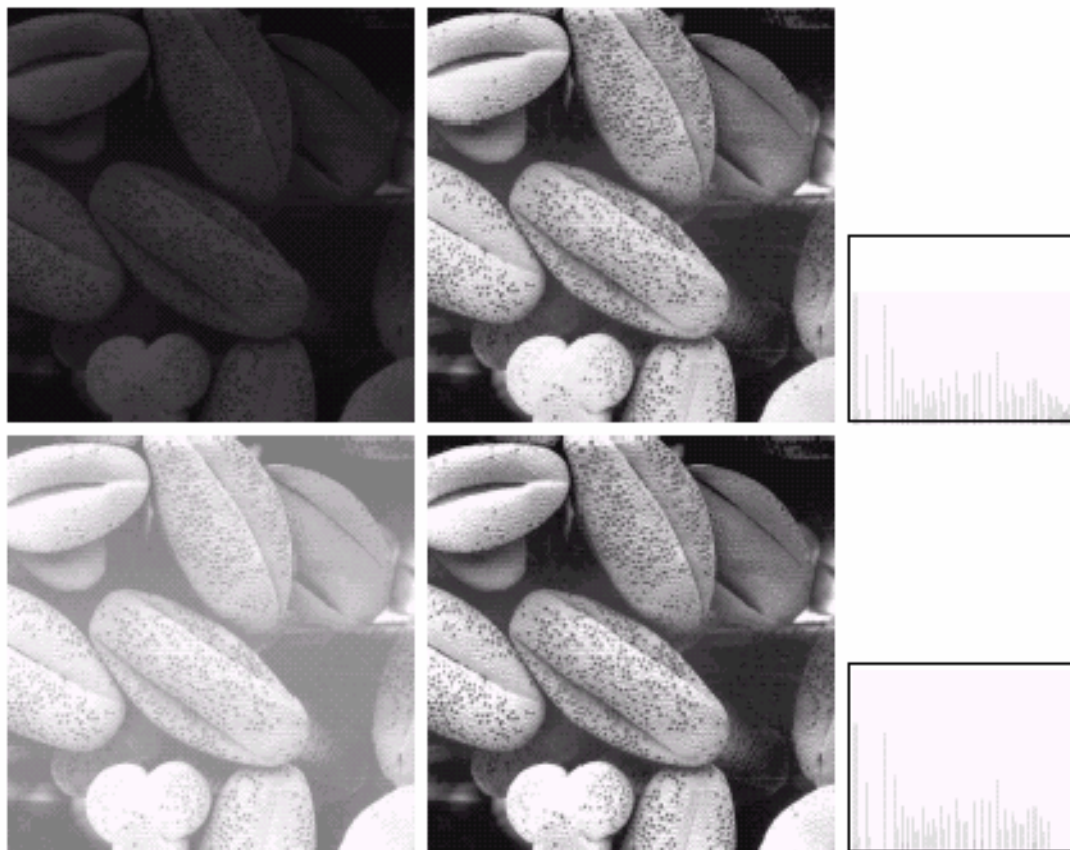
低对比度



高对比度

直方图均衡

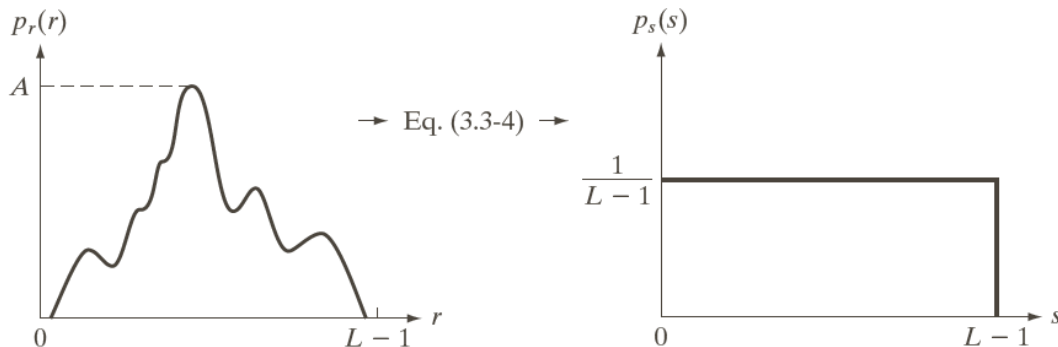
- 是基于直方图的灰度变换中一种处理方法
- 通常用直方图拉伸来执行直方图均衡处理



直方图均衡

□ 直方图均衡化定义

- 输入图像灰度概率密度函数为 $p_r(r)$ ，进行灰度变换 $s = T(r)$ ，使得
 - ✓ (i) 若变换前灰度 $r_1 < r_2$ ，要求 $s_1 < s_2$ (**保序变换**)
 - ✓ (ii) 变换后的灰度直方图 $p_s(s)$ 为均匀分布
- 为满足上述条件(i)，有 $\int_0^r p_r(w)dw = \int_0^s p_s(w)dw$
- 为满足上述条件(ii)，有 $\int_0^s p_s(w)dw = \frac{s}{L-1}$
- 综上，可得： $s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w)dw$

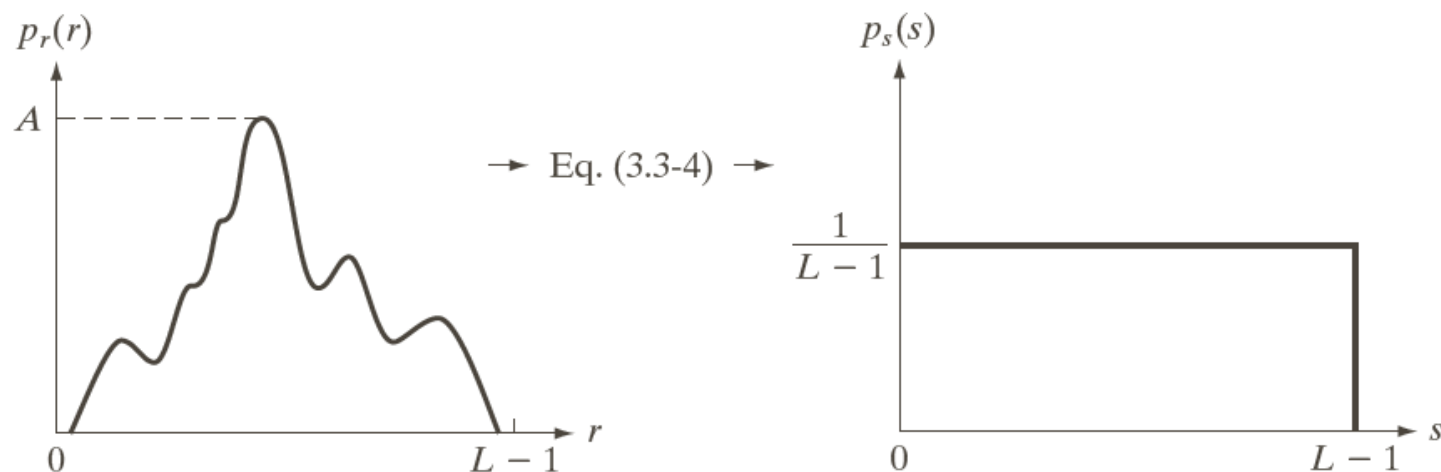


直方图均衡

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dr} = (L - 1) p_r(r)$$

由莱布尼茨准则,

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1) p_r(r)} \right| = \frac{1}{L - 1}, \quad 0 \leq s \leq L - 1$$



a b

FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels, r . The resulting intensities, s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.



直方图匹配（直方图规定化）

- 借助直方图变换实现规定/特定的灰度映射

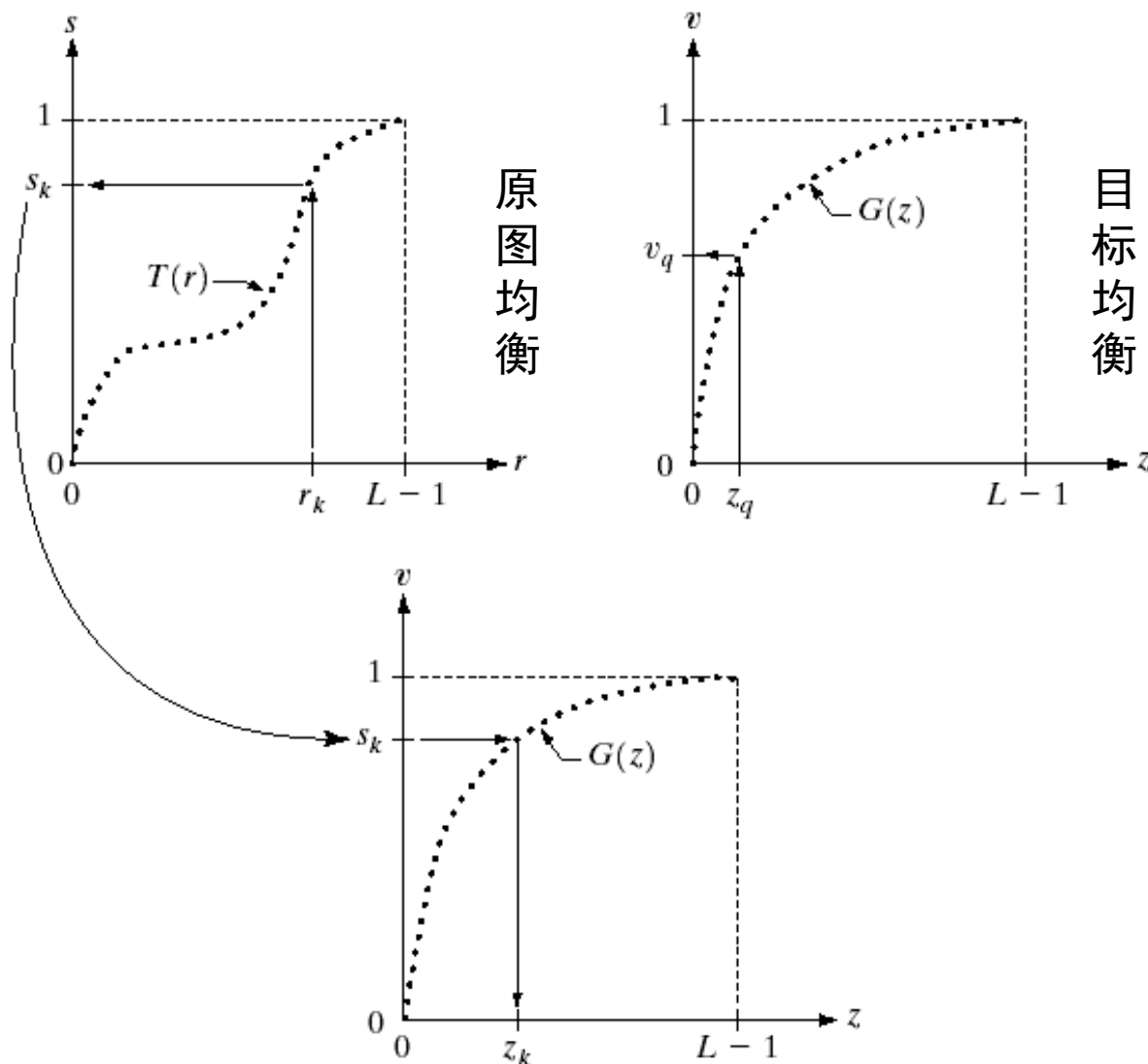
- 方法：
 - 对原始直方图进行灰度均衡化
 - 规定需要的直方图，计算能使规定直方图均衡化的变换
 - 将原始直方图对应映射到规定直方图

直方图匹配 (直方图规定化)

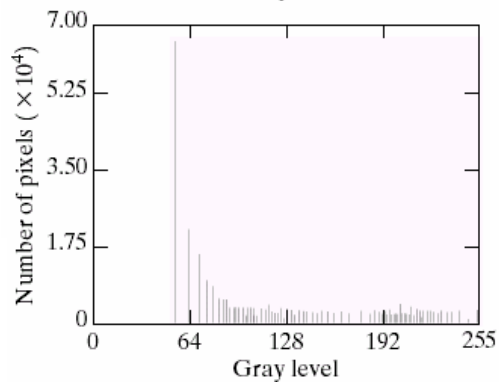
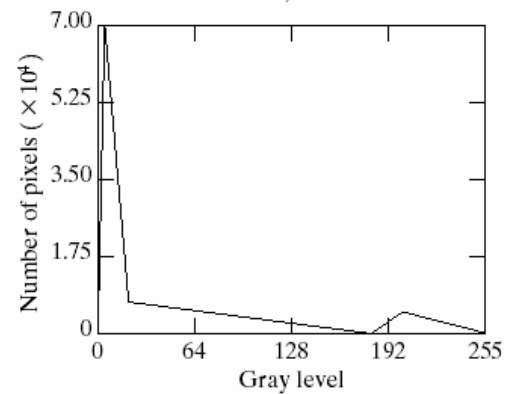
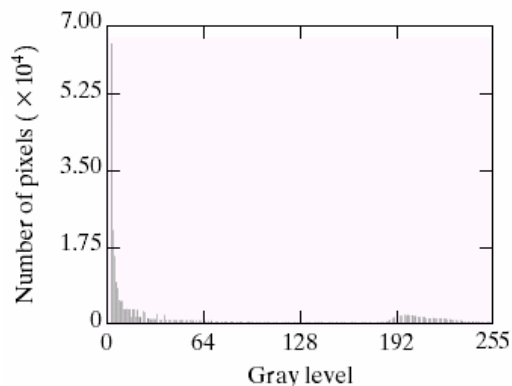
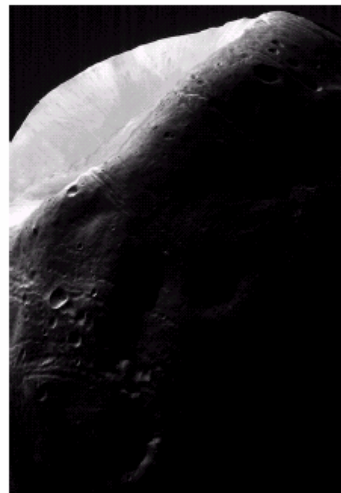
a b
c

FIGURE 3.19

(a) Graphical interpretation of mapping from r_k to s_k via $T(r)$.
 (b) Mapping of z_q to its corresponding value v_q via $G(z)$.
 (c) Inverse mapping from s_k to its corresponding value of z_k .



直方图匹配



原图

原图
直方图

匹配目标
直方图

处理后
图像

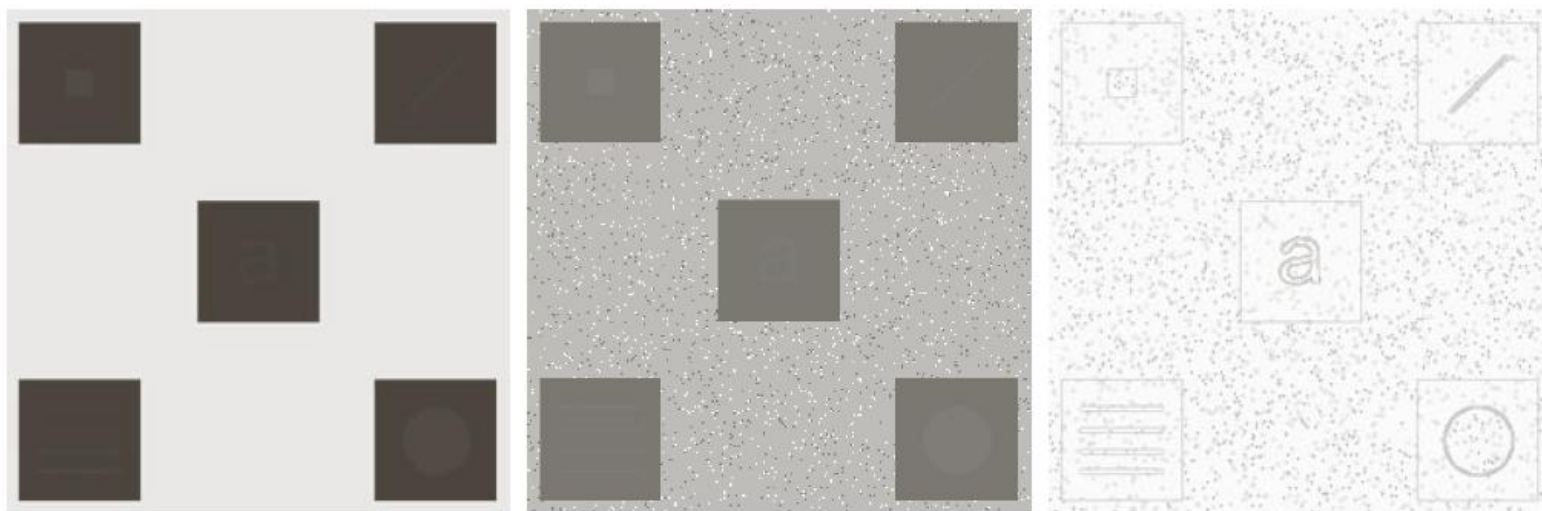
处理后
直方图

直方图均衡 vs. 直方图匹配

- 直方图均衡：
 - 自动增强
 - 效果不易控制
 - 总得到全图增强的结果
- 直方图匹配：
 - 有选择地增强
 - 须给定需要的直方图
 - 可特定增强的结果
- 直方图均衡可以看作是匹配直方图为**均匀分布**的直方图匹配

局部直方图处理

- 图像局部邻域的直方图均衡化：统计局部区域的直方图，然后再进行直方图均衡



a b c

FIGURE 3.26 (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization applied to (a), using a neighborhood of size 3×3 .



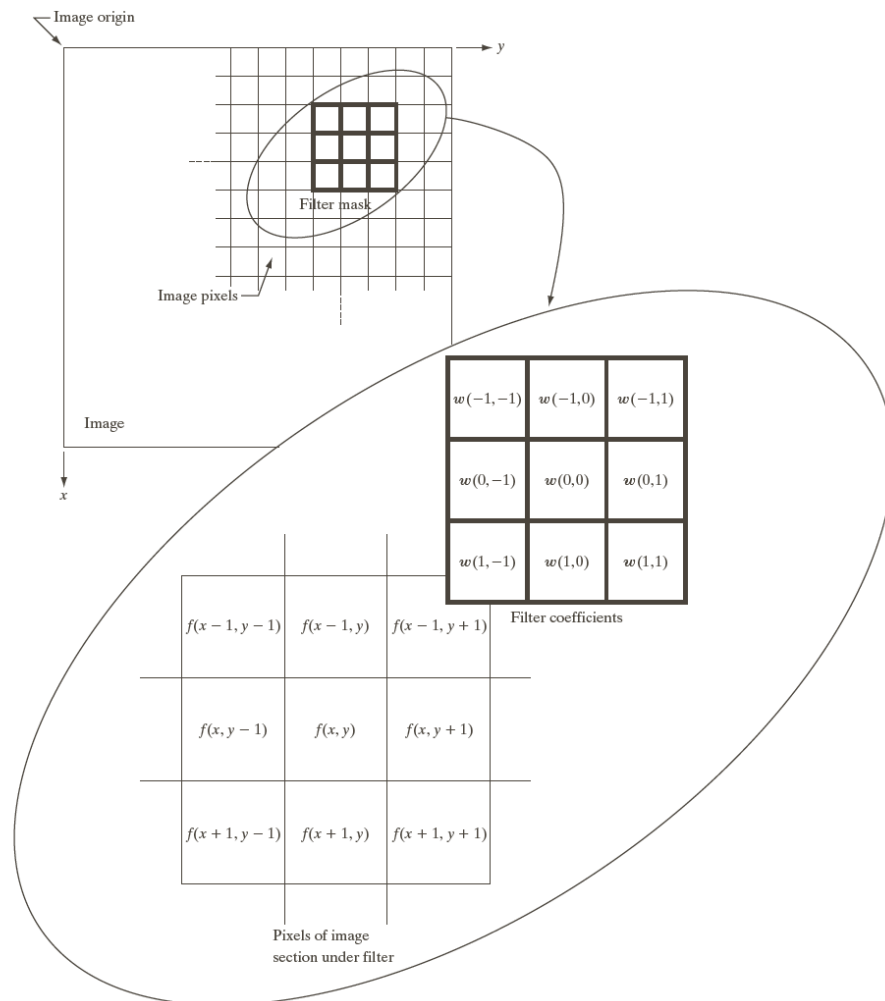
灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化

空域滤波机制

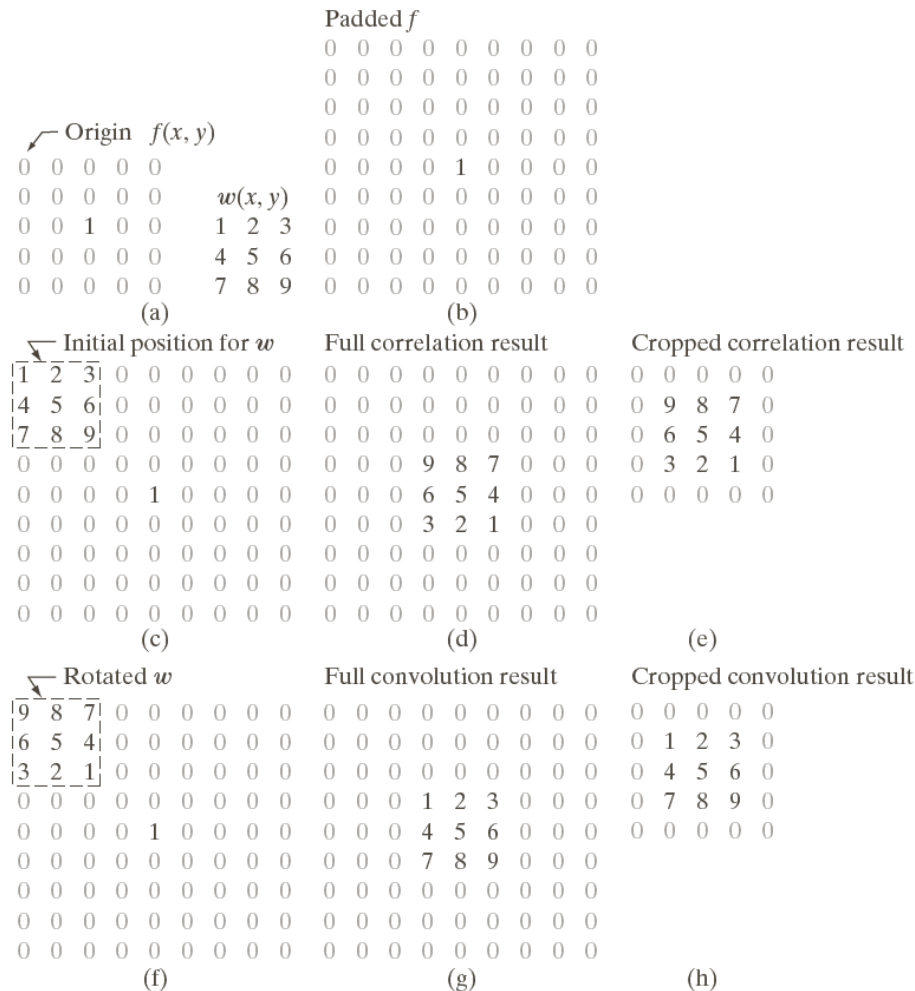
$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) \cdot f(x + s, y + t)$$

相关 vs. 卷积：卷积运算需要对卷积核进行反转操作，而相关不需要。



空间相关与卷积：二维情况

FIGURE 3.30
Correlation
(middle row) and
convolution (last
row) of a 2-D
filter with a 2-D
discrete, unit
impulse. The 0s
are shown in gray
to simplify visual
analysis.



相关运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

卷积运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

滤波器的向量表示与模板生成

- 当关注相关或卷积的响应特性时，可以将响应写为乘积的求和形式

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{MN} z_{MN} = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$$

- 等价于将二维滤波器按一维进行编号

- 空间滤波器的模板生成

- 滤波器的系数根据其支持怎么样的操作来选择
- **线性滤波**的作用是实现乘积求和操作：加权求和

$$w_{mn} = \frac{1}{MN} \quad w_{mn} = \exp \left(- \frac{\left(m - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \right)^2 + \left(n - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right)^2}{2\sigma^2} \right)$$

- **非线性滤波**要求确定邻域大小，以及对包含在邻域内的图像像素执行的操作



灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化

平滑滤波器

□ 局部平均滤波器

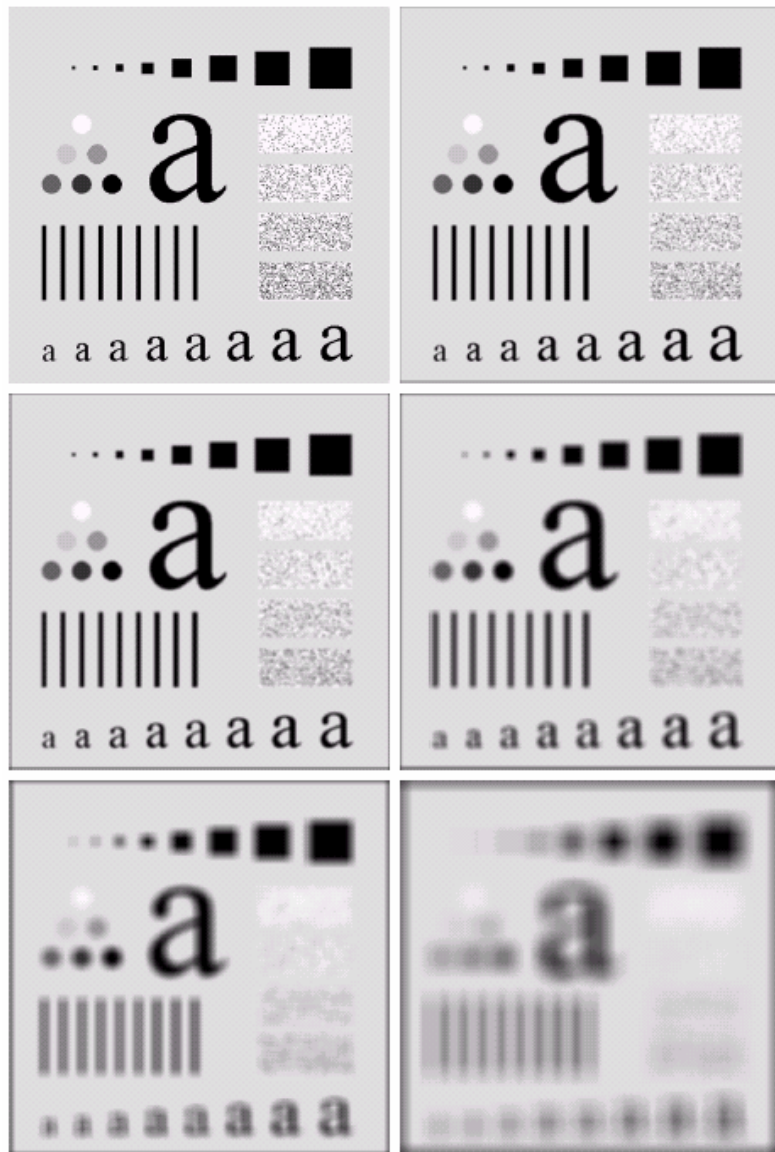
- 局部平均滤波器用某像素邻域内的各点灰度的平均值来代替该像素原来的灰度值

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

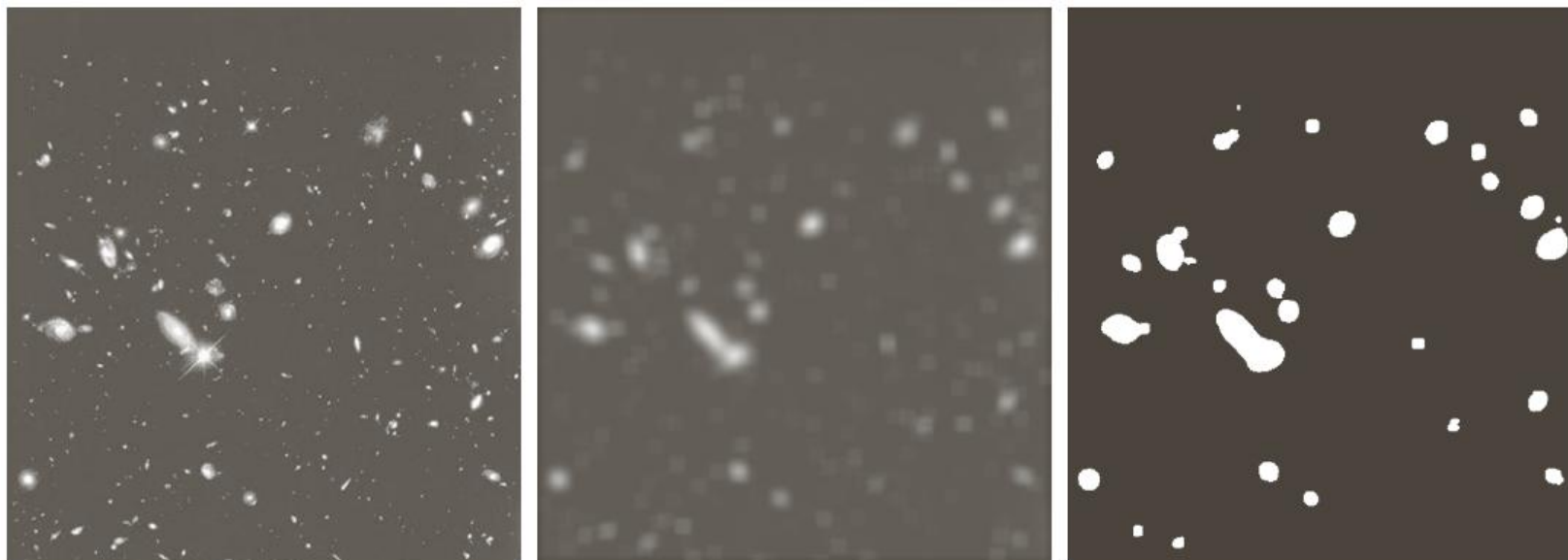
$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

图像平滑



| | |
|----------------|----------------|
| 原图 | n=3 方形均值滤波 |
| n=5 方形均值滤波 | n=9 方形均值滤波 |
| n=15 方形均值滤波 | n=35 方形均值滤波 |

图像平滑



a b c

FIGURE 3.34 (a) Image of size 528×485 pixels from the Hubble Space Telescope. (b) Image filtered with a 15×15 averaging mask. (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of NASA.)

统计排序滤波器

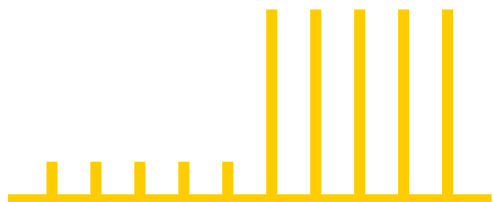
□ 中值滤波

- 用局部邻域（窗口）里的中值来代替上述局部平均法中的局部平均值。即将以该点为中心的某个窗口框住的各像素的中间值作为处理后图象中该点像素的值。
- 二维中值滤波的概念是一维的推广
- 以一维为例：
 - ✓ 奇数窗口中五点的值为 88、95、230、110、120，按大小重排这五个值得 88、95、110、120、230，其位于中间位置上的“中值”是110。
 - ✓ 实际应用：家庭收入统计（中位数）

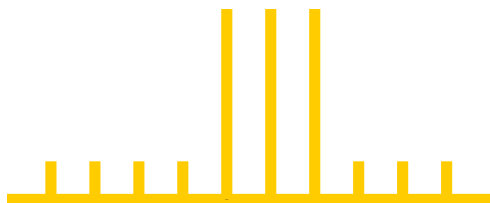
□ 其他统计排序滤波器

- 最大值滤波器，最小值滤波器

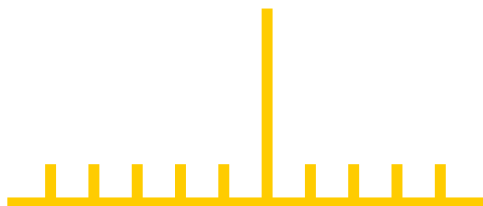
中值滤波保留边缘的性能



阶跃信号

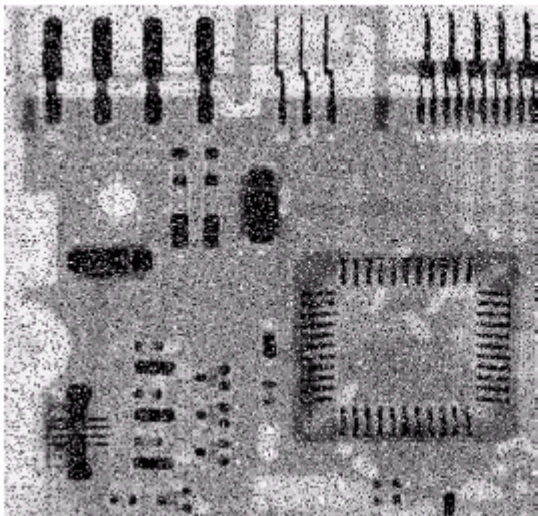


脉冲信号

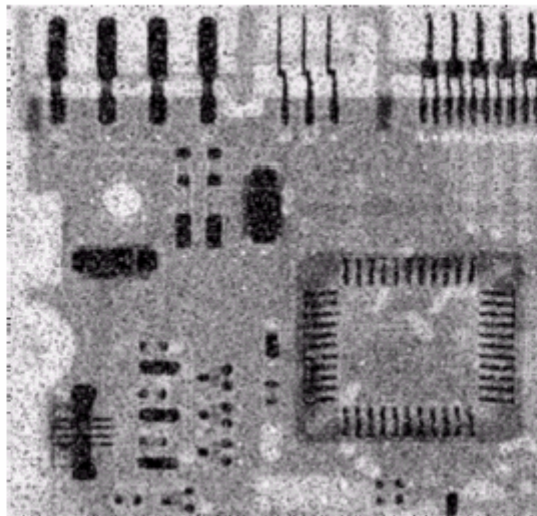


噪声

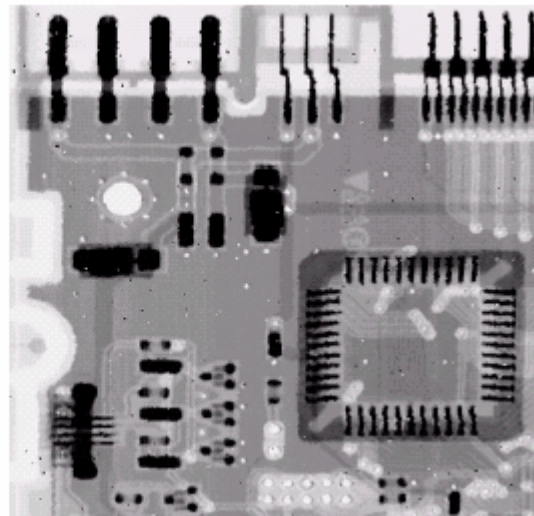
中值滤波



椒盐噪声污染的
电路板X光图像



3*3均值掩模去除噪声



3*3中值滤波器去除噪声

去除椒盐噪声使用自适应中值滤波器的效果会更好一些，
详情参见《数字图像处理》（冈萨雷斯）

保边滤波器

- 在滤波过程中能尽可能保留图像中的边缘信息，同时达到平滑的目的
- 保边滤波器在图像不同位置的权重将不再一致，以此达到在图像平缓区域进行平滑，同时在图像边缘区域保留边缘信息的目的。

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$



$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

- 代表性方法
 - 双边滤波，导向滤波

双边滤波器

□ 顾名思义，双边滤波器同时考虑滤波过程中由两方面因素带来的影响

■ 像素相对位置的影响：距离越远，对应权重越小

$$w_d(s, t) = \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2}\right)$$

■ 像素值的影响：相差越小，越不可能为边缘，对应权重越大

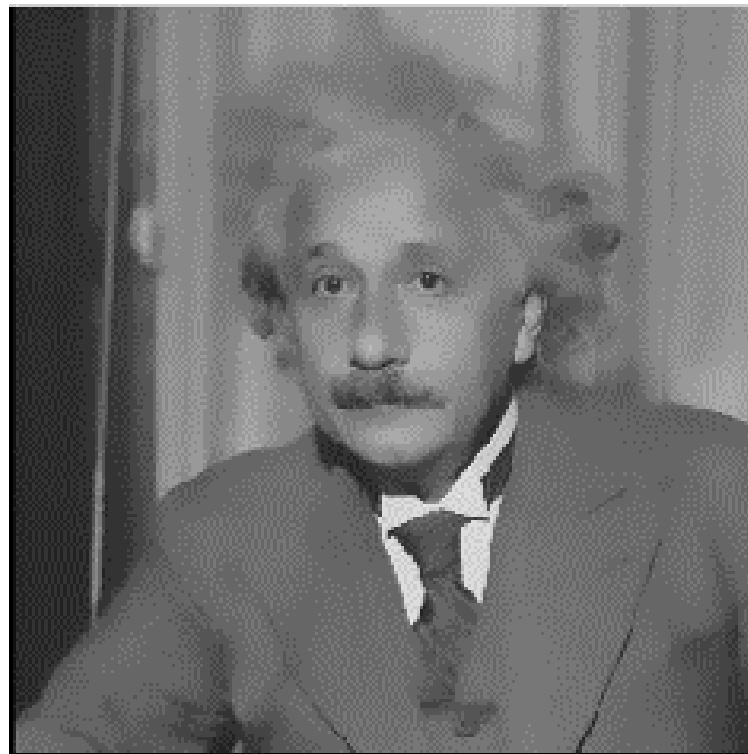
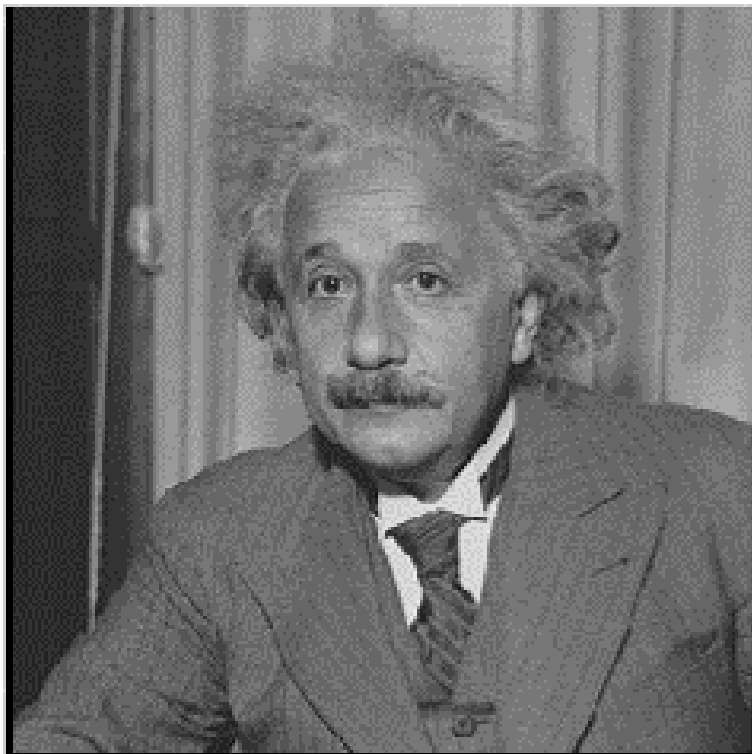
$$w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right)$$

■ 双边滤波器的权重将由两部分权重共同决定：

$$\begin{aligned} w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= w_d(s, t) * w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right) \end{aligned}$$

双边滤波器

□ 双边滤波器的滤波效果



导向滤波

□ 利用引导图像对图像滤波进行指导

输入：待滤波图像 p ，引导图像 I

我们定义一个这样的滤波过程：

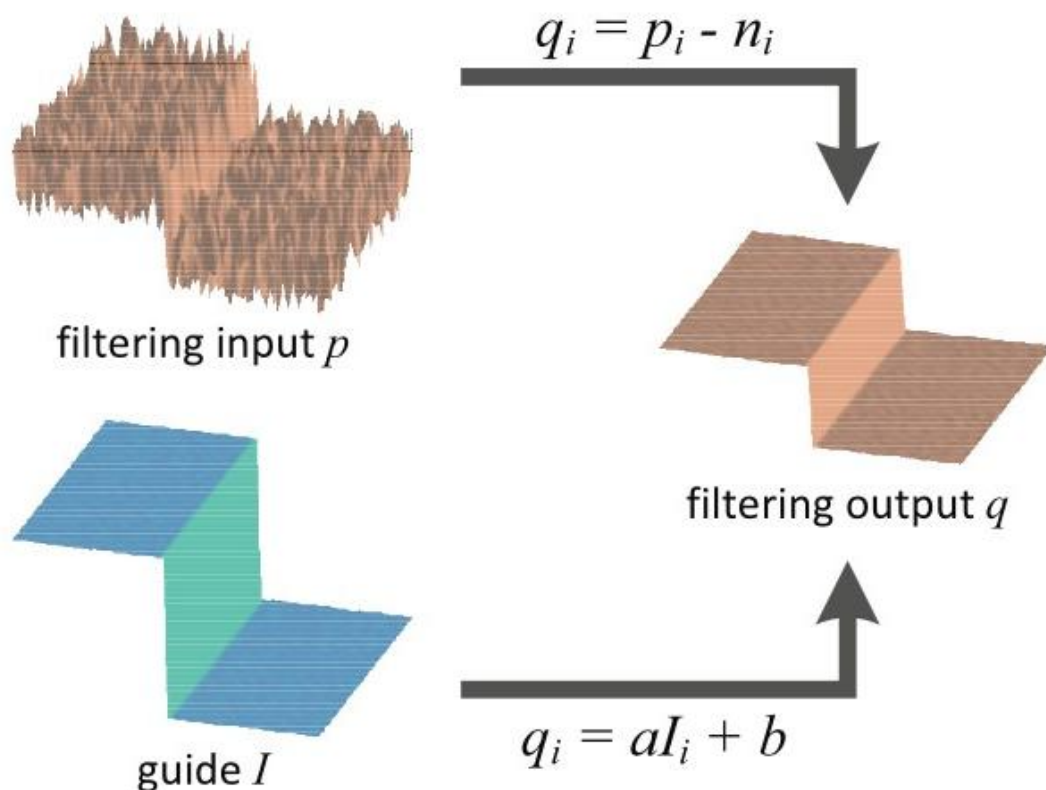
$$q_i = \sum_{j \in w_i} w_{ij}(I) p_j$$

其中 q 为滤波器输出，

i, j 为像素下标，

w_{ij} 是一个只和引导图像相关的线性滤波核

导向滤波



我们假设输出图像在一个窗口 w_k 内与引导图像有局部线性关系：

$$q_i = a_k I_i + b_k, \forall i \in w_k$$

对等式求导，我们可以看到输出图像的边缘可以得到保留：

$$\nabla q = a \nabla I$$

我们的输出图像则应为输入图像去除图中的噪声 n ：

$$q_i = p_i - n_i$$

对于每一个滤波窗口，我们的目标就是最小化这个噪声：

$$\operatorname{argmin} \sum_{i \in w_k} (q_i - p_i)^2$$

导向滤波

我们引入一个正则化参数 ε 避免 a_k 过大:

$$E(a_k, b_k) = \sum_{i \in w_k} ((a_k I_i + b_k - p_i)^2 + \varepsilon a_k^2)$$

对参数求偏导并令其为零, 解得:

$$a_k = \frac{\frac{1}{|w|} \sum_{i \in w_k} I_i p_i - \mu_k \bar{p}_k}{\sigma_k^2 + \varepsilon}, \quad b_k = \bar{p}_k - a_k \mu_k$$

其中 μ_k , σ_k^2 表示引导图像 I 在窗口 w_k 中的均值和方差, $|w|$ 表示窗口中像素的个数, \bar{p}_k 是输入图像 p 在窗口中的平均值。

由于每一个像素都处于多个窗口中, 我们将得到的所有结果取平均, 由此得到最后的结果:

$$q_i = \frac{1}{|w|} \sum_{k: i \in w_k} (a_k I_i + b_k) = \bar{a}_k I_i + \bar{b}_k$$

导向滤波

- 导向滤波的一个常用场景即将输入图像作为引导图像，此时方程的解变化为：

$$a_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \varepsilon}$$

$$b_k = (1 - a_k)\bar{p}_k$$

- 在平坦区域，方差较小，此时 $a_k \approx 0, b_k \approx \bar{p}_k$ ，相当于对该区域做均值滤波
- 在边缘区域，方差较大，此时 $a_k \approx 1, b_k \approx 0$ ，相当于在该区域保持原有图像



灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化

梯度算子

- ☐ Roberts算子
- ☐ Sobel算子
- ☐ Prewitt算子
- ☐ Kirsch算子

| | |
|----|---|
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |

| | |
|---|----|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |

| | | |
|----|----|----|
| -1 | -2 | -1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |

| | | |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -2 | 0 | 2 |
| -1 | 0 | 1 |

| | | |
|----|----|----|
| -1 | -1 | -1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| | | |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -1 | 0 | 1 |
| -1 | 0 | 1 |

| | | |
|----|----|----|
| 5 | 5 | 5 |
| -3 | 0 | -3 |
| -3 | -3 | -3 |

| | | |
|----|----|----|
| -3 | 5 | 5 |
| -3 | 0 | 5 |
| -3 | -3 | -3 |

梯度算子

原始图像



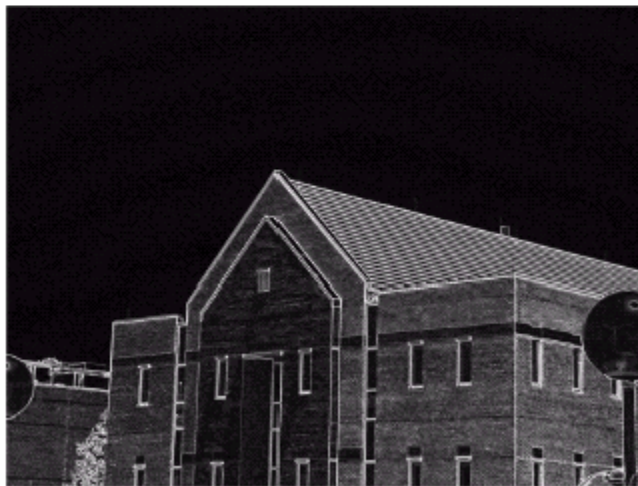
$|G_y|$



$|G_x|$



$|G_x| + |G_y|$



梯度算子

□ Sobel算子

- 微分算子对图像噪声敏感，低通滤波可抑制噪声
- Sobel算子（垂直方向）：等价于先在图像水平的方向上进行低通滤波，然后在垂直的方向上做中心差分

| | | |
|----|----|----|
| -1 | -2 | -1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |

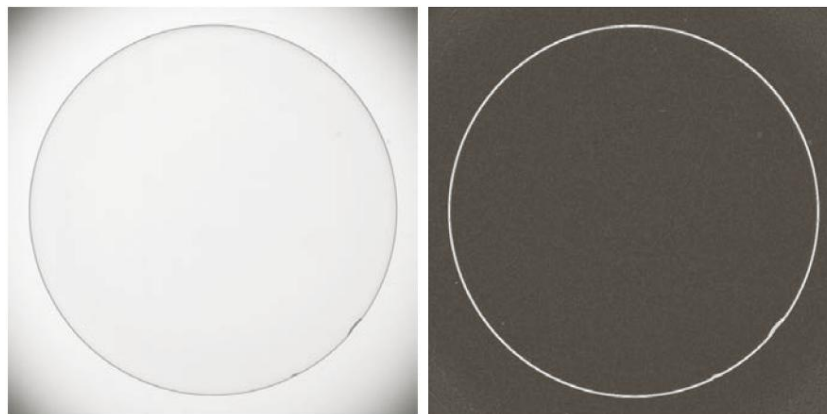
Sobel算子（垂直方向）

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

低通滤波

| | | |
|---|----|---|
| 0 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |

中心差分



a b

FIGURE 3.42

(a) Optical image of contact lens (note defects on the boundary at 4 and 5 o'clock).
(b) Sobel gradient.
(Original image courtesy of Pete Sites, Perceptics Corporation.)

拉普拉斯算子

□ 一个二元图像函数 $f(x, y)$ 的拉普拉斯变换定义为:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

□ 几种常用的拉普拉斯算子:

| | | |
|---|----|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | -4 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

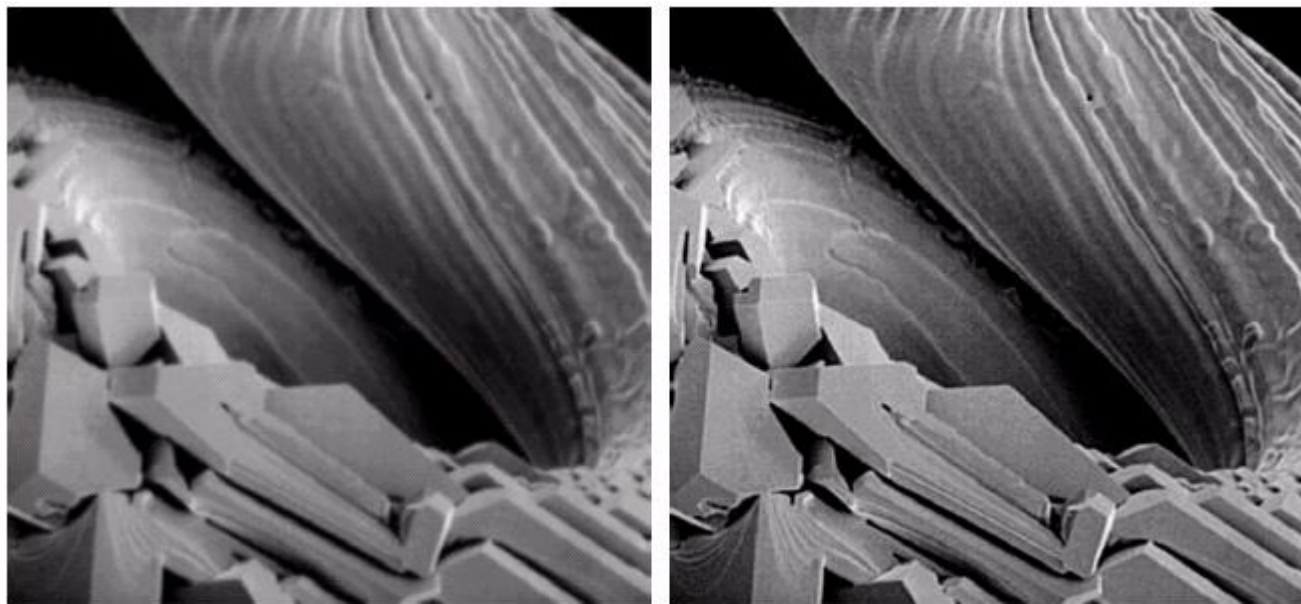
| | | |
|---|----|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | -8 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| | | |
|----|----|----|
| 0 | -1 | 0 |
| -1 | 4 | -1 |
| 0 | -1 | 0 |

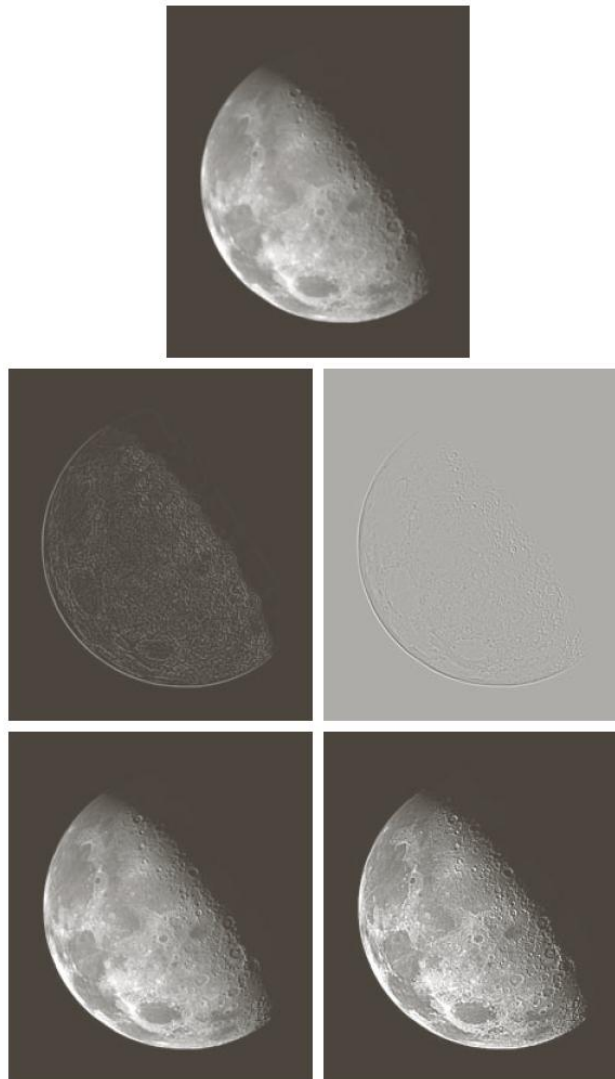
| | | |
|----|----|----|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | 8 | -1 |
| -1 | -1 | -1 |

使用拉普拉斯算子进行图像增强

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为负} \\ f(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为正} \end{cases}$$



使用拉普拉斯算子进行图像增强



a
b c
d e

FIGURE 3.38

(a) Blurred image of the North Pole of the moon.

(b) Laplacian without scaling.

(c) Laplacian with scaling.

(d) Image sharpened using the mask in Fig. 3.37(a).

(e) Result of using the mask in Fig. 3.37(b).

(Original image courtesy of NASA.)

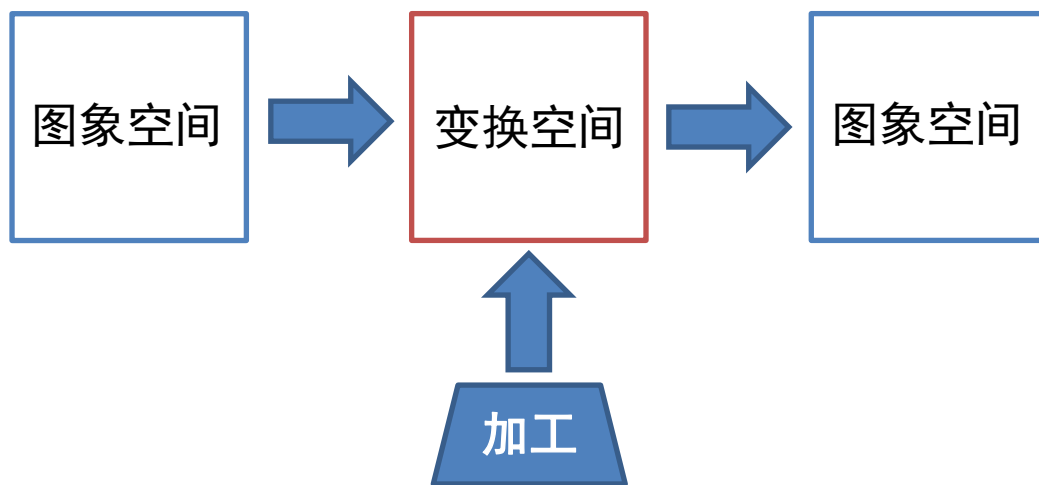


图像处理

- ☐ 灰度变换与空域滤波
- ☐ 图像频域滤波
- ☐ 维纳滤波

图像频域滤波

- 为了有效和快速地对图象进行处理，常常需要将原定义在图象空间的图象以某种形式转换到另外一些空间（频率域空间）并加工，最后再转换回图象空间以得到所需的效果。





离散傅立叶变换(DFT)

二维DFT及其反变换

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

功率谱:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

可以证明:

$$\text{DFT}[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$

即将原始图像乘以 $(-1)^{x+y}$ 可以将傅里叶变换的原点移到 $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ 上

幅度（傅里叶谱或频谱）： $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}}$

相位： $\phi(u, v) = \arctan[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}]$

直流分量： $F(0, 0) = MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN\bar{f}$ ，其中 \bar{f} 为图像的平均灰度

频率域滤波基础

频率域滤波的基本步骤:

1. 乘以 $(-1)^{x+y}$
2. DFT
3. $H(u, v) \times F(u, v)$
4. IDFT
5. 取实部
6. 乘以 $(-1)^{x+y}$

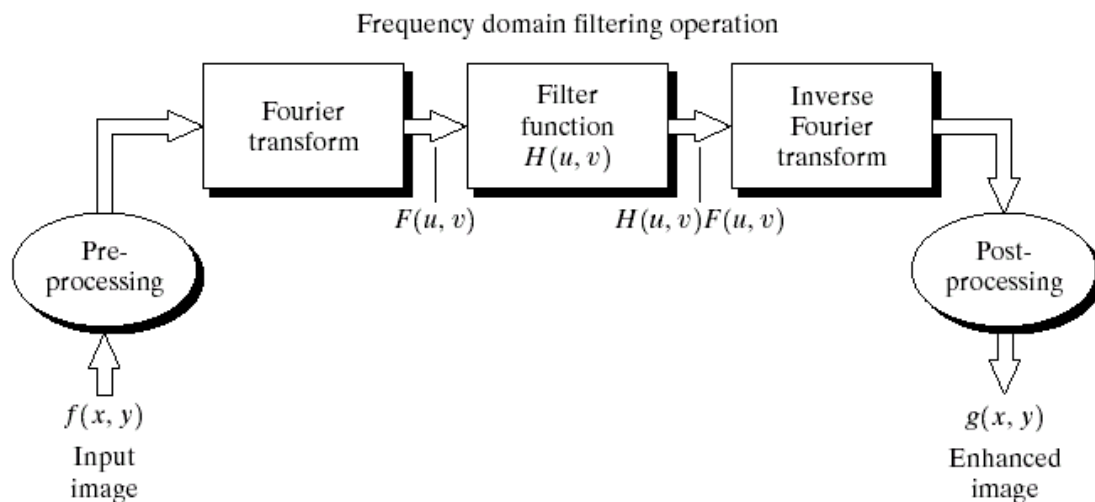


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$
$$g(x, y) = IDFT[H(u, v)F(u, v)]$$



图像频域滤波

□ 背景知识

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 频率域滤波基础

□ 图像的频域滤波

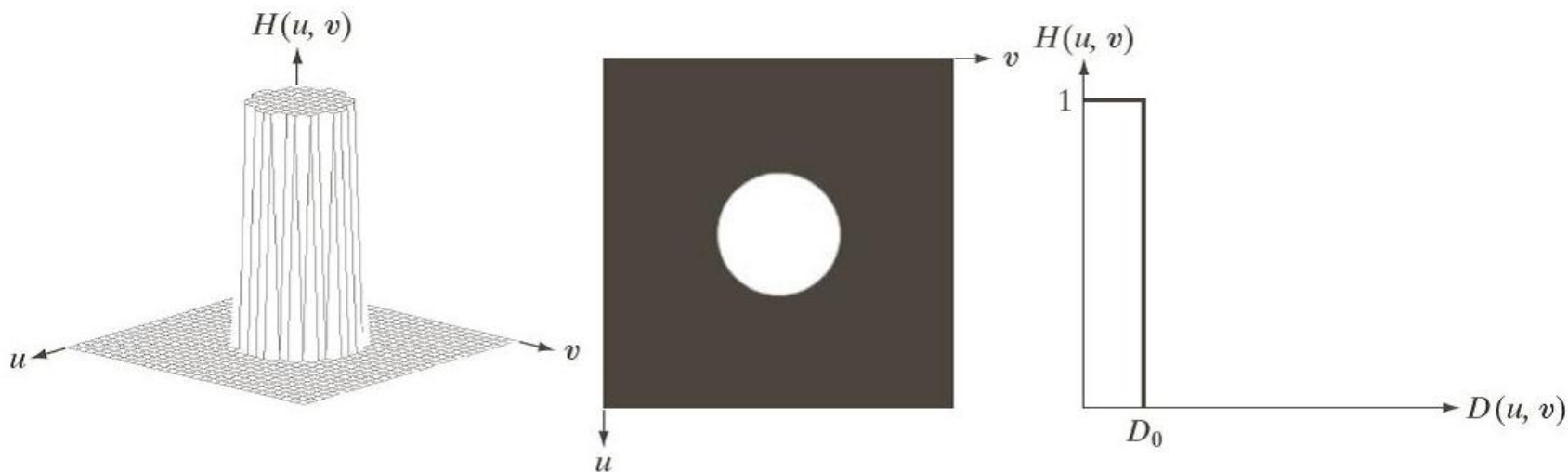
- 频率域滤波器平滑图像
- 频率域滤波器锐化图像

频率域滤波平滑

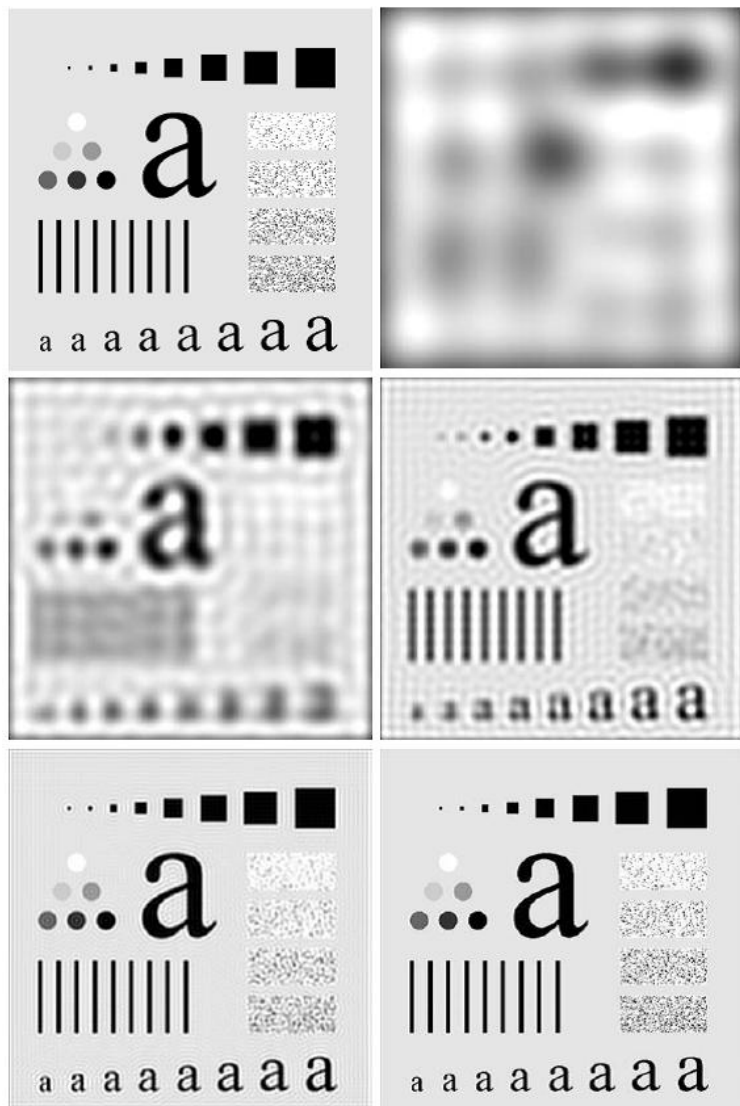
理想低通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中, $D(u, v)$ 是频率域中点 (u, v) 与频率矩形中心的距离



理想低通滤波器示例

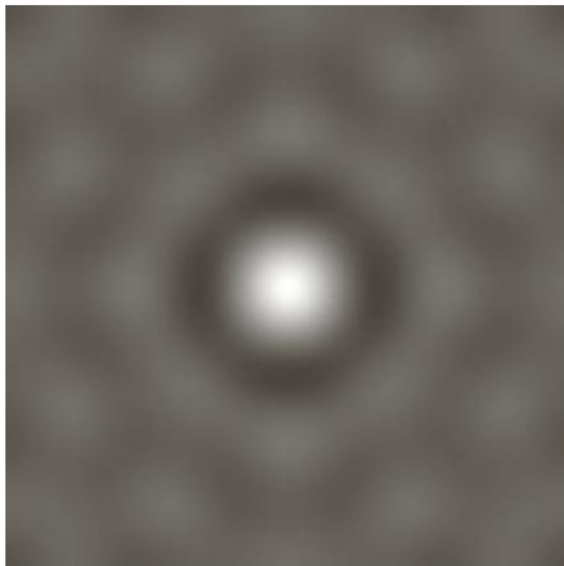


a b
c d
e f

(a) 原图
(b)-(f) 使用理想低通滤波器，截止频率设置10,30,60,160和460。这些滤波器移除的功率分别为总功率的13%，6.9%，4.3%，2.2%和0.8%。

(c)(d): 振铃效应

振铃效应解释



a b

FIGURE 4.43

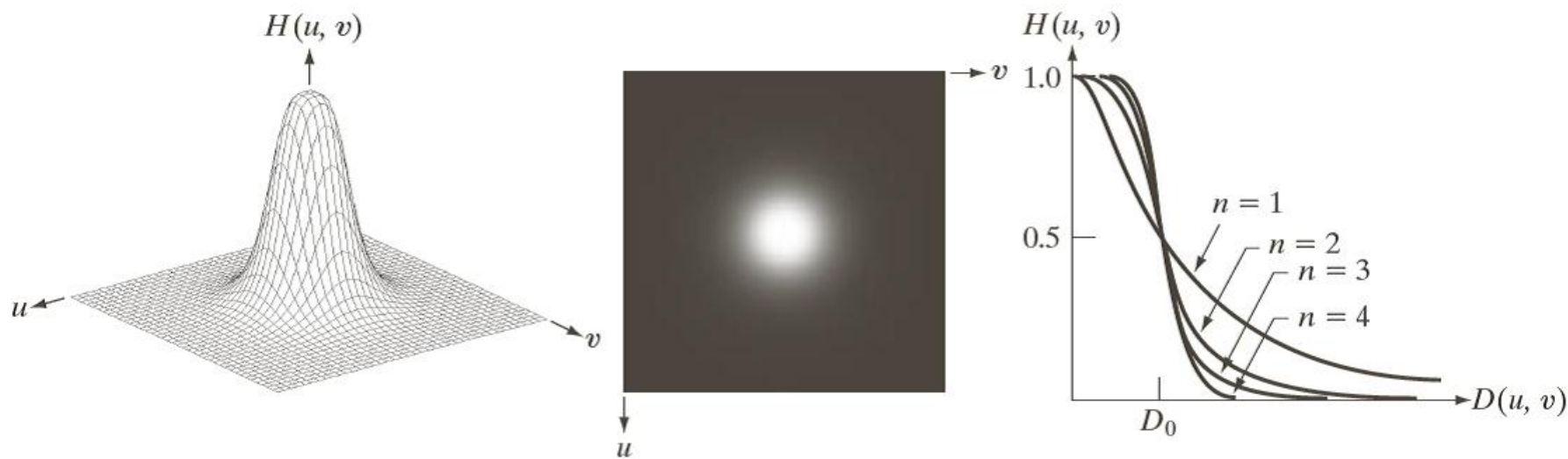
(a) Representation in the spatial domain of an ILPF of radius 5 and size 1000×1000 .

(b) Intensity profile of a horizontal line passing through the center of the image.

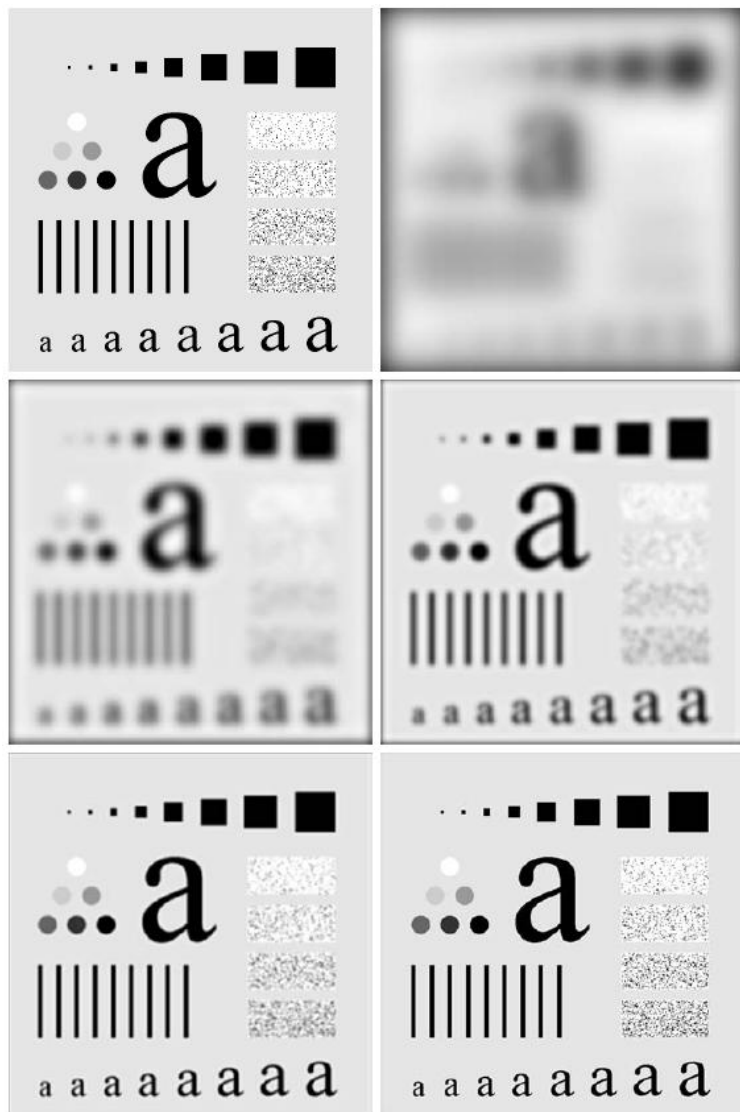
频率域滤波平滑

n 阶布特沃斯低通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$



布特沃斯滤波器示例



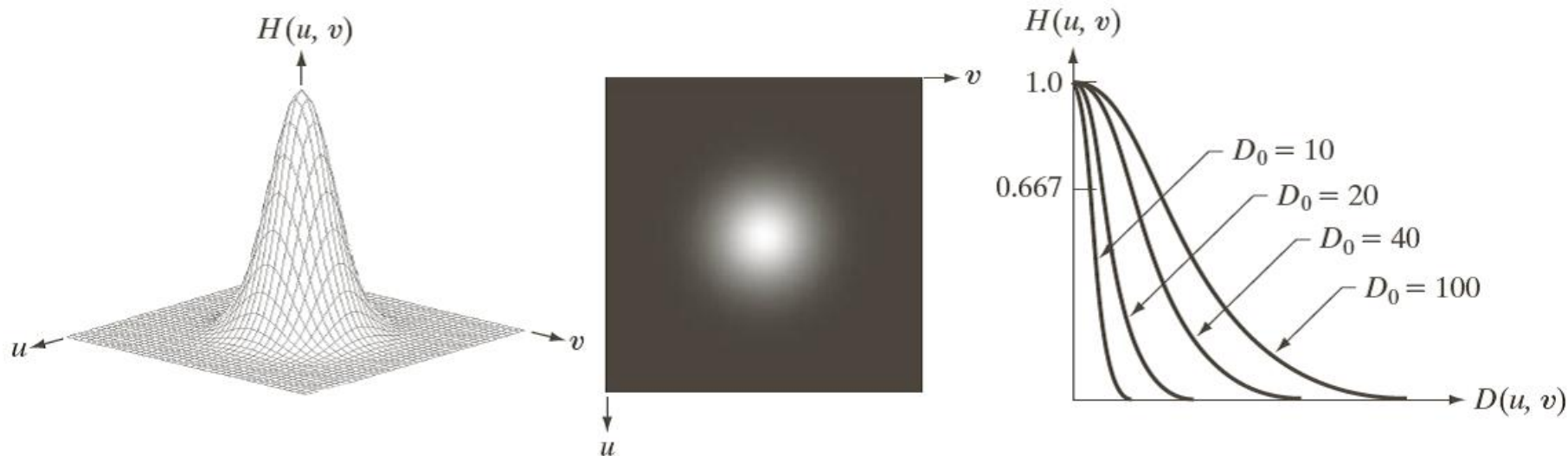
a b
c d
e f

(a) 原图
(b)-(f) 使用二阶布特沃斯低通滤波器的结果，截止频率仍为10，30，60，160和460。

频率域滤波平滑

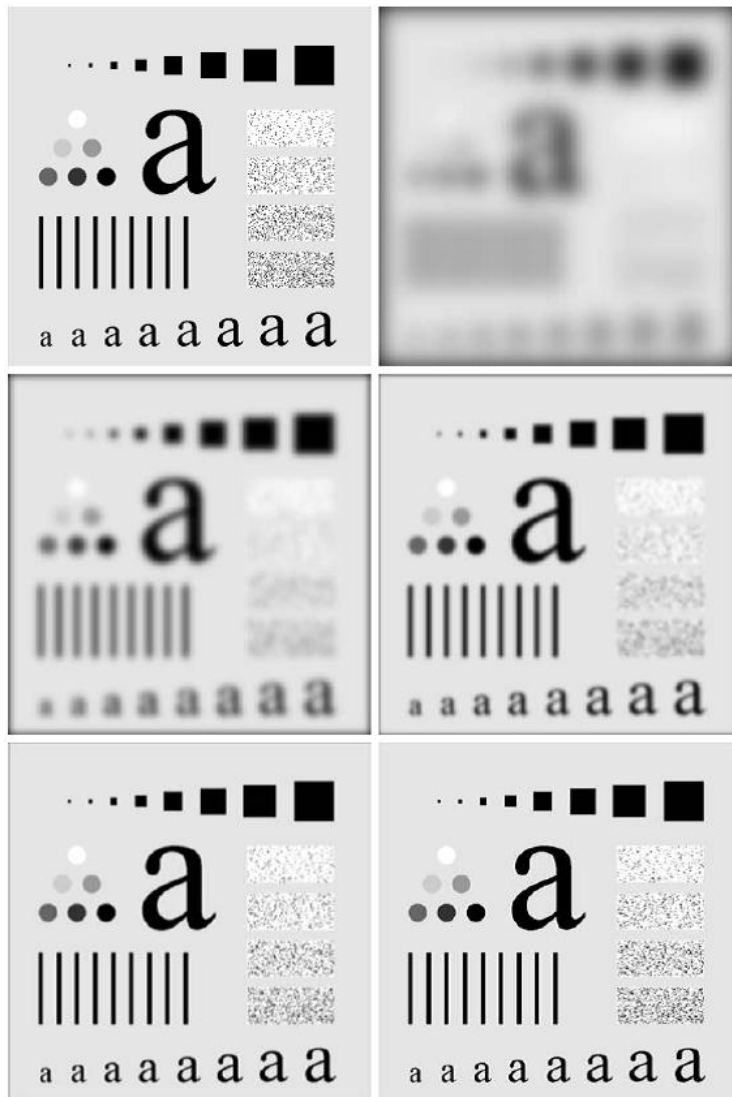
高斯低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



高斯低通滤波器（GLPF）的傅里叶反变换也是高斯的，因此通过上式的IDFT得到的空间高斯滤波器没有振铃。

高斯低通滤波器示例



a b
c d
e f

(a) 原图
(b)-(f) 使用高斯低通滤波器的结果，截止频率仍为10，30，60，160和460。

低通滤波的其他例子

□ 字符识别

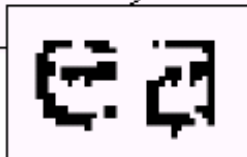
文字的断裂现象

a b

FIGURE 4.19

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



低通滤波的其他例子

□ 印刷和出版业

预处理，美化图像



a b c

FIGURE 4.20 (a) Original image (1028×732 pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 80$. Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

低通滤波的其他例子

□ 卫星和航空图像

下图：墨西哥湾和佛罗里达图像存在“扫描线”（用高斯低通来处理）



a b c

FIGURE 4.21 (a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with $D_0 = 30$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 10$. (Original image courtesy of NOAA.)



图像频域滤波

□ 背景知识

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 频率域滤波基础

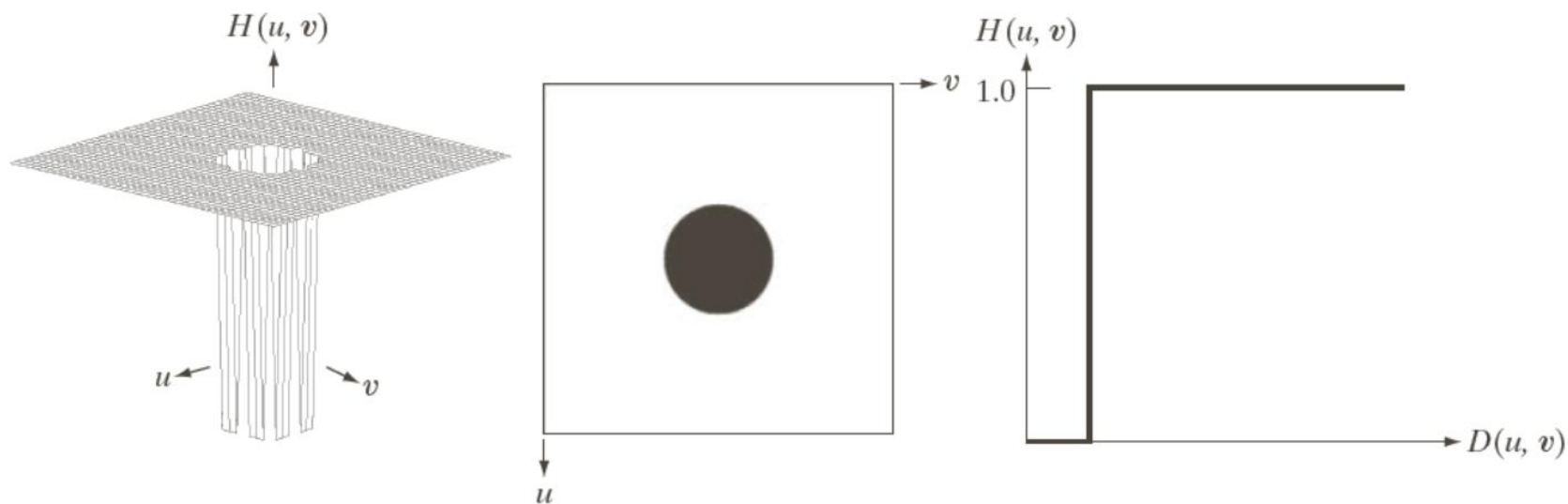
□ 图像的频域滤波

- 频率域滤波器平滑图像
- 频率域滤波器锐化图像

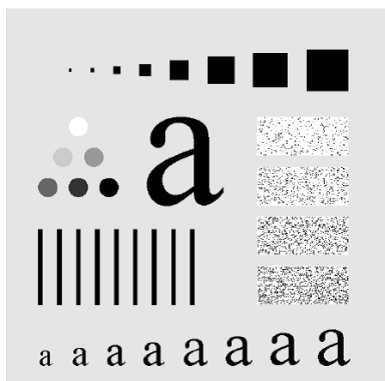
频率域滤波锐化

理想高通滤波器

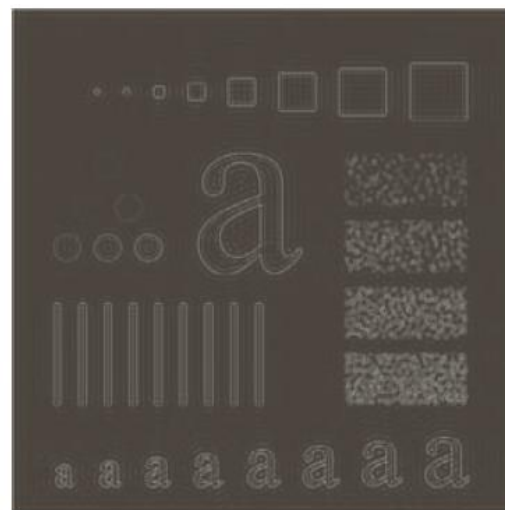
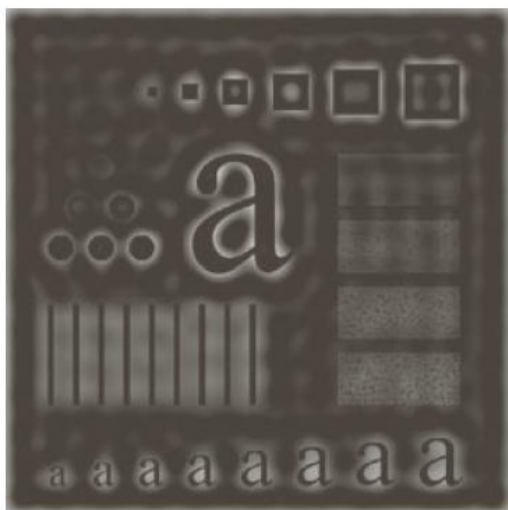
$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



理想高通滤波器示例



原图



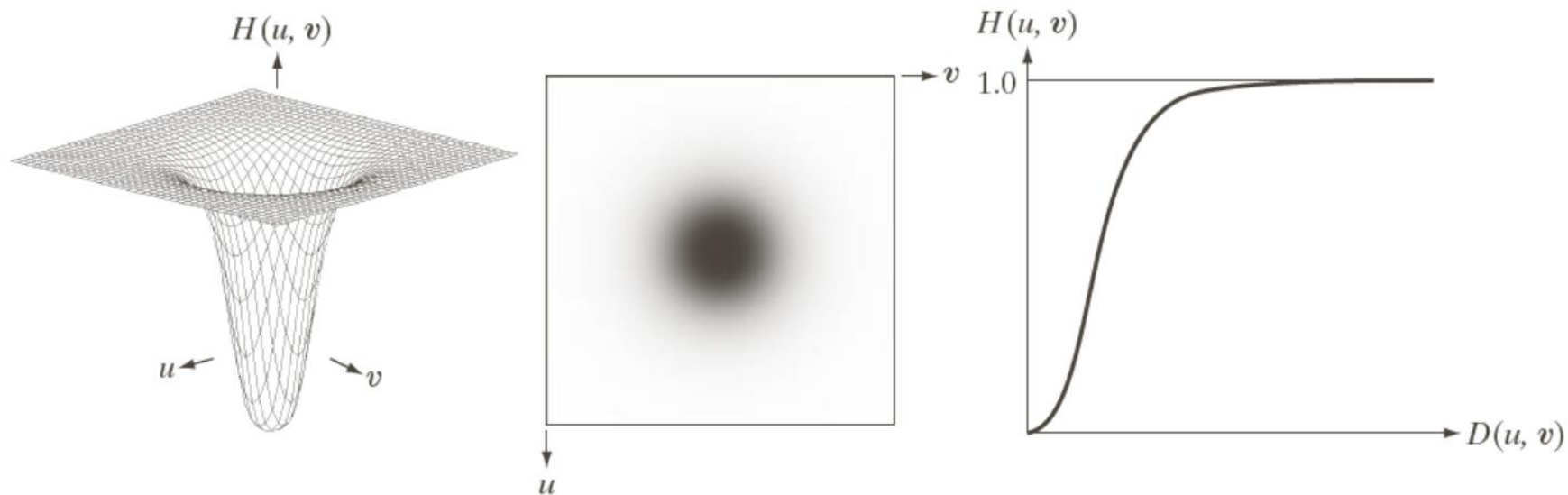
a b c

= 30, 60, 100 的理想高通滤波器结果

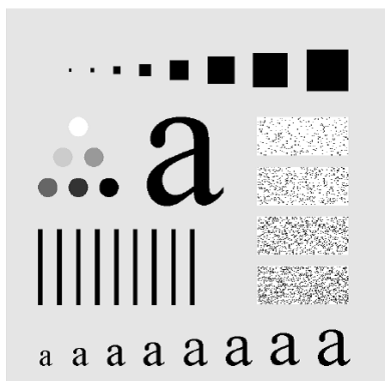
频率域滤波锐化

布特沃斯高通滤波器

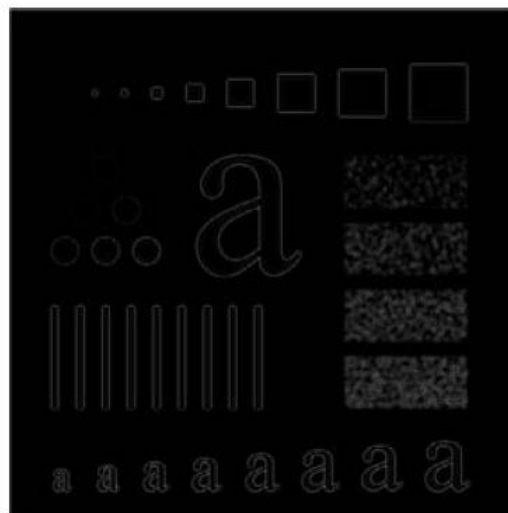
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}$$



布特沃斯高通滤波器示例



原图



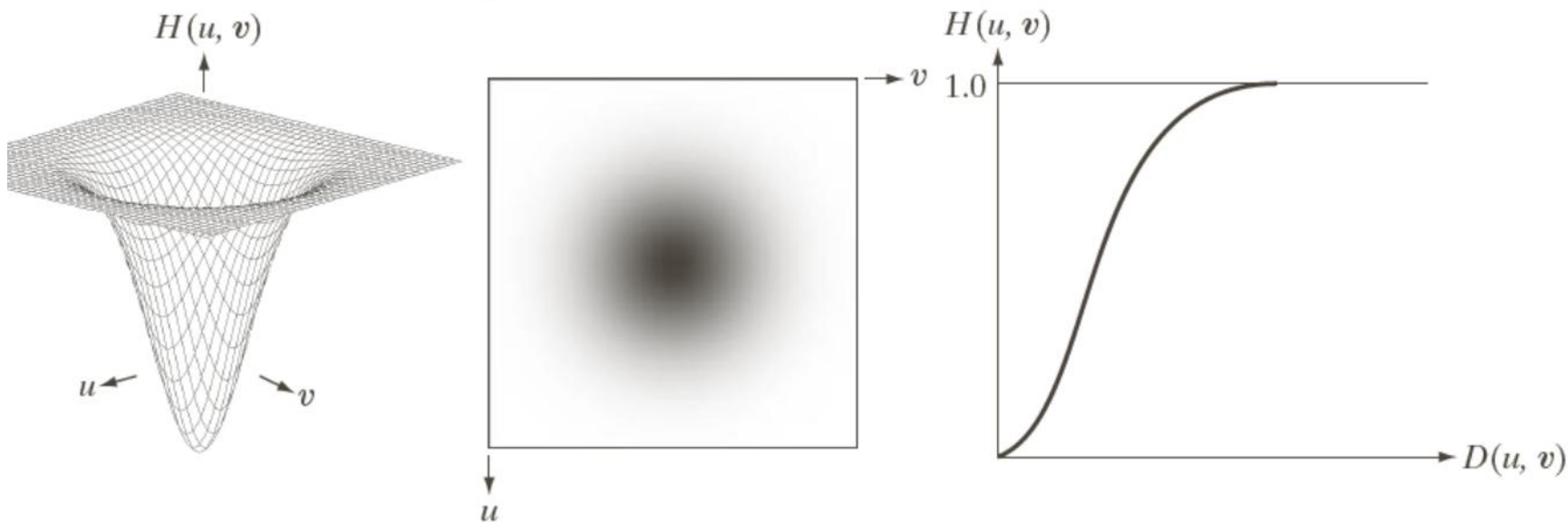
a b c

= 30, 60, 100 的2阶布特沃斯高通滤波器结果

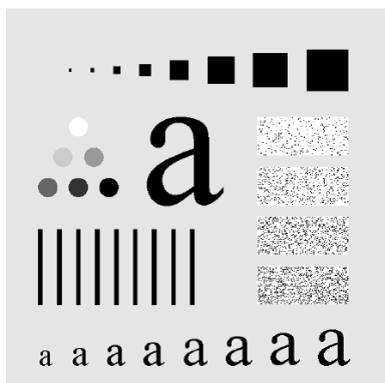
频率域滤波锐化

高斯高通滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



高斯高通滤波器示例



原图



a b c

= 30, 60, 100 的高斯高通滤波器结果

带阻滤波器

□ 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{if } D(u, v) \leq D_0 - \frac{W}{2} \\ 0, & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & \text{if } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

□ Butterworth带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) + D_0^2} \right]^{2n}}$$

□ 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v) + D_0^2}{2D(u, v)W}}$$

带阻滤波器

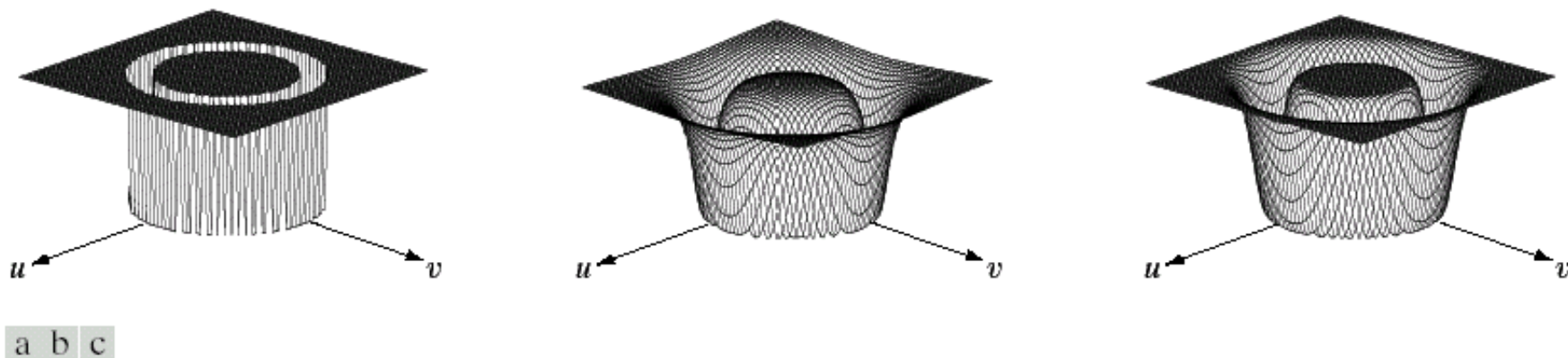
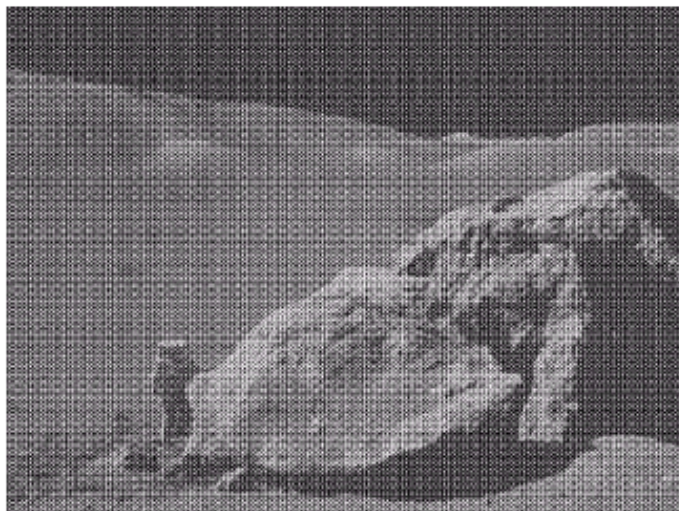


FIGURE 5.15 From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters.

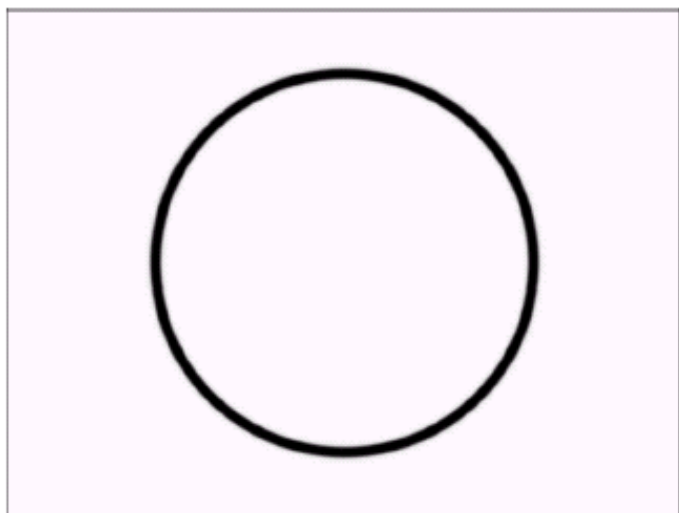
带阻滤波器



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

FIGURE 5.16

(a) Image corrupted by sinusoidal noise.
(b) Spectrum of (a).
(c) Butterworth bandreject filter (white represents 1).
(d) Result of filtering. (Original image courtesy of NASA.)

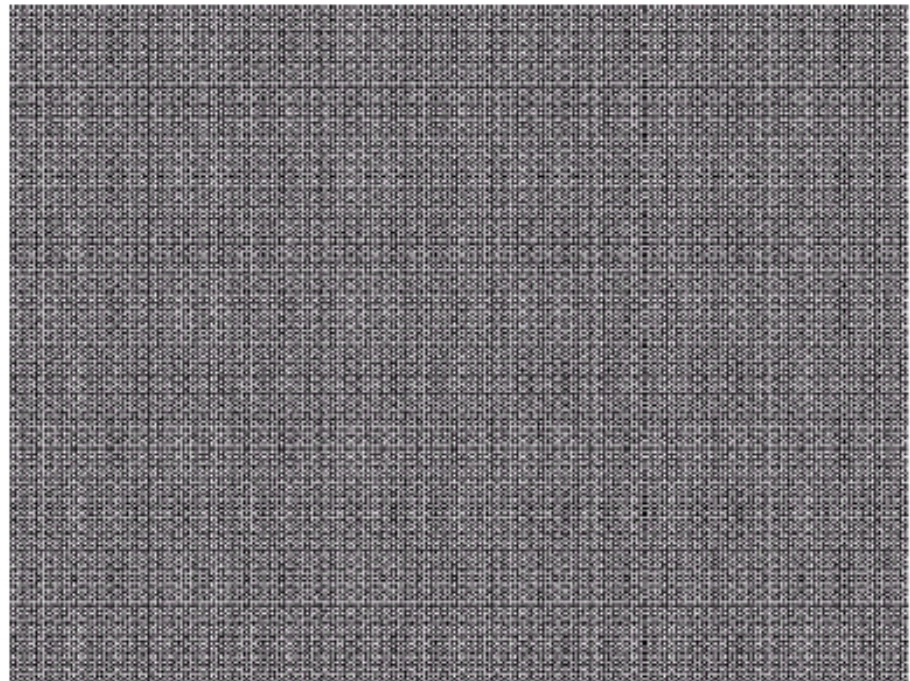


带通滤波器

带通滤波器与带阻滤波器功能相反

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$

FIGURE 5.17
Noise pattern of
the image in
Fig. 5.16(a)
obtained by
bandpass filtering.



槽口滤波器

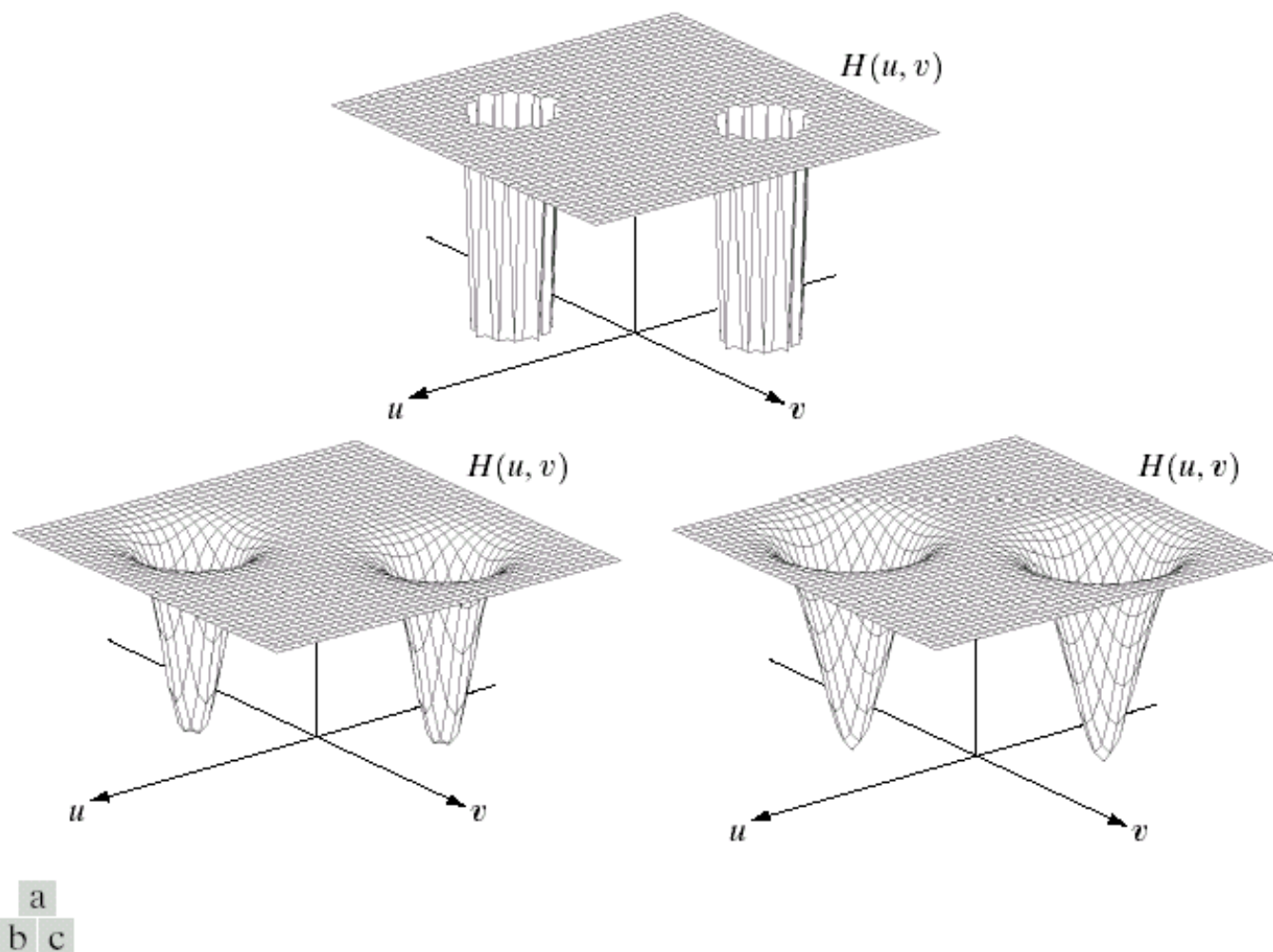
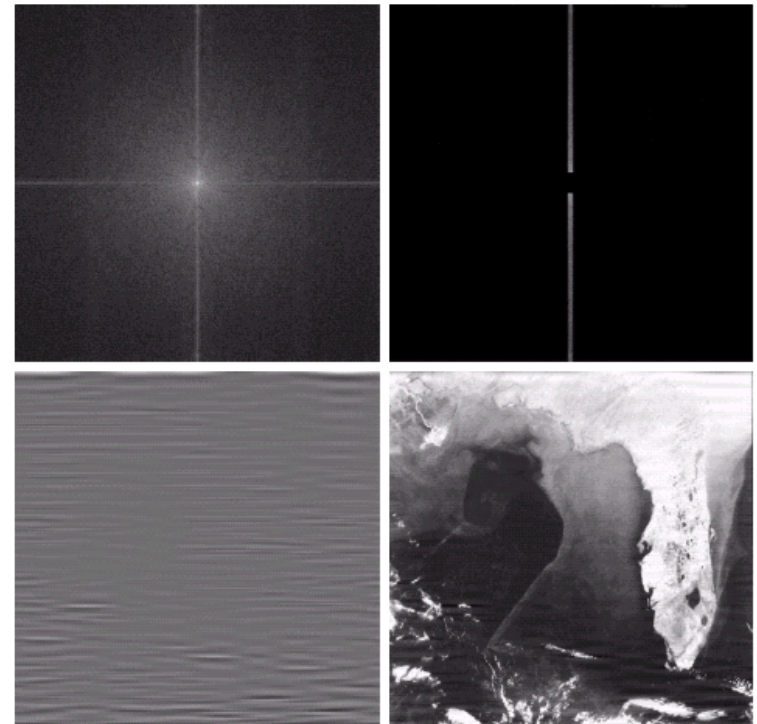
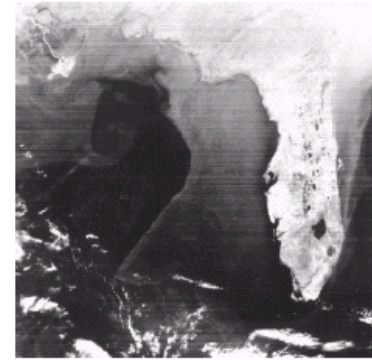


FIGURE 5.18 Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.

槽口滤波器

a
b c
d e

FIGURE 5.19 (a) Satellite image of Florida and the Gulf of Mexico (note horizontal sensor scan lines). (b) Spectrum of (a). (c) Notch pass filter shown superimposed on (b). (d) Inverse Fourier transform of filtered image, showing noise pattern in the spatial domain. (e) Result of notch reject filtering. (Original image courtesy of NOAA.)





图像处理

- ☐ 灰度变换与空域滤波
- ☐ 图像频域滤波
- ☐ 稀疏表达

压缩感知 (Compressed Sensing, 2004)



- 压缩感知又称压缩采样，是一种对信号进行采样的技术，在采样的过程中完成了数据的压缩
- Nyquist采样定理 (1928年)
 - 采样频率必须大于信号中最高频率的两倍，可从采样信号重建原始信号
 - 采样方式：等间距采样
- 压缩感知
 - 基于信号的稀疏特性，在远小于Nyquist 采样率的条件下，用随机采样获取信号的离散样本，然后通过非线性重建算法，完美重建信号
 - 典型应用场景：核磁共振成像，成像速度提高10+倍
 - 被美国科技评论评为2007年度十大科技进展

压缩感知

- 如果一个信号(x)在某个变换域(Ψ)是稀疏的, 可用一个与变换基不相关的观测矩阵(Φ)将变换所得高维信号投影到一个低维空间(y)上, 然后通过求解一个优化问题(S), 即可从这些少量的投影中(y)以高概率重构出原信号(x)

- 假设 $x \in R^N$ 在字典 Ψ 上是**稀疏**的, 即

$$x = \Psi S, \quad \|S\|_0 = k \ll N$$

表示 x 在 Ψ 上是可压缩的, 它可以被 Ψ 中的 k 个码字向量很好地表达。 Ψ 又称**稀疏矩阵**, S 称稀疏系数。

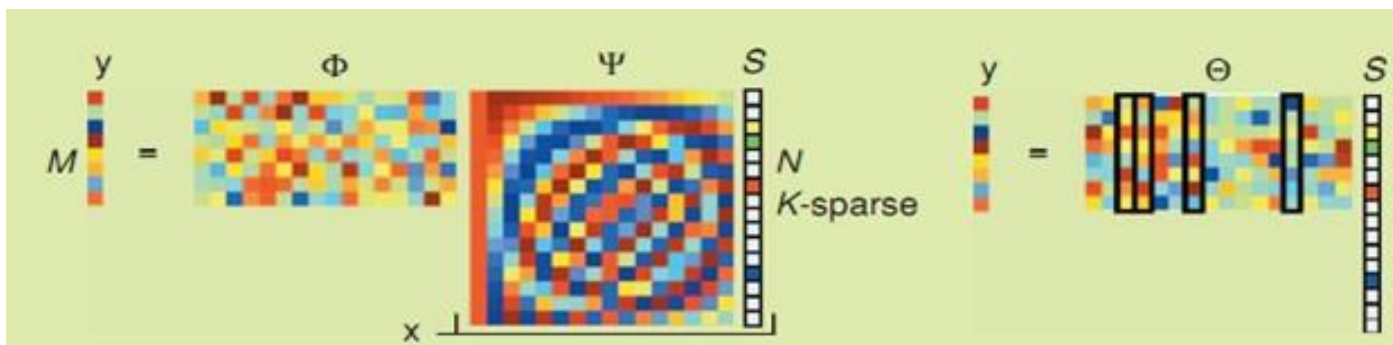
- 假设有一个 $M \times N$ 大小的**观测矩阵** Φ , 此处 $M < N$, 得到的观察数据为 y , 即

$$y = \Phi x = \Phi \Psi S = \Theta S$$

压缩感知

- 当 Θ 满足restricted isometry property (RIP, 有限等距)性质时, x 在字典 Ψ 上的系数 S 可以通过求解以下优化问题得到:

$$S = \arg \min_S \|S\|_1, \quad \text{s.t. } y = \Phi\Psi S$$



- Restricted isometry property (RIP)性质
 - 当 Θ 满足 k 次的RIP性质时, 则对于常数 $\delta_k \in (0, 1)$ 有

$$(1 - \delta_k)\|v\|_2^2 \leq \|\Theta v\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|v\|_2^2, \text{ 对于任意 } v, \text{ 只要有 } \|v\|_0 \leq k$$
 - RIP性质保证原空间到稀疏空间的一一映射关系
- 如果稀疏基和观测基不相关, 则可保证RIP性
 - 独立同分布的高斯随机测量矩阵可成为普适的压缩感知测量矩阵

稀疏表达

- 稀疏表达是在稀疏性的假设下，通过求解优化问题进行信号恢复的方法

| | | |
|------------------|---|---|
| P_0 | $\min \alpha _0$ | $s. t. y = D\alpha$ |
| \downarrow | | |
| P_1 | $\min \alpha _1$ | $s. t. y = D\alpha$ |
| \downarrow | | |
| $P_{1,\epsilon}$ | $\min \alpha _1$ | $s. t. y - D\alpha _2^2 \leq \epsilon$ |
| \downarrow | | |
| P | $\underbrace{\min \lambda \alpha _1}_{\text{稀疏正则项}} + \underbrace{\frac{1}{2} y - D\alpha _2^2}_{\text{约束项}}$ | |

稀疏表达和MAP(最大后验)的关系

- 假设稀疏系数符合Laplace分布，噪声符合高斯分布

$$y - D\alpha \simeq N(0, \sigma^2) \quad \alpha \simeq L(0, b)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{MAP} &= \operatorname{argmax} p(\alpha|y) \propto \operatorname{argmax} \underbrace{p(y|\alpha)}_{\text{似然项}} \times \underbrace{p(\alpha)}_{\text{先验项}} \\ &= \operatorname{argmax} \{-|y - D\alpha|^2 - \lambda|\alpha|_1\} \quad \text{取对数} \\ &= \operatorname{argmin} \underbrace{\{|y - D\alpha|^2 + \lambda|\alpha|_1\}}_{\text{稀疏表达的优化方程}} \end{aligned}$$

- 基于稀疏表达的信号恢复等价于基于稀疏系数是Laplace分布假设的MAP

稀疏表达的求解

□ 求解稀疏表达的问题的核心是如何求解

$$\min \lambda |\alpha|_1 + \frac{1}{2} \|y - D\alpha\|_2^2$$

- 1) Gradient Projection Methods (梯度投影算法)
 - 2) Homotopy Methods (同伦算法)
 - 3) Iterative Shrinkage-Thresholding Methods (循环搜索阈值算法)
 - 4) Proximal Gradient Methods (近似梯度算法)
 - 5) Alternating Direction Methods (交换方向算法)
-
- Allen Y. Yang, A. Ganesh, S. Shanka Sastry, Yi Ma “Fast L1 Minimization Algorithms and An Application in Robust Face Recognition: A Review”, ICIP 2010

稀疏字典D

□ 设计的字典

- Wavelets, curvelets, wedgelets, bandlets,

□ 训练的字典

- 无监督训练
 - ✓ K-means + PCA 得到字典
- 学习得到字典
 - ✓ 通过求解

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{C}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \|y_i - D\alpha_i\|_2^2 + \lambda \|\alpha_i\|_1$$
$$\mathbb{C} \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{m \times p} \text{ s.t. } \forall i = 1, \dots, p, \|d_i\|_2 \leq 1\}$$

(码本 D 含 p 个码字, 每个码字向量维度为 m)

稀疏字典D

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{C}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \|y_i - D\alpha_i\|_2^2 + \lambda \|\alpha_i\|_1$$
$$\mathbb{C} \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{m \times p} \text{ s.t. } \forall i = 1, \dots, p, \|d_i\|_2 \leq 1\}$$

(码本 D 含 p 个码字, 每个码字向量维度为 m)

➡ 通常算法, 迭代优化 D, α

- 1) 固定 D , 优化 α
 - l_1 优化问题
- 2) 固定 α , 优化 D
 - l_2 优化问题

- Aharon M, Elad M, Bruckstein A. “K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation”, IEEE TSP, 54 (11), 2006
- Lee, H., Battle, A., Raina, R., Ng. A. Y. “Efficient sparse coding algorithms”, NIPS 2006
- W. Dong, L. Zhang, G. Shi, and X. Wu, “Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization,” *IEEE TIP*, 20(7), 2011.

稀疏表达—图像恢复

- 稀疏表达本质上是一种图像的先验概率模型，结合不同的图像降质模型可以用于图像恢复
- 基本框架

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^{p \times n}} \frac{1}{2} \|Y - AX\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n |\alpha_i|_1 \quad s.t. \quad D\alpha_i = R_i X$$

(Y : 降质图像; X : 待恢复图像)

A 表示降质模型， R_i 表示从图像中抽取一个小块，假设观测数据受高斯干扰。
上式的物理意义是：希望恢复的图像既能在字典上稀疏表达，也符合观测模型

- 去高斯噪声
- 去模糊
- 图像修复
- 超分辨

稀疏表达—图像恢复：去噪

- 对于去除高斯噪声，(1)式中 $A = I$ （单位矩阵）



稀疏表达—图像恢复：去噪

- 对于去除高斯噪声，(1)式中 $A = I$ （单位矩阵）



$$\sigma = 25$$

稀疏表达—图像恢复：去模糊

- 此时式(1)中， A 是由于卷积作用而产生的矩阵
- 如果是空间不变的卷积核， A 为一个循环矩阵
 - 注意： X 由矩阵变成了列向量的表达形式



高斯卷积核 $\sigma = 2$



高斯卷积核 $\sigma = \sqrt{2}$

稀疏表达—图像恢复：图像修复

- 此时式(1)中，A是由于模板（mask）而产生的矩阵

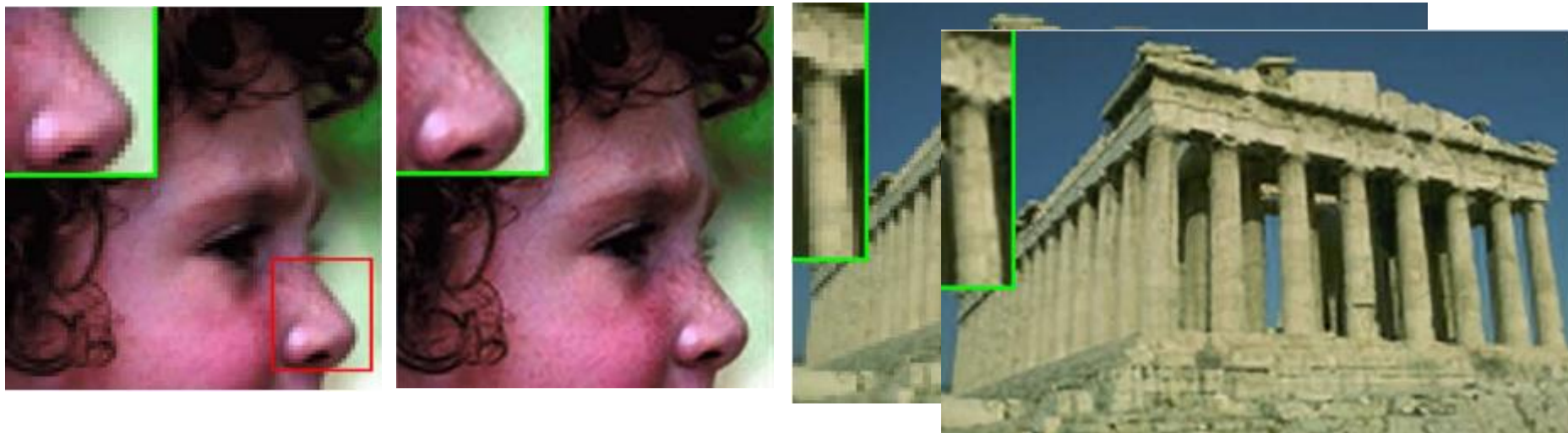
The left image shows a street scene in New Orleans with a horse-drawn carriage. A large block of red text is overlaid on the left side of the image, partially obscuring the scene. The text describes the history of New Orleans and the Mardi Gras festival.

Since 1699, when French explorers landed at the great bend of the Mississippi River and celebrated the first Mardi Gras in North America, New Orleans has brewed a fascinating melange of cultures. It was French, then Spanish, then French again, then sold to the United States. Through all these years, and even into the 1900s, others arrived from everywhere: Acadians (Cajuns), Africans, indige-



稀疏表达—图像恢复：超分辨

- 此时式(1)中，A是先由卷积、然后下采样作用而产生的矩阵



超分辨系数3

- J. Yang, J. Wright, T. S. Huang, Y. Ma, “Image Super-Resolution via Sparse Representation”, IEEE TIP, 19(11), 2010.