第二章

16

> 1. 试给出破圈法的算法
> 2. 证明：破圈法得到的生成树是最小生成树
> 3. 分析破圈法的时间复杂度

1. 重复以下过程直到图中无圈：
    1. 找到图中一个圈
    2. 删去圈中权值最大的边
2. 证明：
   设 T 为图 G 的最小生成树，T' 为破圈法得到的生成树
   假设 T' 不是最小生成树，则 $\exists e = uv \in T$ 且 $e \notin T'$
   则 $T' + e$，中含有一个圈 C，由破圈法得到 T' 的过程易知 $e \in C$ 为圈 C 中权值最大的边
   此外，图 $T - e$ 包含两个连通片，设为 T_1 和 T_2，且 $u \in T_1$，$v \in T_2$，则 C 中必定存在一条边 $e' = u'v'$，其中 $u' \in T_1$，$v' \in T_2$，且 e' 的权值小于等于 e 的权值
    1. 若 e' 的权值小于 e 的权值，则 $T - e + e'$ 是图 G 的一个权值比 T 小的生成树，与 T 是最小生成树矛盾
    2. 若 e' 与 e 的权值相等，则 $T - e + e'$ 也是图 G 的一棵最小生成树。**且相比于 T，$T - e + e'$ 与 T' 的公共边数多一**
        1. 若 $T - e + e'$ 与 T' 相同（公共边一样），则 T' 与 $T - e + e'$ 权值相同，因此是最小生成树，与假设矛盾
        2. 若 $T - e + e'$ 与 T' 不同，则 $\exists e'' = u''v'' \in T - e + e'$ 且 $e \notin T'$，不断重复上述整个过程，每次可得到**另一棵相比于 $T - e + e'$，与 T' 的公共边数多一的最小生成树**，直到得到一棵与 T' 公共边完全相同的最小生成树，即说明 T' 是最小生成树，与题设矛盾
3. 需要删除 $E - (V - 1)$ 条边，即重复寻找 $E - (V - 1)$ 个圈，如果利用DFS寻找圈，时间复杂度为 $O(E + V)$，可以在DFS过程中记录当前路径上权值最大的边，一般连通图 $E > V$，故时间复杂度为 $O(E^2)$（由算法具体实现决定，维基百科给出另一种破圈方法）。

18

> 设 T 是二叉正则树，i 是分支点数，I 是各分支点的深度之和，L 是各树叶的深度之和，证明：$L = I + 2i$

证明：

1. 当 $i = 0$ 时，T 是平凡树，只有一个根节点，显然成立

2. 假设当 $i=k$ 时，等式成立，即 $L=I+2k$ 成立
   当 $i=k+1$ 时，任取 T 的一个深度为 l 的叶子节点
   由于 T 是正则二叉树，则该叶子节点的父节点还有另一个叶子节点
   删去 T 中这两个叶子节点，则其父节点（分支点）变为深度为 $l-1$ 的叶子节点，得到含有 k 个叶子节点的正则二叉树 T'
   且 $L'=L-2l+(l-1)$，$I'=I-(l-1)$，$i'=i-1$
   代入假设 $L'=I'+2i'$，即得 $L=I+2i$ 成立

19

> 设 T 是二叉正则树，有 t 片树叶，证明 T 的边数 $\varepsilon=2t-2$

证明：根据二叉树的性质，T 的出度为2的顶点数 $n_2=t-1$，无出度为1的顶点，所以 $v=n_2+t=2t-1$，由于 $\varepsilon=v-1$，故 $\varepsilon=2t-2$

21

> 用Huffman编码来编码具有给定频率的如下符号：a:0.20，b:0.10，c:0.15，d:0.25，e:0.30。编码一个符号平均需要多少个二进制数字

$3\times 0.10+3\times 0.15+2\times 0.20+2\times 0.25+2\times 0.30=2.25$

23

> 证明：Huffman树是最优二叉树

证明：

1. 当叶子数目 $t=2$ 时，显然成立
2. 假设当 $t=k$ 时，结论成立
   当 $t=k+1$ 时，设权值：$w_1\le w_2\le\cdots\le w_{k+1}$
   由引理2.1知：存在一个Huffman树 T_{k+1} 使得 w_1 和 w_2 对应的顶点是兄弟，且它们的深度等于树的高度
   对于最优二叉树 T_{k+1}^*，有 $WPL(T_{k+1}^*)\le WPL(T_{k+1})$
   将 w_1 和 w_2 对应顶点删去并保留其父节点，并令父节点的权值为 w_1+w_2 得到新树 T_k^*，则 T_k^* 是叶子结点权值为 $w_1+w_2, w_3, \dots, w_{k+1}$ 的Huffman树，且 $WPL(T_{k+1})=WPL(T_k^*)+w_1+w_2$
   由归纳假设，T_k^* 为最优二叉树，所以 $WPL(T_k^*)\le WPL(T_k)$
   将最优二叉树 T_{k+1}^* 最深的两个叶子节点 w_i 和 w_j 删去并保留其父节点，并令父节点的权值为 w_i+w_j 得到新二叉树 T_k，则 $WPL(T_{k+1}^*)=WPL(T_k)+w_i+w_j$
   将上述等式和不等式联立，得到 $w_i+w_j\le w_1+w_2$

由于 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_{k+1}$，所以 $w_1 + w_2 = w_i + w_j$，所以上述不等号均取等，即：
$WPL(T^*_{k+1}) = WPL(T_{k+1})$，即 T_{k+1} 为最优二叉树，结论成立

25

> 证明：在 $v \ge 3$ 阶的连通图 G 中，存在至少两个顶点，从 G 中删除这两个顶点后所得图仍然连通

证明：设 G 的生成树 T，因为 $v \ge 3$，所以 T 中至少含有两个叶子节点，记为 v_1 和 v_2，则 $T - v_1 - v_2$ 是 $G - v_1 - v_2$ 的生成树，所以 $G - v_1 - v_2$ 也连通

第三章

3

> G 是简单图，$\delta(G) \ge v(G) - 2$，则有 $\kappa(G) = \delta(G)$

证明：
因为 G 是简单图，所以 $\delta(G) \le v(G) - 1$，又因为 $\delta(G) \ge v(G) - 2$

1. 若$\delta(G) = v(G) - 1$，则 G 是完全图，$\kappa(G) = v(G) - 1 = \delta(G)$
2. 若$\delta(G) = v(G) - 2$，则任取 G 中不相邻两顶点 u, v，删去其余 $v(G) - 2$ 个顶点后，u, v 不连通，所以 $\kappa(G) \le v(G) - 2$
   又因为 $\delta(G) = v(G) - 2$，对 G 中任意顶点 u，任意删去 G 中 $v(G) - 3$ 个顶点，有 $deg(u) \ge \delta(G) - (v(G) - 3) = 1$，所以余下三点连通
   综上，$\kappa(G) = \delta(G)$

5

> G 是简单图，$\delta(G) \ge v(G)/2$，则有 $\kappa'(G) = \delta(G)$

证明：
由定理3.5知：$\kappa'(G) \le \delta(G)$，所以只需证明 $\kappa'(G) \ge \delta(G)$
根据定义，存在 $\kappa'(G)$ 条边，使得 G 删去这些边后不连通，得到两个连通片 G_1，G_2，不妨设 $v(G_1) \le v(G)/2$，由题设可得 $\delta(G) \ge v(G_1)$
设在 G 中 G_1 和 G_2 之间有 k 条边，即 $\kappa(G') = k$
G_1 中顶点在 G 中度数和 $d_1 \ge v(G_1)\delta(G)$，而顶点导出子图的顶点度数和 $d_2 \le v(G_1)(v(G_1) - 1)$
由于 $k = d_1 - d_2$ 可得 $\kappa(G') \ge v(G_1)\delta(G) - v(G_1)(v(G_1) - 1)$
故只需证 $v(G_1)\delta(G) - v(G_1)(v(G_1) - 1) \ge \delta(G)$
整理得 $\delta(G) \ge v(G_1)$，已证

6

> G 是简单图，$\delta(G) \geq \frac{1}{2}(v(G)+k-2)$，则 G 是 k-连通图

假设 G 不是 k-连通图，则存在 $k-1$ 个顶点，使得 G 删去这些顶点后得到的图 G' 不是连通图，且 $v(G') = v(G) - k + 1$
因为 $\delta(G') \geq \delta(G) - (k-1) \geq \frac{1}{2}(v(G)+k-2) - (k-1) = \frac{1}{2}(v(G')-1)$。
由于 G' 不连通，则必有一个顶点数不超过 $\frac{1}{2}v(G')$ 的连通片，与 $\delta(G') \geq \frac{1}{2}(v(G')-1)$矛盾