图论第八次作业参考答案

8.2

> 设 D 是没有有向圈的有向图.
>
> (1)证明：$\delta^{-}=0.$
>
> (2)试证：存在 D 的一个顶点序列$v_1,v_2,\cdots,v_v$，使得对于任给 $i(1\le i\le v)$，D 的每条以 v_i 为终点的有向边在$\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1}\}$中都有它的起点.

1. 考虑 D 的最长有向轨道 $P(u,v)$，有 $deg_D^{-}(u)=0$。假设不成立，则 $\exists u'\in V(D)$，有边 (u',u)，若 $u'\in P(u,v)$，则形成有向圈，矛盾；若 $u'\notin P(u,v)$，则有 $P(u',v)=P(u,v)+1$，与最长轨矛盾。所以$deg_D^{-}(u)=0$，则 $\delta^{-}=0$.
2. （拓扑排序）类似1.的证明，图 D 中 $\delta^{+}=0$，取 $v_1\in V(D)$，使得 $deg_D^{+}(v_1)=0$。

   记 $D_1=D-\{v_1\}$，则 D_1 中也没有有向圈，则可选择 $v_2\in D_1$，使得 $deg_{D_1}^{+}(v_2)=0$。

   以此类推可以得到满足要求的序列。

8.3

> 证明：任给无向图 G，G 都有一个定向图 D，使得对于所有的$v\in V$，$|deg^{+}(v)-\deg^{-}(v)|\le 1$成立.

若 G 中存在奇度顶点$v_1,v_2,\cdots,v_{2k}$（奇度顶点必为偶数），

则 $G'=G+\{v_iv_{i+k}|1\le i\le k\}$ 为欧拉图，图中存在一条欧拉回路，沿着回路给每条边定向得到图 D'，对于$\forall v\in D'$，都有 $deg^{+}(v)=\deg^{-}(v)$。

再将 $\{v_iv_{i+k}|1\le i\le k\}$ 从 D' 中删去，得到 G 的一个定向图 D，从 D' 到 D，每个顶点关联的边最多减1，故在 D 中，对于所有的 $v\in V$，$|deg^{+}(v)-\deg^{-}(v)|\le 1$ 成立。

8.7

> 证明：无向图 G 有一种定向方法，使得其最长有向轨道的长度不超过 Δ.

由定理7.1知，$\chi(G)\le\Delta+1$，故 G 中存在正常$(\Delta+1)$-顶点着色。

设对 G 已经进行了该着色，对 G 中的任意边 uv，当且仅当 u 的着色 i 小于 v 的着色 j 时，边定向取 (u,v)。

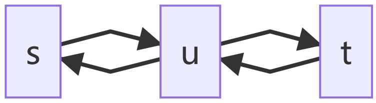
显然在这种定向下，G 的有向轨道的长度 $\le(\Delta+1)-1=\Delta$.

9.1

> 假设 f 是网络 $N=(D,\ s,\ t,\ c)$ 上的流函数。证明：

> $$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$$

设$V'=V(G)-\{s,t\}$，由流函数的定义可知，$\forall v\in V'$，有$\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$，定义$G'=G\cdot V'$，即将V'收缩为一个点，记为 u.（如下图所示）



因为对 $\forall v\in V'$，有$\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$，所以对 u，有$\sum_{e\in\alpha(u)} f(e)=\sum_{e\in\beta(u)} f(e)$

又因为

$$\sum_{e\in\alpha(u)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)+\sum_{e\in\beta(t)} f(e)$$
$$\sum_{e\in\beta(u)} f(e)=\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)+\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)$$

故

$$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$$

9.2

> 证明：在 Ford-Fulkerson 算法的第二步，通过可增载轨道得到的函数 $\bar{f}$ 是流函数.

同引理9.1的证明。

首先证明任给 $e\in E(D)$，都有 $c(e)\geq\bar{f}(e)\geq 0$.

因为 f 是 N 的流函数，所以任给 $e\in E(D)$，都有 $c(e)\geq f(e)\geq 0$.

取 $e'\in E(D)$，

- 若 e' 不是 $P(s,t)$ 上的边，则 $c(e')\geq f(e')=\bar{f}(e')\geq 0$；
- 若 e' 是 $P(s,t)$ 上的正向边，则
  $l(e')\geq l(P)\geq 0,\quad c(e')=f(e')+l(e')\geq f(e')+l(P)=\bar{f}(e')\geq 0$；
- 若 e' 是 $P(s,t)$ 上的反向边，则 $\bar{f}(e')=f(e')-l(P)\geq f(e')-l(e')=0$；

其次证明任给 $v\in V(D)-\{s,t\}$，都有 $\sum_{e\in\alpha(v)}\bar{f}(e)-\sum_{e\in\beta(v)}\bar{f}(e)=0$.

- 若 v 不是 $P(s,t)$ 上的顶点，则任给 $e\in\alpha(v)$ 或 $e\in\beta(v)$，都有 $\bar{f}(e)=f(e)$，可得上式;
- 若 v 是 $P(s,t)$ 上的顶点，设 $P(s,t)=s\cdots e_1ve_2\cdots t$
  - e_1,e_2 都是正向边，$e_1\in\alpha(v),e_2\in\beta(v)$，且
    $\bar{f}(e_1)=f(e_1)+l(P),\bar{f}(e_2)=f(e_2)+l(P),\quad\bar{f}(e_1)-\bar{f}(e_2)=f(e_1)-f(e_2)$，
    可得上式;
  - e_1,e_2 都是反向边，$e_1\in\beta(v),e_2\in\alpha(v)$，且
    $\bar{f}(e_1)=f(e_1)-l(P),\bar{f}(e_2)=f(e_2)-l(P),\quad\bar{f}(e_2)-\bar{f}(e_1)=f(e_2)-f(e_1)$，
    可得上式;

- e_1 是正向边，e_2 是反向边，$e_1 \in \alpha(v), e_2 \in \alpha(v)$，且 $\bar{f}(e_1) = f(e_1) + l(P), \bar{f}(e_2) = f(e_2) - l(P), \quad \bar{f}(e_1) + \bar{f}(e_2) = f(e_1) + f(e_2)$，可得上式；
- e_1 是反向边，e_2 是正向边，$e_1 \in \beta(v), e_2 \in \beta(v)$，且 $\bar{f}(e_1) = f(e_1) - l(P), \bar{f}(e_2) = f(e_2) + l(P), \quad \bar{f}(e_1) + \bar{f}(e_2) = f(e_1) + f(e_2)$，可得上式；

综上，$\bar{f}$ 是流函数.

9.3

> 证明：若网络中不存在从源 s 到汇 t 的有向轨道，则此网络的最大流量与最小截量都是0.

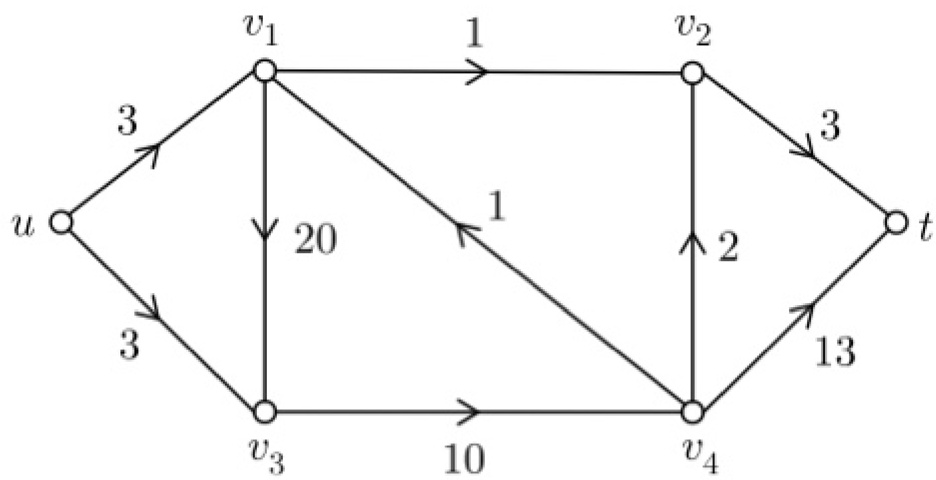
令$S = \{v | v \in V(D)$, 存在从 s 到 v 的有向轨道$\}$，由题意得 $t \notin S$，则 $t \in \bar{S}$，$(S, \bar{S})$是网络的一个截。

若$(S, \bar{S}) \neq \emptyset$，则存在 $e = uv \in E(D), u \in S, v \in \bar{S}$.

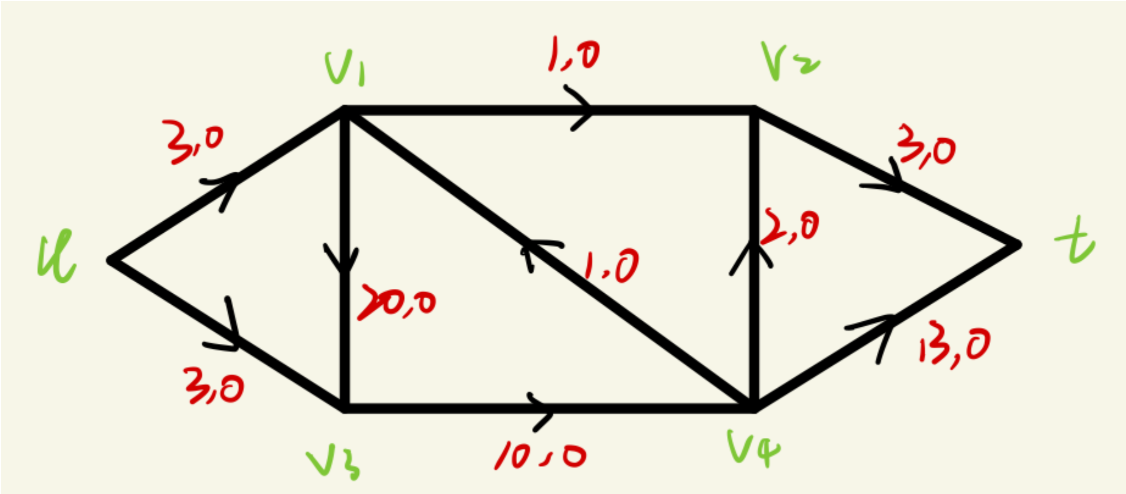
而由 S 的定义，$v \in S$，矛盾。故$(S, \bar{S}) = \emptyset$，即$C(S, \bar{S}) = 0$，最小截为0.

由最大流最小截定理知，最大流也为0.

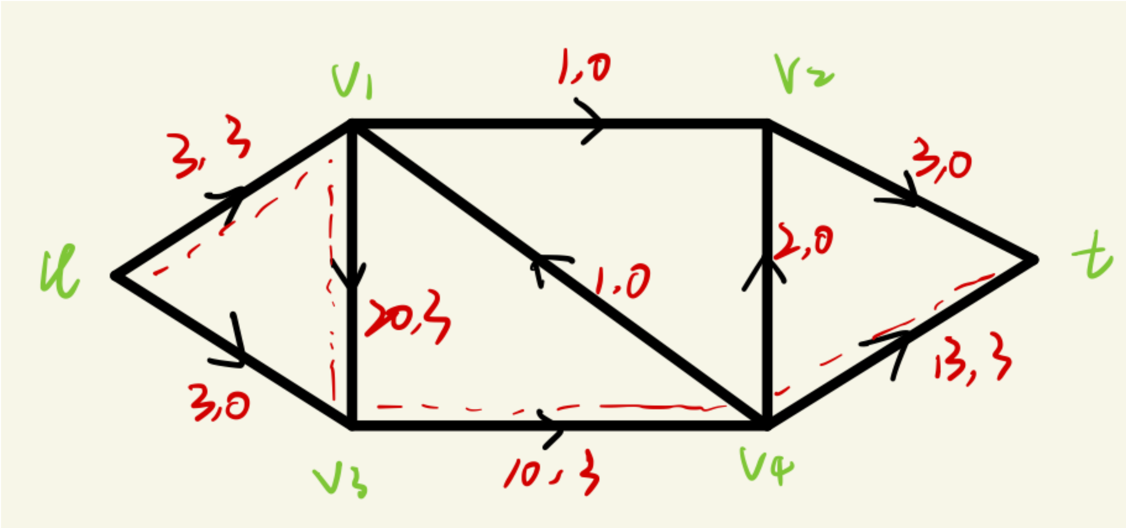
9.4

> 求图9.14中网络的最大流.
>
> 
>
>
> 图 9.14　求最大流

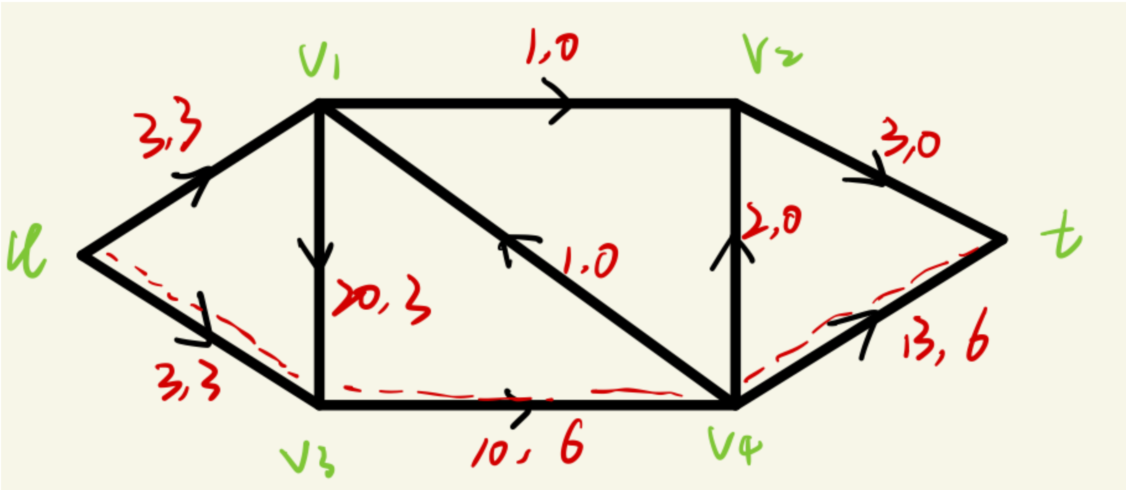
- 取初始流，$\forall e \in E(G), f(e) = 0$



- 可增载轨道 $uv_1v_3v_4t$



- 可增载轨道 uv_3v_4t



- 无可增载轨道，最大流为6.