Note

以下答案均为个人作答，很可能不正确，欢迎和我讨论

统计算法期中复习：

- 如何求数值积分：F(x)，其中F为N(0,1)的累积分布函数；同时让数值积分更稳定

$$\text{用}MonteCarlo\text{方法，同时运用对偶变量法，控制变量法，重要抽样法，分层抽样法等进行方差缩减}$$
$$\text{当然数值积分中的}Gauss\text{积分也可以使用}$$

数学分析期中复习：

- $f(x)$可微，$\forall a \le x_1 < x_2 \le b$, $f(x_1) \le f(x_2)$，且$f'(x)$仅在有限个点上为 0。求证：f(x)在[a,b]上严格递增。

$$\text{用积分证明}$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$\text{显然连续，可导}$$

- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$\text{连续但不可导}$$

- 判断二元函数 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}}$在 (0,0) 处是否连续、可导以及可微。

$$\text{连续性显然，可导是因为}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\text{不可微是因为：}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{不趋向于}0$$

- 求极限 $\lim_{x \to a} \frac{sinx - sina}{x-a}$。

$$\text{洛必达或者泰勒展开}$$

- $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \frac{1/4}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$

$$\text{换元}\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta, I = 1/4 * \int_0^1 \int_0^\pi 2\pi\rho^2 sin\varphi/\rho^2 d\varphi = 2 \cdot 2\pi \cdot 1/4 = \pi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

- 求 $\int_0^\infty x^2 \left(1 + x^{2024}\right) e^{-x} dx$。

$$\text{记对于}x^k e^{-x}\text{积分为}F(k),\text{则有}F(k) = kF(k-1)$$

- 求 $\int_{-k}^k x^6 \left(1 + x^{2024}\right)(e^x - e^{-x}) dx$。

$$\text{奇函数，积分为}0$$

线性代数期中复习：

- 设 A 是一个 $n \times m$ 实数矩阵，$\mathbf{x} \in R^m$, 证明 $A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow A^\top A\mathbf{x} = 0.$

$$PF: \begin{aligned} &\forall \vec{x}\text{ st. } A\vec{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow A^\top A\vec{x} = \overrightarrow{0} \\ &\forall \vec{x}\text{ st. } A^\top A\vec{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \vec{x}^\top A^\top A\vec{x} = 0 = \|A\vec{x}\|_2^2 \Rightarrow A\vec{x} = \overrightarrow{0}. \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

- 若 $A_1^\top A_1 B A_2^\top A_2=0$, 则 $A_1 B A_2^\top=0$, 其中 A_1, A_2, B 都是矩阵。

$$\text{解：记} S=A_1 B A_2^\top \text{于是} \operatorname{tr}\left(S S^\top\right)=\sum_{i, j}\left|S_{i j}\right|^2$$

$$\text{且} \operatorname{tr}\left(S S^\top\right)=\operatorname{tr}\left(A_1 B A_2^\top A_2 B^\top A_1^\top\right)=\operatorname{tr}\left(A_1^\top A_1 B A_2^\top A_2 B^\top\right)=\operatorname{tr}\left(\bigcirc \cdot B^\top\right)=0$$

$$\text{于是} S=0$$

- 假设 $A_{n \times m}$ 有奇异值分解 $A=U D V^\top$, 其中 U, V, D 分别是 $n \times r, m \times r, r \times r$矩阵 $(r=\operatorname{rank}(A))$,满足 $U^\top U=V^\top V=I_r, D=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}\right)$(可逆), 证明 $C(U)=C(A), C(V)=C\left(A^\top\right)$ 。

$$\text{注}: C(A):=\left\{A \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\right\}=\operatorname{span}\left\{\overrightarrow{a_i} \mid A=\left(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_m}\right)\right\}$$

$$\text{定理}: C(A) \oplus \operatorname{Ker}\left(A^\top\right)=\mathbb{R}^n. \text{其中} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\left\{\vec{y} \mid A^\top \vec{y}=\overrightarrow{0}\right\}$$

$$PF:$$

$$(1) A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow V^\top V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2) U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \text{于是} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{Ker}\left(U^\top\right) \text{于是} C(A)=C(U).$$

- 假设 A 是一个实数矩阵, $P_A=A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top$为对应的投影阵, 证明 $C\left(P_A\right)=C(A)$。

$$PF: \text{下证} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{ker}\left(P^\top\right);$$

$$\operatorname{Rmk}: P=P^\top ; P^2=P$$

$$(1) \forall \vec{x} st. A^\top \vec{x}=0 \Rightarrow P \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2) \forall \vec{x} st. P \vec{x}=0 \Leftrightarrow A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow A^\top A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{Ker}(P)$$

$$\text{进而} C(A)=C\left(P^\top\right)=C(P)$$

- 假设矩阵$A_{n \times m}=B_{n \times r} C_{r \times m}$, 假设 C 是行满秩的, 证明 C(A)=C(B), P{A}=P{B} 。

$$\text{下证}: \operatorname{Ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{Ker}\left(B^\top\right) \text{进而} C(A)=C(B)$$

$$(1) \forall \vec{x} \quad A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow C^\top B^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow\left(C C^\top\right) B^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \overset{CC^\top \text{政}}{=} B^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2) \forall \vec{x} \quad B^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\text{下证}: P_A=P_B: \text{即证列向量空间的投影矩阵唯一}$$

$$PF: \text{设}\left\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\right\} \text{为} \mathbb{R}^n-\text{组基列向量空间} C=\operatorname{span}\left\{\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}\right\}$$

$$\text{设} P, Q \text{为向} C \text{空间上的投影矩阵}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall \quad i \leqslant r & P \overrightarrow{a_i}=Q \overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{a_i} \\ \forall \quad i \geqslant r+1 & P \overrightarrow{a_i}=Q \overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{0}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{于是}(P-Q)\left(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\right)=O_{n \times n}$$

$$\xrightarrow{\left(\overrightarrow{a_i}\right) \text{是基}} \quad P-Q=O_{n \times n} \Rightarrow P=Q \quad \Rightarrow \text{投影矩阵是唯一的}$$

- 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$,假设 $A_1^\top A_2=0$, 证明$P_A=P_{A_1}+P_{A_2}$。

$$\text{由题}: C(A)=C\left(A_1\right)\oplus C\left(A_2\right)$$

$$\begin{aligned}
&A^\top A=\begin{pmatrix}A_1^\top\\A_2^\top\end{pmatrix}\left(A_1A_2\right)=\begin{pmatrix}A_1^\top A_1 & 0\\ 0 & A_2^\top A_2\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow P_A=\left(A_1,A_2\right)\begin{pmatrix}\left(A_1^\top A_1\right)^{-1} & 0\\ 0 & \left(A_2^\top A_2\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^\top\\A_2^\top\end{pmatrix}=P_{A_1}+P_{A_2}
\end{aligned}$$

- 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$, 令$A_2^\perp=A_2-P_{A_1}A_2$, 证明 $P_A=P_{A_1}+P_{A_2^\perp}$

$$\begin{gathered}
(1)A_1^\top A_2^\perp=A_1^\top A_2-A_1^\top P_{A_1}\cdot A_2=0\\
(2)\text{记}\widetilde{A}=\left(A_1,A_2^\perp\right)=\left(A_1,A_2\right)\begin{pmatrix}I & -P_{A_1}\\ 0 & I\end{pmatrix}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{于是}C(\widetilde{A})=C(A)\\
\text{进而}P_A=P_{\widetilde{A}}=P_{A_1}+P_{A_2^\perp}(\text{由前几题可知})
\end{gathered}$$

- 首先介绍一些记号或定义:
  (1) A $\geq$0 (A 是半正定矩阵); A>0 (A 是正定矩阵);
  $A\geq B\Leftrightarrow A-B\geq 0; A>B\Leftrightarrow A-B>0$ 。
  (2) 定义平方根矩阵: 若 $A_{n\times n}\geq 0$的谱分解为 $A=O\Lambda O^\top$, 其中对角阵 $\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ 的对角元为 A 的特征根, O 是正交矩阵, 则半正定矩阵的 (唯一) 平方根定义为 $A^{1/2}=O\Delta O^\top$, 其中 $\Delta=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right)$。定义 $A^{-1/2}=\left(A^{1/2}\right)^{-1}$。证明如下事实:
  - (a) 以 $\lambda(A)$ 表示 A 的任一特征根, 则 $A\leq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\leq 1$,且 $A\geq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\geq 1$.

$$(a)\begin{cases}I_n-A\geqslant 0\ (\text{半正定}) \Rightarrow\lambda(I-A)\geqslant 0\Rightarrow\lambda(A)\leqslant 1\\ A-I_n\geqslant 0\ (\text{半正定}) \Rightarrow\lambda\left(A-I_n\right)\geqslant 0\Rightarrow\lambda(A)\geqslant 1\end{cases}$$

  - (b) 若 $0<A\leq I_n$, 则$A^{-1}\geq I_n$.

$$\begin{gathered}
(b) if A\text{正定}; I_n-A\text{半正定}\Rightarrow\lambda(A)\leqslant 1\\
\Rightarrow\lambda\left(A^{-1}\right)\geqslant 1\Rightarrow A^{-1}-I_n\geqslant 0
\end{gathered}$$

  - (c) 若 $A\geq B>0$, 则对任何$k\times n$ 矩阵 C 有 $CAC^\top\geq CBC^\top\geq 0$, 特别地, $B^{-1/2}AB^{-1/2}\geq I_n$.

$$\begin{gathered}
(c). A-B\geqslant 0\Rightarrow\forall C, C(A-B)C^\top\geqslant 0\\
\text{这是因为}\vec{x}^\top C(A-B)\vec{C}^\top\vec{x}=y^\top(A-B)y\geqslant 0
\end{gathered}$$

  - (d) 若 $A\geq B>0$,则 $B^{-1}\geq A^{-1}>0$。

$$\begin{gathered}
(d) if A-B\geqslant 0\text{且}A\cdot B\text{正定}\\
\Rightarrow A,B\text{同时正交对解化后,}\\
\text{记为}\operatorname{diag}\left(\lambda_i^A\right)\operatorname{diag}\left(\lambda_i^B\right)\\
\text{有}\lambda_i^A>\lambda_i^B>0(i=1,\cdots,n)(\text{对应该置的}\lambda)\\
\Rightarrow\ \text{于是}\ 0<1/\lambda_i^A\leqslant 1/\lambda_i^B\\
\Rightarrow\quad 0<A^{-1}\leqslant B^{-1}
\end{gathered}$$

  - (e) 若$A\geq B>0$, 则 $A^{1/2}\geq B^{1/2}>0$。

(e)正交分解(因AB正定 $\Rightarrow$ 可以同时正交对角化，即用同一个正交矩阵P来对角化)

$$A = P^\top \operatorname{diag}\left(\lambda_i^A\right) P; \quad B = P^\top \operatorname{diag}\left(\lambda_i^B\right) P$$

$$\text{有 } \lambda_i^A \geqslant \lambda_i^B \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\text{于是 } \left(\lambda_i^A i^{1/2} \geqslant \left(\lambda_i^B\right)^{1/2} \quad \text{进而 } A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$$

(待完成)举例说明 $A \geq B \geq 0$ 未必蕴含$A^2 \geq B^2$ 。

- $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$正定, 求证:$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix} \leq |A||D|$

$Lemma$：对于两个对称阵A，而言：若有$AB = BA$, 或者A，B有一个是正定矩阵，则二者可以同时正交对角化

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix} = det(A) * det(D - B^T A^{-1} B)$$

$$\text{显然，} A, D \text{正定；于} \tilde{A} = B^T A^{-1} B \text{正定；于是} D \text{与} \tilde{A} \text{可以同时正交对角化}$$

$$\text{于是} det(D) >= det(D - \tilde{A}); \text{证毕}$$

- $A = \beta\beta^t + \mu I$，分析A的特征值及其重数

$$\beta\beta^t \text{的非零特征值为} \|\beta\|^2, \text{进而} A \text{的特征值为} n-1 \text{重} \mu, 1 \text{重} \mu + \|\beta\|^2$$

- 3维实对称矩阵的一个二重非零特征根为 λ, 对应两个特征向量为 $(0,-1,-1),(1,0,-1)$, 求另一特征根对应的特征向量

根据对阵实对称阵的性质，可以知道第三个特征向量和不同特征值的特征向量是正交的，于是$answer = (1, -1, 1)$

- A为实矩阵且 $A^k = \mathbb{0}$,k为整数, 求A的特征值

$$\text{化零多项式} x^2 = 0 \text{，于是} A \text{的特征值只有} 0$$

- $A^k = \mathbb{0}$, $I_n + A$是否可逆?

$$\text{显然可逆，其逆为} I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$$

- 问：$ABx = 0$,$BAy = 0$是否有一定有解？期中$x \in R^n; y \in R^m; A \in R^{n*m}; B \in R^{m*n}$,m>n

前者不一定，后者一定有解

概统期中复习：

- 一个均匀的骰子，投掷许多次

  (1) 6 次就集齐{1,...,6}的概率? (2) 7 次就集齐{1,...,6}的概率? (3) 8 次就集齐{1,...,6}的概率? (4) 平均需几次能够集齐{1,...,6}?

$tips$：X_i定义为在出现$i-1$个数字之后，首次出现第i个新的数字所需要的次数，$X_i iid$几何分布$Geo(1-(i-1)/6)$

$$1.P_1 = P(X_i = 1, i = 1, .., 6) = 1 * \frac{5}{6} * \frac{4}{6} * \frac{3}{6} * \frac{2}{6} * \frac{1}{6}$$

$$2.P_2 = P(5\text{个}i, 1\text{个}j, X_i = 1, X_j = 2) = \sum \frac{i}{6} * P_1$$

$$3.P_3 = P(4\text{个}i, 2\text{个}j, X_i = 1, X_j = 2; \text{或者}5\text{个}i, 1\text{个}j, X_i = 1, X_j = 3) = P_1 * \sum_{i,j} \frac{ij}{36} + P_1 * \sum_i (\frac{i}{6})^2$$

$$P_1 * ()4.E[\sum_{i=1}^6 X_i] = \sum_{i=1}^6 \frac{6}{i}$$

- 在某城市，有两种颜色的汽车：红色和蓝色。红色汽车占所有汽车的 70%，蓝色汽车占 30%。老王的视力不是很好，他在观察到的情况下有 90% 的概率正确地辨别出红色汽车，但也有 20% 的概率会错误地将蓝色汽车看成红色。现在，老王说他看到了一辆红色的汽车。求在这种情况下，这辆汽车实际上是红色的概率。

$$\text{贝叶斯公式}$$

- 给出样本 $(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ 的均值，方差无偏估计量

$$\bar{X}, S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- X, Y~$N(0,1), Cov(X,Y) = \rho$求$aX + bY$和$bX - aY$的相关系数

$$lemma : cov(Ax, Bx) = AVar(x)B^t$$

- 一天的消耗量X为连续型随机变量，pdf为f(x)，初始剩余量为θ；求一天后消耗完的概率；求一天后剩余量的期望；求消耗完需要的天数的期望

$$1.P(X >= \theta)$$
$$2.E[\theta - x]$$
$$3.E[N|\sum_{i=1}^{N} X_i >= \theta]$$

微分方程期中复习：

- 求解二阶常微分方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^x$

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$