图论第四次作业参考答案

3.27

证明: 当k是奇数时, $H_{n,k}$ 是k-连通图。

证明:

设k=2r+1,只需证明 $H_{n,2r+1}$ 中没有少于2r+1个顶点的顶割集。

假设V'是一个|V'| < 2r + 1的图的顶点子集。

- 1. 当|V'| < 2r时,书上已证V'不是 $H_{n,2r}$ 的顶割集,自然也不是 $H_{n,2r+1}$ 的顶割集。
- 2. 当|V'|=2r时,设V'是 $H_{n,2r+1}$ 的一个顶割集,顶点i,j分属 $H_{n,2r+1}-V'$ 的两个连通片。考虑 $H_{n,2r+1}$ 的两个顶点子集:

$$S = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$$

$$T = \{j, j+1, \dots, i-1, i\}$$

其中的加法取mod n。

- 。 若 $|V'\cap S|$ 和 $|V'\cap T|$ 中有一个小于r成立,则由书上证明知,顶点i,j在 $H_{n,2r+1}-V'$ 中连通,矛盾。
- - 若S或T中,有一个集合(例如S)所包含的V'的r个顶点不是相继连成段,则S-V'中存在(i,j)轨道,矛盾。
 - 则S与T中,所包含的V'的r个顶点都是相继连成段的。此时S-V'被分成两段,含顶点i的段记为 S_1 ,含顶点j的段记为 S_2 。同样,T-V'被分成两段,含顶点i的段记为 T_1 ,含顶点j的段记为 T_2 。则V-V'被分成两段, $S_1\cup T_1$ 含顶点i, $S_2\cup T_2$ 含顶点j。这两段本身是连通的,且 $S_1\cup T_1$ 段的中间一点 i_0 与 $S_2\cup T_2$ 段的类似点 j_0 满足:

$$j_0 = egin{cases} i_0 + rac{n}{2}, & n$$
是偶数 $i_0 + rac{n+1}{2}, & n$ 是奇数

由构造可知, i_0 与 j_0 间有边相连。则顶点i,j在 $H_{n,2r+1}-V'$ 中连通 $(i,\ldots,i_0,j_0,\ldots,j)$,矛盾。

综上, $H_{n,2r+1}$ 是2r+1连通图。

3.28

设G是满足 $\nu(G) > 3的k$ -边连通图,则任给 $e \in E(G)$, $G \cdot e$ 仍是k-边连通图。

证明:

法一:设e=uv,收缩后的点为w, $E'\subseteq E(G\cdot e)$ 且|E'|< k,E为E'在G中的映射。

因为 $\kappa'(G)=k$,所以G-E连通。对G中任意不同时关联e的两点m,n及其在G-E中的路径 p(m,n):

- 若 $e \in p(m,n)$, 即 $p(m,n) = m \dots e_i ueve_j \dots n$, 则在 $G \cdot e$ 中有 $p'(m,n) = m \dots e_i we_j \dots n$, 故m,n在 $G \cdot e$ 中仍连通。
- 若 $e \notin p(m,n)$,则在 $G \cdot e$ 中路径无影响,m,n仍连通。

综上, $G \cdot e - E'$ 连通, 即任意删除k - 1条边后, $G \cdot e$ 仍连通, 故 $G \cdot e$ 为k-边连通图。

法二: 对 $\forall E \subseteq E(G \cdot e)$ 且|E| < k, 有 $G \cdot e - E = (G - E) \cdot e$,

因为 $\kappa'(G)=k$, 所以G-E连通,则 $(G-E)\cdot e$ 连通, $G\cdot e-E$ 也连通,故 $G\cdot e$ 为k-边连通图。

4.7

设G是v个顶点 ϵ 条边的简单平面图, $\epsilon < 30$,证明存在顶点 $v \in V(G)$,使得 $deg(v) \le 4$ 。

证明:

反证法。假设 $\delta(G) \geq 5$,则有 $2\epsilon = \sum_{v \in V(G)} deg(v) \geq 5v$,

又由推论4.2知, $\epsilon \leq 3v - 6$,

联立得, $v \geq 12$, 此时 $\epsilon \geq \frac{5}{2}v \geq 30$, 与题设矛盾, 故假设不成立。

5.2

证明: 树至多有一个完备匹配。

证明:

法一:假设存在两个不同的完备匹配M和M',考虑其对称差 $M \oplus M'$,易知对称差非空且非孤立点度数为2,则存在圈,与树没有圈相矛盾。故树至多有一个完备匹配。

法二:利用叶子节点在完备匹配中的唯一性。对于每个叶子节点,它只能和唯一与它相邻的点匹配,如果有一个结点连接了两个及以上的叶子节点,那么其中至少会有一个叶子节点不能匹配,则此时不存在完备匹配。所以,只有每个结点最多只与一个叶子结点相连时,才有可能存在完备匹配。于是在这种情况下,去掉叶子结点和与它相邻的结点会得到森林,对森林中的每棵树不断重复上面过程,直到所有的结点都被匹配或者有点不能被匹配。在这个过程中,如果存在完备匹配,匹配的方法都是唯一确定下来的。