第九章

5

> 证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数

证明：
根据推论9.3，最大流的流量等于最小截的截量
网络中任一截的截量：

$$C(S,\bar{S})=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$$

显然，若网络中每条边的容量均为整数，则最小截的截量也一定是整数，因此最大流的流量也一定是整数

7

> 在图9.16所示的网络中，除了边有容量外，源 s 与汇 t 没有容量，而其余的顶点都有容量，求此网络的最大流

将所有含容量的顶点拆分为两个相邻顶点，边的容量设置为原来顶点的容量，流入的边指向第一个顶点，流出的边从第二个顶点指出

设初始流为 0，依次找如下可增载轨道，然后构造新的流函数：

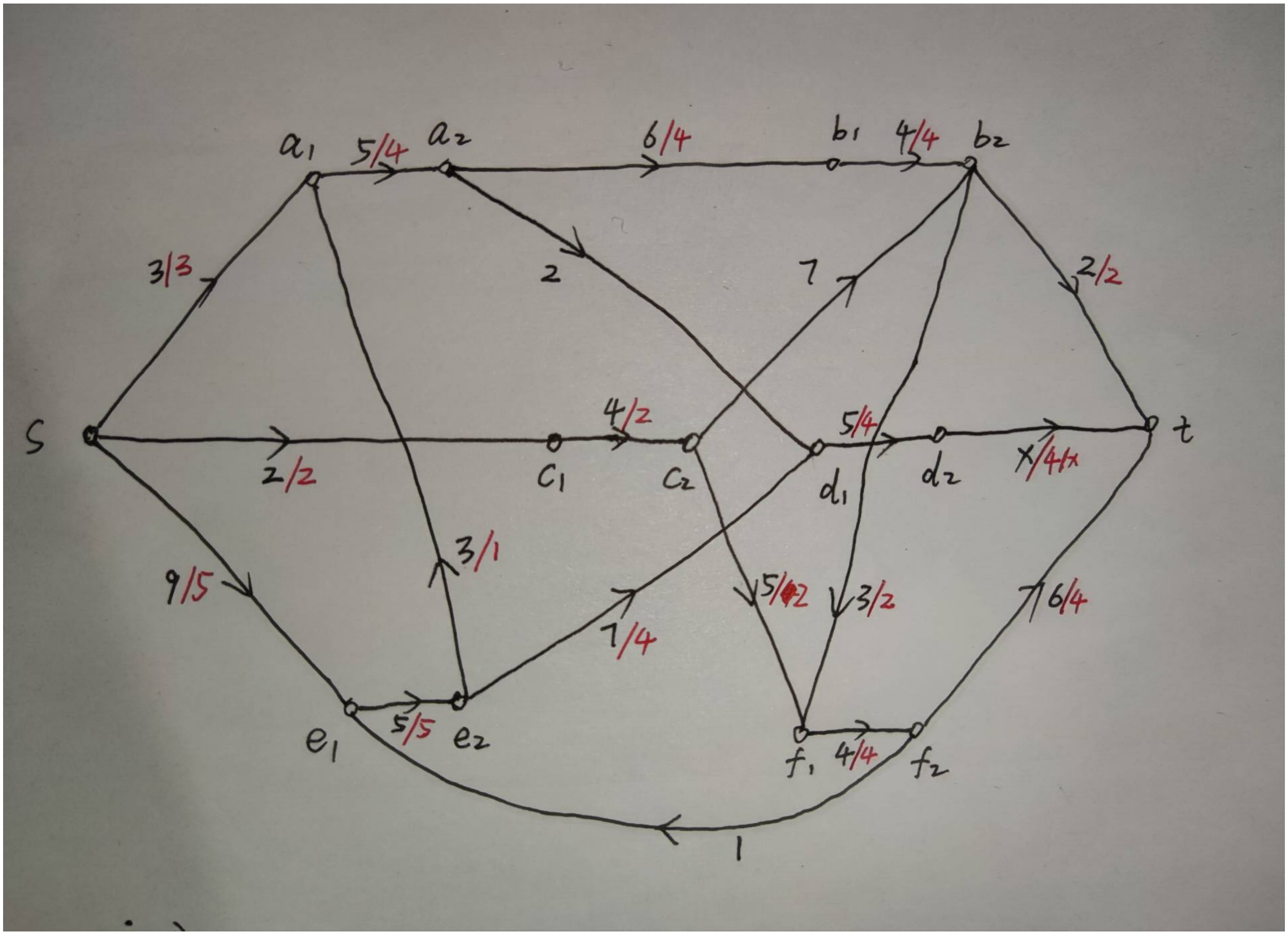
$$P(s,t)=sc_1c_2f_1f_2t \qquad l(P)=2$$

$$P(s,t)=sa_1a_2b_1b_2t \qquad l(P)=2$$

$$P(s,t)=sa_1a_2b_1b_2f_1f_2t \qquad l(P)=1$$

$$P(s,t)=se_1e_2a_1a_2b_1b_2f_1f_2t \qquad l(P)=1$$

最后找：$P(s,t)=se_1e_2d_1d_2t$
若 $x\geq 4$，则 $l(P)=4$，$Val(f^*)=2+2+1+1+4=10$
若 $x<4$，则 $l(P)=x$，$Val(f^*)=2+2+1+1+x=6+x$



9

> 证明：若供需约束的网络 N 存在可行流 f，则其附加网络 N' 上一定存在流函数 f'，使得任给 $1 \le j \le n$，f' 使得边 (y_j, y_0) 都满载

证明：
若 N 存在可行流 f，则任给 $1 \le j \le n$，都有 $\sum\limits_{e\in\alpha(y_j)} f(e) - \sum\limits_{e\in\beta(y_j)} f(e) \ge \rho(y_j)$
在 N' 中，对 $\forall 1 \le j \le n, e \in (y_j, y_0)$ 都有 $c'(e) = \rho(y_j)$
$\forall e \in E(D)$，令 $f'(e) = f(e)$
则 $\sum\limits_{e\in\alpha(y_j)} f'(e) - \sum\limits_{e\in\beta(y_j)} f'(e) = \sum\limits_{e\in\alpha(y_j)} f(e) - \sum\limits_{e\in\beta(y_j)} f(e) \ge \rho(y_j) = c'(e)$
说明对 N' 上每条边满载或过载

故利用算法9.1，修改为可减载轨道算法，调用Ford-Fulkerson 算法即可，算法使用的量重新定义如下：

$P(s,u)$上每条边 e 的可减载量 $l(e)$ 为：

$$
l(e)=\begin{cases} f(e)-c(e) & e\text{是正向边} \\ +\infty & e\text{是反向边} \end{cases}
$$

而 $P(s,u)$ 的可减载量 $l(P)$ 则定义为：

$$
l(P)=\min_{e\in E(P)} l(e)
$$

引理9.1定义新的流函数 $\bar{f}:E(D)\rightarrow R$ 修改为：

$$
\bar{f}(e)=\begin{cases} f(e)-l(P) & e\text{是正向边} \\ f(e)+l(P) & e\text{是反向边} \\ f(e) & e\text{其他} \end{cases}
$$

重复执行可减载轨道算法，找到可减载轨道，修改流函数，直到所有过载边都变为满载边