图论第六次作业参考答案

5.19

> 证明：Kuhn-Munkreas算法中修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标。

证明：
修改的可行顶标

$$\hat{l}=\begin{cases} l(v)-\alpha_l & \text{v} \in \text{S} \\ l(v)+\alpha_l & \text{v} \in \text{T} \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

$\alpha_l=min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-\omega(x,y)\}$

对$\forall v\in S,u\in Y$

- 若$u\in T$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)+\alpha_l=l(v)+l(u)\geq\omega(u,v)$$

- 若$u\notin T$，因为有$\alpha_l\leq l(v)+l(u)-\omega(u,v)$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)\geq l(v)+l(u)-(l(v)+l(u)-\omega(u,v))=\omega(u,v)$$

对$\forall v\notin S,u\in Y$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)+\hat{l}(u)\geq l(v)+l(u)=\omega(u,v)$$

综上，Kuhn-Munkreas算法修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标。

5.20

> Kuhn-Munkreas算法修改顶标后，由可行顶标$\hat{l}$ 得到相等子图$G_{\hat{l}}$，证明在算法的第(3)步，在$G_{\hat{l}}$的上找的顶点子集"T"包含了在G_l上找的顶点子集"T",且至少多一个顶点。

观察任意边修改顶标前后的$e=(x_i,y_j)$的存在性以及对T的影响：

- 若$x_i\in S,y_j\in T$或$x_i\notin S,y_j\notin T$，则e在$G_{\hat{l}}$中当且仅当e在G_l中，所以不影响u的交错轨道。
- 若$x_i\notin S,y_j\in T$或$x_i\in S,y_j\notin T$，因为u的交错轨道不经过e，所以并不会减小T。

以上证明了$G_{\hat{l}}$的T集合包含G_l的T，下面证明$G_{\hat{l}}$的T至少比G_l的大1。

设u为S中那个未匹配的顶点，由$\hat{l}$的构造过程可知，$\forall x_i\in S,y_j\notin T$
$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)-\alpha_l+l(y_j)=l(x_i)+l(y_j)-min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-\omega(x,y)\}\geq w(x_i,y_i)$

且至少有一对x_i,y_j使得等号成立，不妨设 $x_a\in S,y_b\in Y-T,\hat{l}(x_a)+\hat{l}(y_b)=w(x_a,y_b)$，

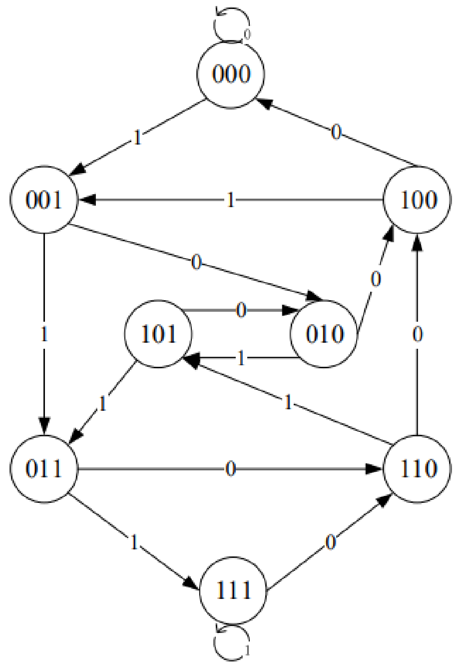
若$x_a=u$，则为u找到了一个匹配，接下来可以考虑其他未匹配顶点直至算法结束。

否则，因为x_a出现在u开头的交错轨道上，且x_a在这条轨道的前一条边为匹配边（否则 $u...x_a$ 是一条可增广轨道，矛盾），所以新的一条边(x_a,y_b)可以加入到u的交错轨道中，即$G_{\hat{l}}$的T至少比G_l的多了一个 y_b 。

6.4

> 如何将16个二进制数字（8个0，8个1）拍成一个圆形，使得16个长为4的二进制数在其中都出现且只出现一次。

转化成图论问题。
定义顶点$V(G)=\{所有3位二进制数\}$，定义$E(G)=\{u_iv_j\mid u_i可以通过左移位得到v_j,i,j=1,...,8\}$，构造图$G$。



每个3位二进制数向左移位，可在其最右补0或1，则对每个顶点v都有$deg^+(v) = deg^-(v) = 2$。
由定理6.2可知图G为Euler图。
根据其中一条Euler回路可构造出排列：

$$000 \xrightarrow{0} 000 \xrightarrow{1} 001 \xrightarrow{0} 010 \xrightarrow{1} 101 \xrightarrow{0} 010 \xrightarrow{0} 100 \xrightarrow{1} 001 \xrightarrow{1} 011 \xrightarrow{0} 110 \xrightarrow{1} 101 \xrightarrow{1} 011 \xrightarrow{1} 111 \xrightarrow{1} 111 \xrightarrow{0} 110 \xrightarrow{0} 100 -$$

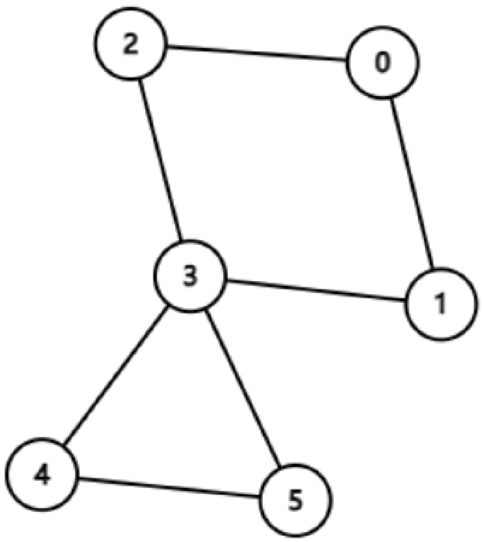
所以可得一个满足题意的序列0101001101111000。

6.6

> 证明或否定：(1)每个Euler二分图都有偶数条边；(2)有偶数个顶点的每个简单图有偶数条边。

（1）正确，因为G是Euler图，G可以表示为无公共边的圈的并，因为G是二分图，G中无奇圈， 所以G被表示为无公共边的偶圈的并，所以G有偶数条边。

（2）错误，反例如图所示：



6.8

> 求图6.28的一条最优投递路线。

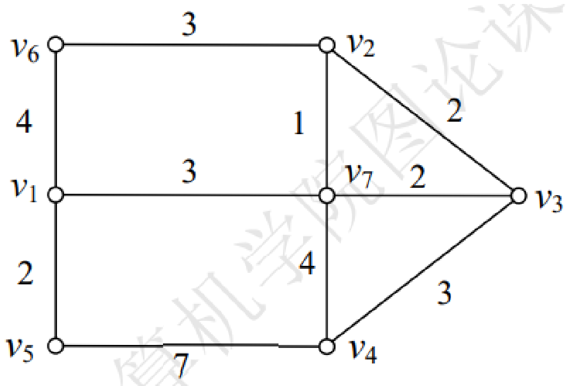


图 6.28: G

使用EJ算法。

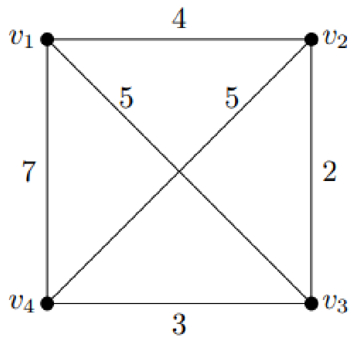
（1）图G的奇度顶集$V_0=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$|V_0|=4$.

（2）由$Dijkstra$算法：

$d(v_1,v_2)=4,d(v_1,v_3)=5,d(v_1,v_4)=7$

$d(v_2,v_3)=2,d(v_2,v_4)=5,d(v_3,v_4)=3$

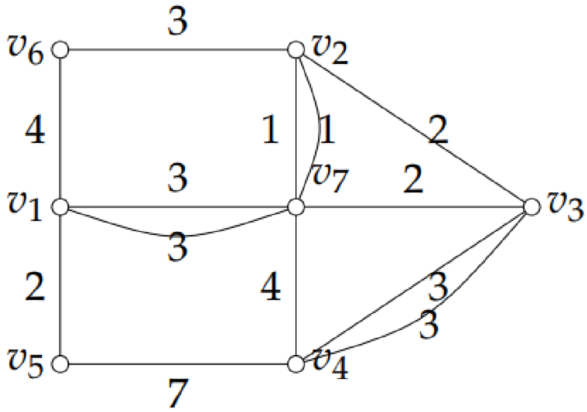
（3）构成带权完成图K_4：



（4）上图K_4的最佳匹配$M=\{v_1v_2,v_3v_4\}$.

在G中v_1,v_2间最短轨为$P(v_1,v_2)=v_1v_7v_2,P(v_3,v_4)=v_3v_4$.

（5）Euler图G^*如右图：



（6）在图G^*找到Euler回路即为最优投递路线。

不妨设出发点（邮局）为v_6，则其中一条Euler回路为：

$v_6v_2v_3v_4v_3v_7v_2v_7v_1v_7v_4v_5v_1v_6$

6.10

> 证明图6.29所示的两个图都不是Hamilton图。

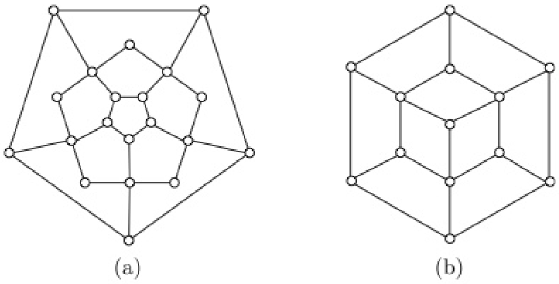


图 6.29

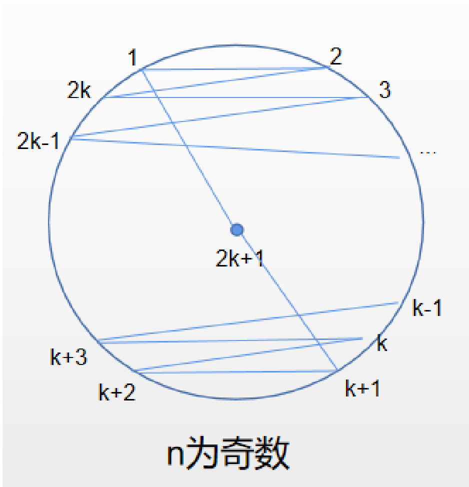
(1)取图中度为4的5个顶点作为S，$|S|=5$，$w(G-S)=7>|S|$，故不是Hamilton图。

(2)取图中度为4的3个顶点，再取度为3的与之不相邻的3个顶点作为S，$|S|=6$，$w(G-S)=7>|S|$，故不是Hamilton图。

6.12

> 求K_n中无公共边的Hamilton圈的个数。

（1）n为奇数 ($n>=3$) 时：将$2k+1$个顶点如图所示放置。



$1-2-2k-3-(2k-1)-\ldots-(k+1)-(2k+1)-1$是一个Hamilton圈

将所有点旋转 $360^\circ/(n-1)$ 对于任意点v旋转后 所有的点都与新的点相邻

这样的旋转可以进行$k-1$次，所以K_n中无公共边的Hamilton圈的个数为$C(K_n)=k=(n-1)/2$个

（2）n为偶数时，K_n的无公共边的Hamilton圈的个数不少于K_{n-1}（任何一个K_{n-1}的Hamilton圈可以扩展为K_n的一个Hamilton圈）

所以$C(K_n)\geq C(K_{n-1})=(n-2)/2$，同时最多有$(n(n-1)/2)/n=(n-1)/2$个无公共边的Hamilton圈，所以n为偶数时$C(K_n)=(n-2)/2$个

6.16

> 若G是二分图，但其顶点的划分X与Y不均匀, 即$|X|\neq|Y|$。则G 是不是Hamilton图？ 为什么?

不是。

若G是Hamilton图，则G中存在Hamilton圈 C。C 中的顶点在X,Y中交替出现，则$|X|=|Y|$，矛盾。

所以，G 不是Hamilton图。

6.20

> 今有 v 个人, 已知他们中的任何两人合起来认识其余的 v - 2 人. 证明: 当 v >= 3 时, 这 v 个人能排成一列, 使得中间任何人都认识两边的人, 而两头的人认识左边 (或右边) 的人. 当 v >= 4 时, 这 v 个人能排成一个圆圈, 使得每个人都认识两边的人

用以下规则作图G:

- 每个人对应一个点v_i，$V(G)=v$
- 若两人i,j认识，则$e(i,j)\in E(G)$

下面证明$\forall u, deg(u)\geq v-2$。

假设$\exists u, deg(u)\leq v-3$,那么有$w1,w2$使得$e(w1,u)\notin E(G)$且$e(w2,u)\notin E(G)$。

则$w1$与$w2$两人并不能认识其余的 v - 2 人（不认识u），与题设矛盾。

所以$\forall u, deg(u)\geq v-2$，故 $\forall u,v, deg(u)+deg(v)\geq 2v-4$。

- 当$\nu\geq 3, deg(u)+deg(v)\geq 2v-4\geq v-1$。根据定理6.7，G存在Hamlton轨道，该轨道即为所求。

- 当$\nu \geq 4, deg(u) + deg(v) \geq 2v - 4 \geq v$ 。根据定理6.7，G存在Hamlton圈，该圈即为所求。

6.22

> 5 阶完全加权图如图6.30 所示。
>
> (1) 用最邻近法求以a 为起点的旅行商问题的近似解;
>
> (2)用最小生成树法求以a，b 为起点的旅行商问题的近似解;
>
> (3)用最小权匹配法求旅行商问题的近似解;

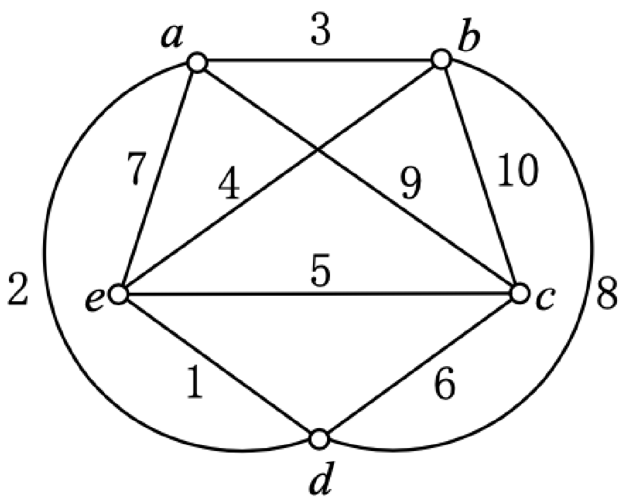


图 6.30: G

(1) 用最邻近法求以a 为起点的旅行商问题的近似解;

从a出发， 形成轨道$P_1 = a$ 。

从$V(G) - \{a\}$中，选取与a 最近的顶点d 。形成 $P_2 = ad$

从$V(G) - \{a, d\}$中，选取与d 最近的顶点e 。形成 $P_3 = ade$

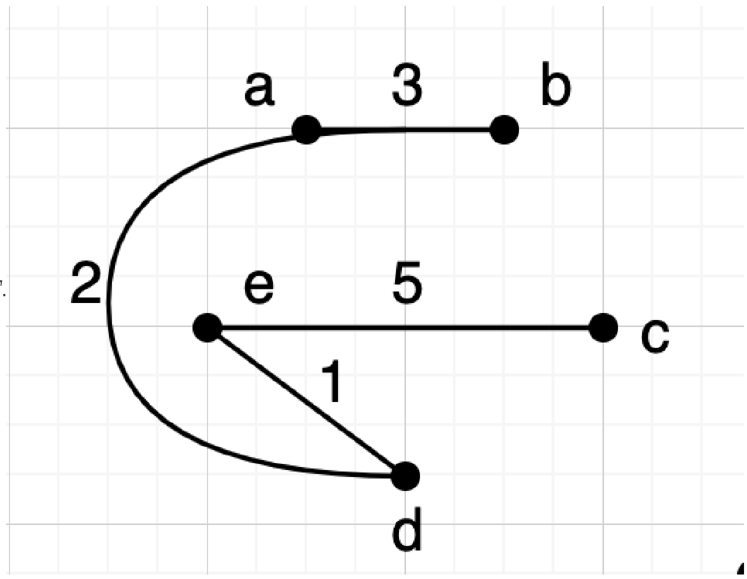
从$V(G) - \{a, d, e\}$中，选取与e 最近的顶b 。形成 $P_4 = adeb$

从$V(G) - \{a, d, e, b\}$中，选取与b 最近的顶点c 。形成 $P_5 = adebc$

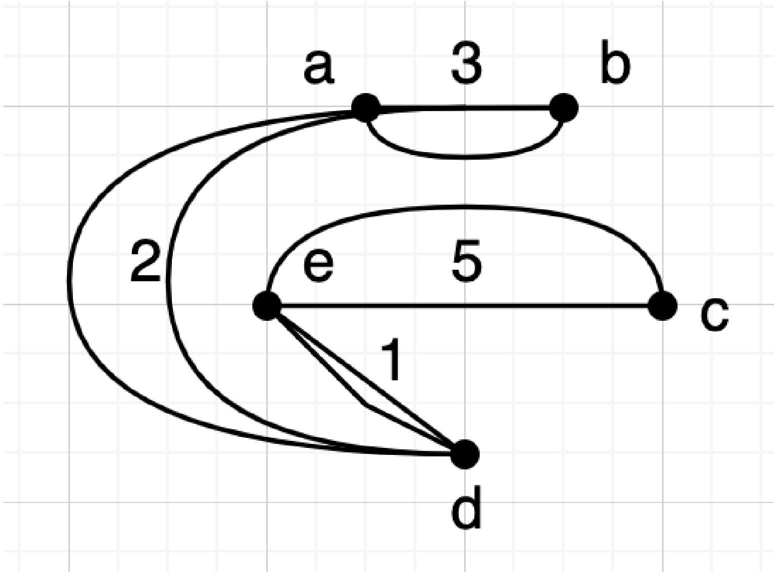
得Hamilton圈$H = adebca$，$W = 26$ 。

(2)用最小生成树法求以a，b 为起点的旅行商问题的近似解;

1. 求G 的一颗最小生成树T.



2. 将T 各边加平行边得G^*

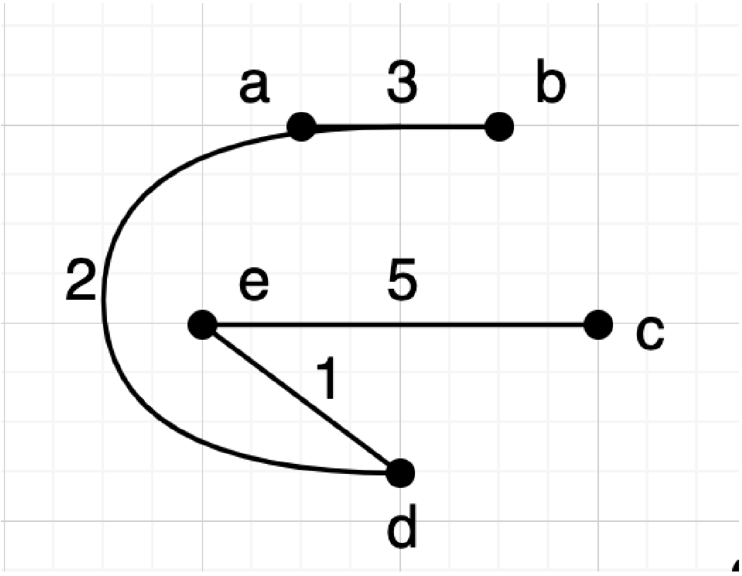


从a 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_a = adecedaba$ ，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_a = adecba$，$W_a = 21$ 。

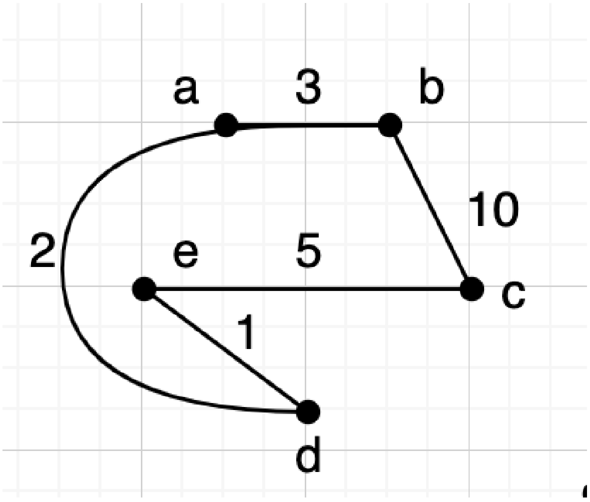
从b 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_b = badecedab$ ，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_b = badecb$， $W_b = 21$ 。

(3) 用最小权匹配法求旅行商问题的近似解;

1. 求G 的一颗最小生成树T.



2. T 中奇度数顶点得集合为$V_o = \{b, c\}$，V_o的导出子图中总权最小得完备匹配$M = \{bc\}$，M 加入 T 中得G^*



3. 在G^* 中求从a 出发得一条欧拉回路$C_a = adecba$
4. 在G 中， 从a 出发，沿C_a 中得边按 "抄近路" 走出Hamilton圈$H_a = adecba$，$W = 21$ 。

定理6.6的证明

> 简单图G是Hamilton图，当且仅当它的闭包c(G)是Hamilton图

必要性：显然

充分性：假设G的闭包是Hamilton图，证明G也是Hamilton图

不断删除在G的闭包但不在G上的边并使用引理6.1，得证。

推论6.3的证明

> 设G使v(G)>=3的简单图，若c(G)是完全图，则G是Hamilton图

c(G)是完全图⇒c(G)是Hamilton图，根据定理6.6，G也是Hamilton图。

定理6.10的证明

设T'是G中最短Hamilton圈H_0删除任意一条边后得到的G的生成树，则$W(T) \leq W(T') \leq d_0$。

设$G[V_0] = K_{2k}$中最短的Hamilton圈的权为d_0'，由于G满足三角不等式所以$d_0' \leq d_0$。

设W(M)为$G[V_0]$中总权最小的完备匹配M的边权之和，则$W(M) \leq d_0'/2 \leq d_0/2$。

因此$d \leq W(C) = W(T) + W(M) < d_0 + d_0/2 = 3d_0/2$。

证毕。