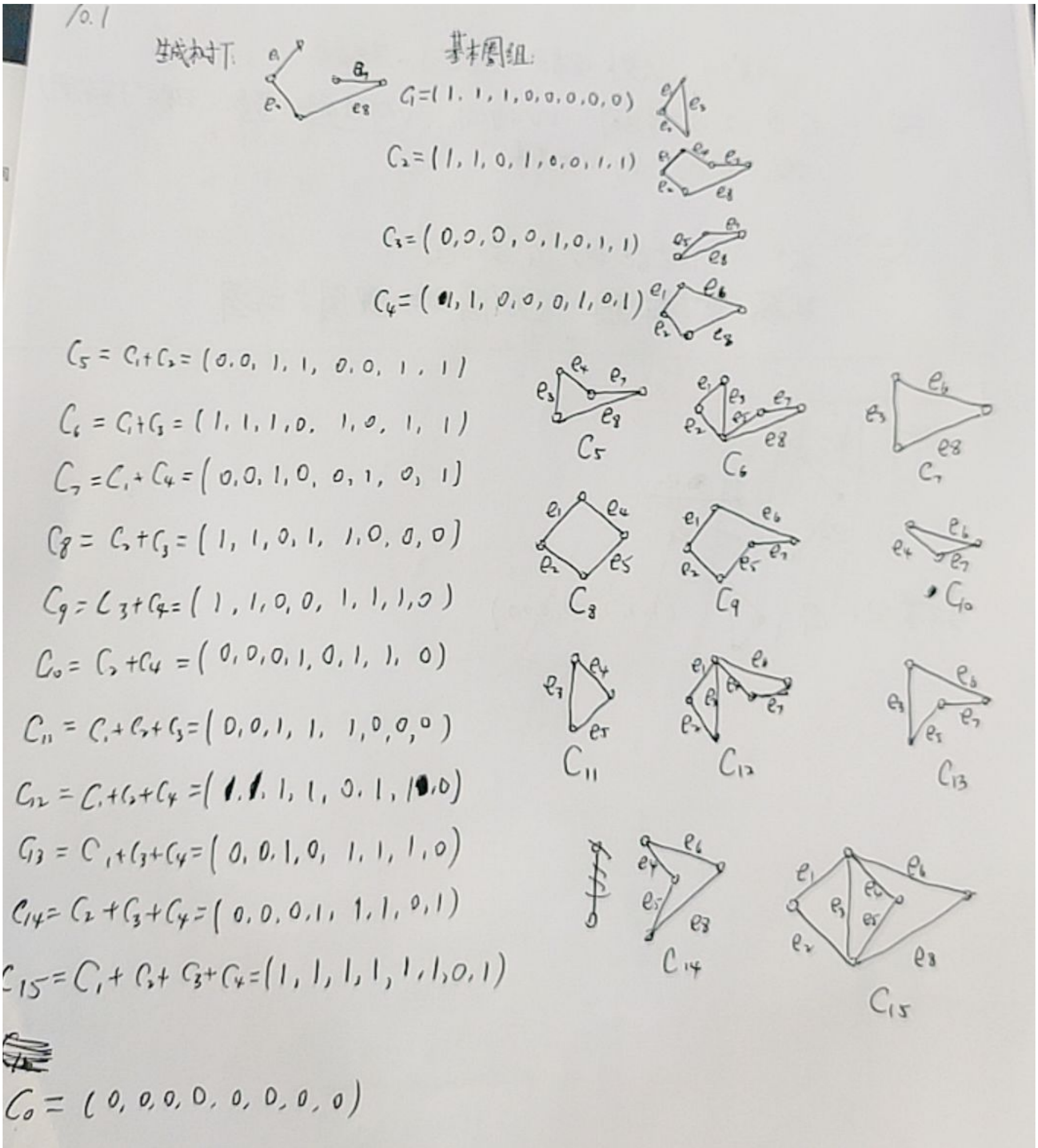
图论第十次作业

10.1

> 给出图10.25中图G的一颗生成树T，求出G关于T的一组基本圈组和圈空间的C(G)中的所有向量，并给出图示。



10.3

> 证明定理 10.5.

我们将G中的边按照如下的方式编号：先将$S_1, S_2, ... S_{v-1}$中在T上的那条边分别标记为$e_1, e_2, ... e_{v-1}$，然后再将不在T上的边 任意编号，前v-1个元素表示T的边，后e-v+1个元素表示非T的边，则有：

$$S_1=(1,0,\dots,0,*,\dots,*)$$
$$S_2=(0,1,\dots,0,*,\dots,*)$$
$$\dots$$
$$S_{v-1}=(0,0..1,*,\dots,*)$$

给定一组常数$k_1,k_2,\dots k_{v-1}$，若$k_1S_1+k_2S_2+\dots+k_{v-1}S_{v-1}=(k_1,k_2,\dots,k_{v-1},*,*,\dots,*)$，则 必有$k_1=k_2=,\dots=k_{v-1=0}$。所以$S_1,S_2,\dots,S_{v-1}$线性无关。

另一方面，任给$S\in S(G)$，设S上属于T的边为$e_{i_1},e_{i_2},\dots e_{i_t}$，则有
$S+S_{i_1}+S_{i_2}+\dots+S_{i_t}=(0,0,\dots,0,*,*,\dots,*)$

$S+S_{i_1}+S_{i_2}+\dots+S_{i_t}\in S(G)$但没有树T上的边，所以其不是断集向量只能是零向量。故S能表示为$S_1,S_2,\dots,S_{v-1}$的线性组合。

10.4

> 证明：G是Euler图，当且仅当任给 $S\in S(G)$，S中非零分量有偶数个。

必要性证明：

设$S=(V',\overline{V'})$，对于G的一个圈C来说，C必然与$(V',\overline{V'})$有偶数条公共边，而G是Euler图，G是无公共边的圈之并，所以G与S有偶数条公共边，从而S中非零分量有偶数个。

充分性证明：

若G不是Euler图，则G中存在一个顶点v_0使得$deg(v_0)$为奇数，取$V'=v_0$，$\overline{V'}=V-v_0$，则S非零分量有奇数个，矛盾，故G是Euler图。

10.6

> 已知A=$\begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,0\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix}$，求$A^{1001}$=$(a_{ij}^{1001})_{3\times3}$中的$a_{22}^{1001}$

$a_{22}^{1001}=0$，容易看出对于A^k，k为奇数，$a_{22}^{1001}=0$都成立

10.9

> 已知图G的基本圈矩阵为 $C_f(G)$
>
> $$C_f(G)=\begin{pmatrix}e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8\\1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\\1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\\0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\\1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\end{pmatrix}$$

> 求G的基本割集矩阵$S_f(G)$

变换矩阵中列的位置，将基本圈矩阵写为$(I_{\epsilon-v+1},C)$的形式：

$$C_f(G)=\begin{pmatrix}e_2\ e_4\ e_5\ e_7\ e_1\ e_3\ e_6\ e_8\\1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\\0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\\0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\\0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\end{pmatrix}$$

则根据推论10.1,图G的基本割集矩阵为：

$$
S_f(G) = \begin{pmatrix} e_2\ e_4\ e_5\ e_7\ e_1\ e_3\ e_6\ e_8 \\ 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}
$$

10.10

> 已知图G 的基本关联矩阵为:
>
> $$B_f(G) == \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,0 \end{pmatrix}$$

> 求G的基本圈矩阵$C_f(G)$,和基本割集矩阵 $S_f(G)$

$$
C_f(G) = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
S_f(G) = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

10.20

> 已知图G的基本关联矩阵为
>
> $$B_f(G) == \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1 \end{pmatrix}$$

> 在不画出图的前提下，回答以下问题：
>
> （1）G是否是连通图
>
> （2）G是否是欧拉图
>
> （5）C(G)是多少维线性空间
>
> （6）G共有几个圈，为什么

(1)

显然该基本关联矩阵的秩为3，根据推论10.2，该图只有一个连通片，即G是连通图

(2)

$deg(v_2) = 3$是奇数，所以G不是欧拉图

(3)

根据定理10.3，C(G)的维数=$\epsilon - v + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$

(4)

3个圈 圈空间大小为$2^2 = 4$,减去一个全0向量，有三个圈