# 第三次恒星物理编程作业

3、前苏联学者伽莫夫利用量子力学隧道效应，计算了原子核 i, j 之间克服库仑势垒进行热核聚变的反应截面 $S$

$$\mathcal{S} \propto \exp\left(-\frac{\pi Z_i Z_j e^2}{\varepsilon_0 h v}\right) \exp\left(-\frac{m_g v^2}{2kT}\right) \ ,$$

其中第一个乘方项正比于量子隧道贯穿几率，第二个乘方项正比于两种原子核的相对运动速率（单位采用 cm/s）在区间$(v, v + dv)$内原子核的平均数密度。这里将参与反应的两种原子核 i, j 按照理想气体处理，气体粒子的有效质量$m_g$取为两种原子核 i, j 的约化质量（以克为单位），即

$$m_g = \frac{m_{g,i} m_{g,j}}{m_{g,i} + m_{g,j}} \ .$$

公式中$Z_i$ , $Z_j$为两种原子核的核电荷数（正整数），$e = 4.80 \times 10^{-10}$e.s.u.为电子的基本电荷（静电单位 $1\text{e.s.u.} = 0.33 \times 10^{-9}\text{C}$）. 这里与 CGS 单位制配合使用的电磁学物理量使用高斯单位制，因此真空的介电常数满足$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1$. 另外，普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$，玻尔兹曼常量 $k = 1.381 \times 10^{-16} \text{erg} \cdot \text{K}^{-1}$，T 为气体的绝对温度。

由于第一个乘方项随着气体粒子速率的增加而增大，第二个乘方项则随着速率的增加而减小，它们的乘积（反应截面）必然在某个特征速率处达到极大。该峰值位置称为“伽莫夫峰”。根据极值条件$\frac{dS}{dv} = 0$，可以得到伽莫夫峰值速率的解析解为

$$v_p = \left(\frac{\pi Z_i Z_j e^2 kT}{\varepsilon_0 h m_g}\right)^{1/3}$$

现在，对于氢燃烧的年青主序星，1）请根据不同的相对速率，计算对应的反应截面，画出反应截面（可以某个常系数$\mathcal{S}_0$为自然单位）vs.相对速率的曲线。对计算数据可视化时，如果感觉线性刻度不太合适，也可以采用半对数坐标轴或者双对数坐标轴画图。2）通过对曲线的判读，估计一下伽莫夫峰值速率的位置，并与解析公式给出的结果进行对比，看相对误差如何？

提示：在进行数值计算时，可以取$Z_i = Z_j = 1$，$m_{g,i} = m_{g,j} = m_p = 1.67 \times 10^{-24}\text{g}$，$T = 1.0 \times 10^7\text{K}$（略高于 p-p 链的点火温度）。这里氢原子核组成非相对论性的普通理想气体，忽略粒子惯性质量的相对论性增长。相对速率 v 的下限取值可以略大于零，上限应该远小于真空中的光速（$c = 3.0 \times 10^{10} \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$），速率区域的网格点设置可以自行设定。实际上，根据能量均分定理，气体粒子的平均平动能和温度的关系为$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2} m_g \overline{v^2}$，可以得到粒子的均方根速率为$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_g}} = \sqrt{\frac{6kT}{m_p}} \approx 7 \times 10^7 \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 2.3 \times 10^{-3} c \ll c$，因此非相对论性的理想气体条件是满足的。

**说明**：请在问题发布开始的两个星期内，在线给助教提交编程作业的电子版。包括源程序（需要中文或英文的注释）、可执行文件、中文报告文档（说明编程思路）、画图的图像文件，以及其它你认为必要的文档。