第七章

2

> 若 G 是 v 个顶点 ε 条边的简单图，证明：$\chi(G) \geq \frac{v^2}{v^2-2\varepsilon}$

证明：
按照颜色将顶点划分为 $\chi(G)$ 个集合，每个集合内的顶点同色，v_i 为第 i 个集合的顶点数
则总顶点数：$v = \sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i$
利用均值不等式：$\sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2 \geq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i)^2}{\chi(G)} = \frac{v^2}{\chi(G)}$
由于每个集合内部点不相邻：$2\varepsilon \leq \sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i(v-v_i) = \sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i v - \sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2 = v^2 - \frac{v^2}{\chi(G)}$
整理即得：$\chi(G) \geq \frac{v^2}{v^2-2\varepsilon}$

4

> 设 G 的度数序列为 $d_1, d_2 \cdots, d_v$，且 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$，则 $\chi(G) \leq \max\limits_i \min\{d_i + 1, i\}$

证明：
设 d_i 对应顶点 v_i，顶点集 $V_i = \{v_1, v_2, \cdots, v_i\}$
利用贪心算法，依次考虑 G 的顶点导出子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_v] (= G)$

1. 对于 $G[V_1]$：图中只有顶点 v_1，故 $\chi(G[V_1]) = 1 \leq min\{d_1+1, 1\}$ 成立
2. 假设对于 $G[V_{k-1}]$，$\chi(G[V_{k-1}]) \leq \max\limits_{1\leq i\leq k-1} min\{d_i+1, i\}$ 成立

   对于 $G[V_k]$，相当于在 $G[V_{k-1}]$ 中加入顶点 v_k 和部分与之相关联的边（另一端顶点在 V_{k-1} 中）

   i. 由于 $G[V_k]$ 中顶点个数为 k 个，因此最多需要 k 中颜色，故：$\chi(G[V_k]) \leq \max\{\chi(G[V_{k-1}]), k\}$
   ii. 由于加入顶点 v_k 的度数为 d_k，则 $G[V_k]$ 中最多有 d_k 个顶点与 v_k 相邻，显然邻点使用颜色数不超过 d_k 种，因此可用第 d_k+1 中颜色对 v_k 着色，故：$\chi(G[V_k]) \leq \max\{\chi(G[V_{k-1}]), d_k+1\}$

   故：$\chi(G[V_k]) \leq \max\{\chi(G[V_{k-1}]), \min\{d_k+1, k\}\}$
   $$\leq \max\{\max_{1\leq i\leq k-1} min\{d_i+1, i\}, \min\{d_k+1, k\}\} = \max_{1\leq i\leq k} min\{d_i+1, i\}$$

综上，$\chi(G) = \chi(G[V_v]) \leq \max\limits_{1\leq i\leq v} min\{d_i+1, i\}$

6

> 证明：$\chi(G)+\chi(G^c)\le v+1$

证明：对 v 归纳

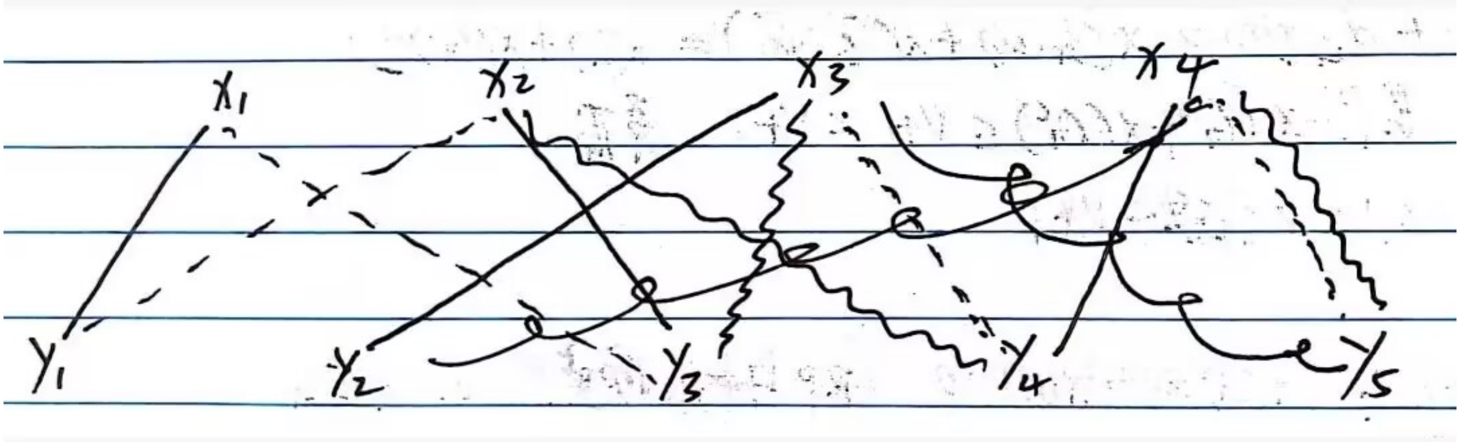
1. 当 $v=1$ 时，G 只有一个顶点，显然 $\chi(G)=1$，$\chi(G^c)=1$，故 $\chi(G)+\chi(G^c)=2\le v+1$ 成立
2. 假设当 $v<k$ 时，$\chi(G)+\chi(G^c)\le v+1$ 成立
   - 当 $v=k$ 时，对 G 中任一顶点 u，设 $G'=G-u$
     由归纳假设：$\chi(G')+\chi(G'^c)\le(k-1)+1=k$
     在 G' 中加入 u 得到 G 时，色数增加不会超过 1
     故：$\chi(G)\le\chi(G')+1$，同样：$\chi(G^c)\le\chi(G'^c)+1$
     所以：$\chi(G)+\chi(G^c)\le\chi(G')+1+\chi(G'^c)+1\le k+2$
   - 下面证明上式等号无法同时取到，假设等号成立
     即：$\chi(G)+\chi(G^c)=k+2$
     且：$\chi(G)=\chi(G')+1$，$\chi(G^c)=\chi(G'^c)+1$
     说明 u 的邻点用完 $\chi(G')$ 种颜色
     即：$d_G(u)=\chi(G')=\chi(G)-1$，$d_{G^c}(u)=\chi(G'^c)=\chi(G^c)-1$
     由于原图加补图等于完全图：$k-1=d_G(u)+d_{G^c}(u)=\chi(G)+\chi(G^c)-2$
     即：$\chi(G)+\chi(G^c)=k+1$，与假设矛盾
   - 故上面不等式至少有一个为严格小于号
     即：$\chi(G)+\chi(G^c)<k+2\le k+1$

综上，$\chi(G)+\chi(G^c)\le v+1$ 成立

14

> 设有 4 名教师 $x_1,x_2,\cdots,x_4$ 给 5 个班级 $y_1,y_2,\cdots,y_5$ 上课，某天的教学要求如下：
>
> $$A=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}y_1&y_2&y_3&y_4&y_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&1&2\end{pmatrix}\end{array}$$
>
> (1) 这一天最少需要安排多少课时？试排出这样的课表
> (2) 不增加课时数的情况下，试排出一个使用教室最少的课表

(1) $\Delta(G)=4$，最少需要 4 个课时



	1	2	3	4
x_1	y_1	y_3		
x_2	y_3	y_1	y_4	
x_3	y_2	y_4	y_3	y_5
x_4	y_4	y_5	y_5	y_2

(2) $\lceil\frac{13}{4}\rceil=4$ 个教室，上面课表每个老师安排一个固定教室即可

16

> 证明：若一个平面图的平面嵌入是 Euler 图，则它的对偶图是二分图

设图 G 为该平面嵌入 Euler 图，则 G 可表示为无公共边的圈之并
每个圈内部为一个面，对应对偶图 G^* 的一个顶点，把这些顶点划分到 X 集合中，把 G 中余下的面对应 G^* 中的顶点划分到 Y 集合中

1. 显然 $X\bigcap Y=\emptyset,X\neq\emptyset,Y\neq\emptyset$
2. 由于 G 中圈之间无公共边，即圈的内部面之间无公共边，故 G^* 中 X 集合中的顶点之间无公共边
3. 假设存在两个顶点 $u,v\in Y\quad s.t.\quad uv\in E(G^*)$
   则 u,v 对应 G 中的两个面 f_1,f_2 之间存在公共边 e
   显然 e 属于且仅属于某个圈 C
   即 f_1,f_2 一个为 C 的内部面，另一个为 C 的外部面
   即对应 G^* 中的顶点一个属于 X，另一个属于 Y，与 $u,v\in Y$ 矛盾
   故 Y 集合中顶点之间无公共边

综上，G^* 为二分图

18

> 证明：一个平面图 G 是 2-面可着色的当且仅当 G 是 Euler 图

证明：
由定理7.6：G 是 2-面可着色的当且仅当对偶图 G^* 是可 2-顶点着色的
"⇒"：
若 G 是 2-面可着色的，则对 $\forall v \in V(G)$，v 关联的面数为偶数
否则假设 $\exists v \in V(G)$ 使得 v 关联的面为奇数，考虑对偶图 G^*
每个与 v 关联的面在 G^* 中对应一个顶点，这些关联的面之间顺次存在以 v 为端点的公共边，对应 G^* 中对应顶点顺次连接，最后形成一个圈
v 关联的面为奇数，即圈的顶点为奇数（可能由重边），即对偶图 G^* 中存在奇圈，与 G^* 可 2-顶点着色矛盾
故 G 中每个顶点的度数为偶数，即 G 为 Euler 图
"⇐"：
G^* 是可 2-顶点着色的等价于 G^* 是二分图（顶点着色性质2）
上一题已证明：G 是 Euler 图，则其对偶图是二分图，故 G 是 2-面可着色的