Note

以下答案均为个人作答，很可能不正确，欢迎和我讨论

统计算法期中复习：

如何求数值积分：F(x)，其中F为N(0,1)的累积分布函数；同时让数值积分更稳定

$$\text{用}MonteCarlo\text{方法，同时运用对偶变量法，控制变量法，重要抽样法，分层抽样法等进行方差缩减}$$
$$\text{当然数值积分中的}Gauss\text{积分也可以使用}$$

数学分析期中复习：

$f(x)$可微，$\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $f(x_1) \leq f(x_2)$，且$f'(x)$仅在有限个点上为 0。求证：f(x)在[a,b]上严格递增。

$$\text{用积分证明}$$

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$\text{显然连续，可导}$$

$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$\text{连续但不可导}$$

判断二元函数 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}}$在 (0,0) 处是否连续、可导以及可微。

$$\text{连续性显然，可导是因为}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0,\text{不可微是因为：}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{不趋向于}0$$

求极限 $\lim_{x \to a} \frac{sinx - sina}{x-a}$。

$$\text{洛必达或者泰勒展开}$$

$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1/4}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$

$$\text{换元}\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, I = 1/4 * \int_0^1 \int_0^\pi 2\pi \rho^2 sin\varphi/\rho^2 d\varphi = 2 \cdot 2\pi \cdot 1/4 = \pi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

求 $\int_0^\infty x^2 \left(1 + x^{2024}\right) e^{-x} dx$。

$$\text{记对于}x^k e^{-x}\text{积分为}F(k),\text{则有}F(k) = kF(k-1)$$

求 $\int_{-k}^k x^6 \left(1 + x^{2024}\right)(e^x - e^{-x}) dx$。

$$\text{奇函数，积分为}0$$

线性代数期中复习：

5.

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$正定, 求证:$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix} \leq |A||D|$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix} = det(A) * det(D - B^T A^{-1} B)$$

$$\text{显然，}A, D\text{正定；于}\tilde{A} = B^T A^{-1} B\text{正定；于是}D\text{与}\tilde{A}\text{可以同时正交对角化}$$

$$\text{于是}det(D) >= det(D - \tilde{A});\text{证毕}$$

$Lemma$：对于两个对称阵A，而言：若有$AB = BA$, 或者A，B有一个是正定矩阵，则二者可以同时正交对角化

$A = \beta\beta^t + \mu I$，分析A的特征值及其重数

$$\beta\beta^t\text{的非零特征值为}\|\beta\|^2\text{, 进而}A\text{的特征值为}n-1\text{重}\mu, 1\text{重}\mu + \|\beta\|^2$$

3维实对称矩阵的一个二重非零特征根为 λ, 对应两个特征向量为 $(0,-1,-1),(1,0,-1)$, 求另一特征根对应的特征向量

根据对阵实对称阵的性质，可以知道第三个特征向量和不同特征值的特征向量是正交的，于是$answer = (1, -1, 1)$

A为实矩阵且 $A^k = \mathbb{0}$,k为整数, 求A的特征值

$$\text{化零多项式}x^2 = 0\text{，于是}A\text{的特征值只有}0$$

$A^k = \mathbb{0}$, $I_n + A$是否可逆?

$$\text{显然可逆，其逆为}I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$$

问：$ABx = 0$,$BAy = 0$是否有一定有解？期中$x \in R^n; y \in R^m; A \in R^{n*m}; B \in R^{m*n}$,m>n

$$\text{前者不一定，后者一定有解}$$

概统期中复习：

一个均匀的骰子，投掷许多次

(1) 6 次就集齐{1,...,6}的概率? (2) 7 次就集齐{1,...,6}的概率? (3) 8 次就集齐{1,...,6}的概率? (4) 平均需几次能够集齐{1,...,6}?

$tips$：X_i定义为在出现$i-1$个数字之后，首次出现第i个新的数字所需要的次数，$X_i iid$几何分布$Geo(1-(i-1)/6)$

$$1.P_1 = P(X_i = 1, i = 1, .., 6) = 1 * \frac{5}{6} * \frac{4}{6} * \frac{3}{6} * \frac{2}{6} * \frac{1}{6}$$

$$2.P_2 = P(5\text{个}i, 1\text{个}j, X_i = 1, X_j = 2) = \sum \frac{i}{6} * P_1$$

$$3.P_3 = P(4\text{个}i, 2\text{个}j, X_i = 1, X_j = 2;\text{或者}5\text{个}i, 1\text{个}j, X_i = 1, X_j = 3) = P_1 * \sum_{i,j} \frac{ij}{36} + P_1 * \sum_i (\frac{i}{6})^2$$

$$P_1 * ()4.E[\sum_{i=1}^{6} X_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{i}$$

在某城市，有两种颜色的汽车：红色和蓝色。红色汽车占所有汽车的 70%，蓝色汽车占 30%。老王的视力不是很好，他在观察到的情况下有 90% 的概率正确地辨别出红色汽车，但也有 20% 的概率会错误地将蓝色汽车看成红色。现在，老王说他看到了一辆红色的汽车。求在这种情况下，这辆汽车实际上是红色的概率。

$$\text{贝叶斯公式}$$

给出样本 $(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ 的均值，方差无偏估计量

$$\bar{X}, S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

X, Y~$N(0,1), Cov(X,Y) = \rho$求$aX + bY$和$bX - aY$的相关系数

$$lemma : cov(Ax, Bx) = AVar(x)B^t$$

一天的消耗量X为连续型随机变量，pdf为f(x)，初始剩余量为θ；求一天后消耗完的概率；求一天后剩余量的期望；求消耗完需要的天数的期望

$$1.P(X >= \theta)$$
$$2.E[\theta - x]$$
$$3.E[N|\sum_{i=1}^{N} X_i >= \theta]$$

微分方程期中复习：

求解二阶常微分方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^x$

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$