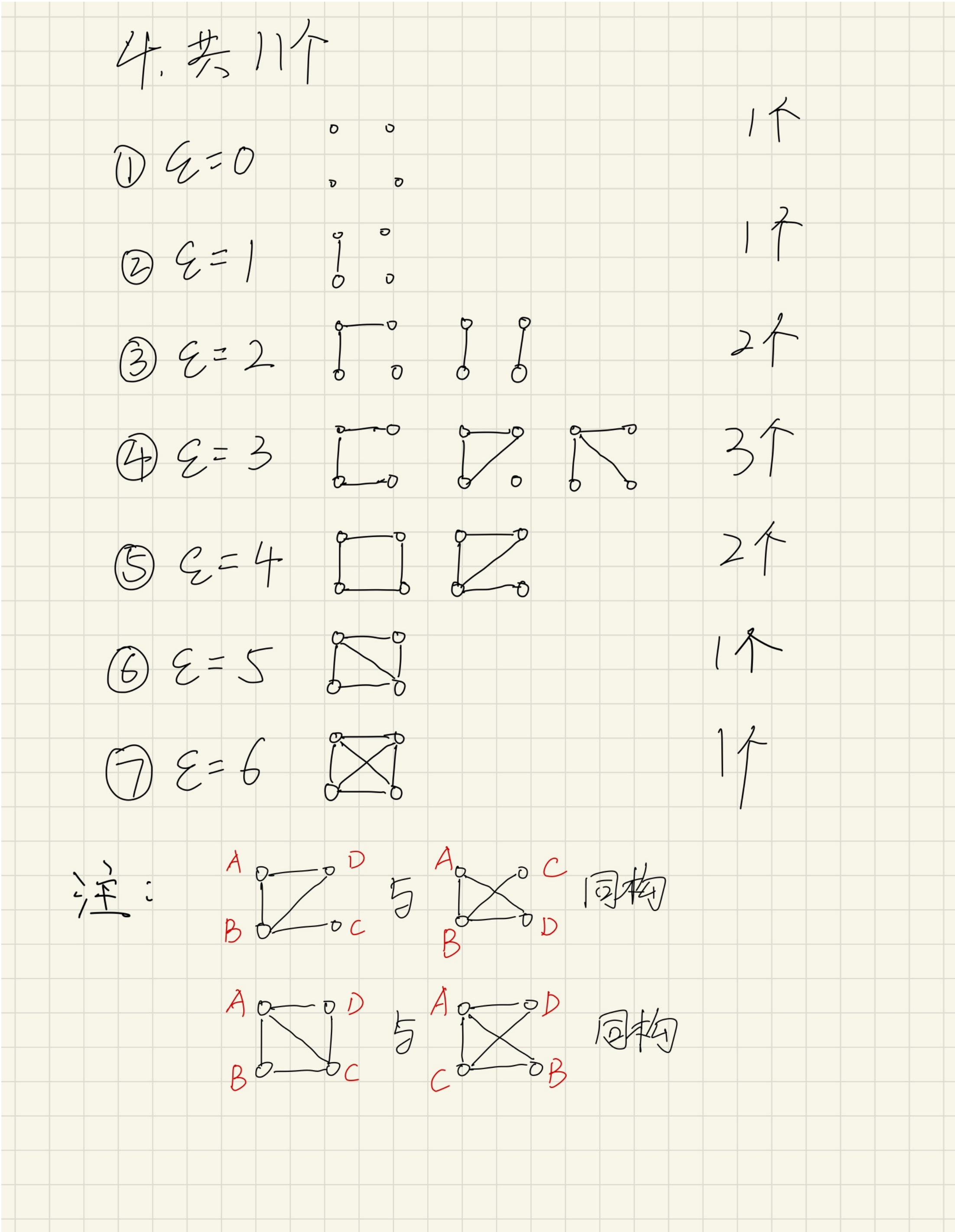
图论第一次作业参考答案

1.3

> 画出所有四个顶点不同构的简单图。



1.4

> 任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多。

证：将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，因此问题等价于：在对任意满足$V(G) \geq 2$的图G中，存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i) = deg(v_j)$.

反证法：假设对任意$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，都有$deg(v_i) \neq deg(v_j)$，即deg(v)在G中共有|V(G)|个不同的取值。

又deg(v)取值范围为0至|V(G)|-1，恰好有|V(G)|个可能的取值，故每种取值恰好出现一次，分别为0, 1, ..., |V(G)|-1

所以存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得 $deg(v_i) = 0, \quad deg(v_j) = |V(G)| - 1$

即v_i与所有点都不相连，v_j与所有点都相连，矛盾，故假设不成立。

得证。

1.8

> 设G是图，给定$V(G)$的非空真子集V'，记k为一个端点在V'中，另一个端点在$V(G) - V'$中的边数。若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数。

设ε是V'的顶点导出子图的边的个数，V_o'和V_e'是V'中顶点度数为奇数和偶数的集合，则k有：

$$k = \sum_{v \in V'} deg(v) - 2\varepsilon = \sum_{v \in V_o'} deg(v) + \sum_{v \in V_e'} deg(v) - 2\varepsilon$$

因为 2ε 和 $\sum_{v \in V_e'} deg(v)$ 一定是偶数，所以k的奇偶只和 $\sum_{v \in V_o'} deg(v)$ 有关：若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数。

1.13

> 任给图G，都满足$\delta(G) \leq 2\epsilon(G)/\nu(G) \leq \Delta(G)$。

由定理得：

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\epsilon(G)$$

又因为：

$$\nu\delta \leq \sum_{v \in V(G)} deg(v) \leq \nu\Delta$$

可得上述证明式子。