图论第四次作业参考答案

3.27

> 证明：当k是奇数时，$H_{n,k}$是k-连通图。

证明：

设$k=2r+1$，只需证明$H_{n,2r+1}$中没有少于$2r+1$个顶点的顶割集。

假设V'是一个$|V'|<2r+1$的图的顶点子集。

1. 当$|V'|<2r$时，书上已证V'不是$H_{n,2r}$的顶割集，自然也不是$H_{n,2r+1}$的顶割集。
2. 当$|V'|=2r$时，设V'是$H_{n,2r+1}$的一个顶割集，顶点i,j分属$H_{n,2r+1}-V'$的两个连通片。考虑$H_{n,2r+1}$的两个顶点子集：

$$S=\{i,i+1,\ldots,j-1,j\}$$

$$T=\{j,j+1,\ldots,i-1,i\}$$

   其中的加法取mod n。

   - 若$|V'\cap S|$和$|V'\cap T|$中有一个小于r成立，则由书上证明知，顶点i,j在$H_{n,2r+1}-V'$中连通，矛盾。
   - 则$|V'\cap S|=|V'\cap T|=r$。
     - 若S或T中，有一个集合(例如S)所包含的V'的r个顶点不是相继连成段，则$S-V'$中存在(i,j)轨道，矛盾。
     - 则S与T中，所包含的V'的r个顶点都是相继连成段的。此时$S-V'$被分成两段，含顶点i的段记为S_1，含顶点j的段记为S_2。同样，$T-V'$被分成两段，含顶点i的段记为T_1，含顶点j的段记为T_2。则$V-V'$被分成两段，$S_1\cup T_1$含顶点i，$S_2\cup T_2$含顶点j。这两段本身是连通的，且$S_1\cup T_1$段的中间一点i_0与$S_2\cup T_2$段的类似点j_0满足：

$$j_0=\begin{cases} i_0+\frac{n}{2}, & n\text{是偶数}\\ i_0+\frac{n+1}{2}, & n\text{是奇数}\end{cases}$$

       由构造可知，i_0与j_0间有边相连。则顶点i,j在$H_{n,2r+1}-V'$中连通$(i,\ldots,i_0,j_0,\ldots,j)$，矛盾。

   综上，$H_{n,2r+1}$是$2r+1$连通图。

3.28

> 设G是满足$\nu(G)\geq 3$的k-边连通图，则任给$e\in E(G)$，$G\cdot e$仍是k-边连通图。

证明：

法一：设$e=uv$，收缩后的点为w，$E'\subseteq E(G\cdot e)$且$|E'|<k$，E为E'在G中的映射。

因为$\kappa'(G)=k$，所以$G-E$连通。对G中任意不同时关联e的两点m,n及其在$G-E$中的路径$p(m,n)$：

- 若$e \in p(m,n)$，即$p(m,n) = m \dots e_i ueve_j \dots n$，则在$G \cdot e$中有$p'(m,n) = m \dots e_i we_j \dots n$，故$m,n$在$G \cdot e$中仍连通。
- 若$e \notin p(m,n)$，则在$G \cdot e$中路径无影响，m,n仍连通。

综上，$G \cdot e - E'$连通，即任意删除$k-1$条边后，$G \cdot e$仍连通，故$G \cdot e$为k-边连通图。

法二：对$\forall E \subseteq E(G \cdot e)$且$|E| < k$，有$G \cdot e - E = (G - E) \cdot e$，

因为$\kappa'(G) = k$，所以$G - E$连通，则$(G-E) \cdot e$连通，$G \cdot e - E$也连通，故$G \cdot e$为k-边连通图。

4.7

> 设G是v个顶点ϵ条边的简单平面图，$\epsilon < 30$,证明存在顶点$v \in V(G)$，使得$deg(v) \leq 4$。

证明：

反证法。假设$\delta(G) \geq 5$，则有$2\epsilon = \sum_{v \in V(G)} deg(v) \geq 5v$，

又由推论4.2知，$\epsilon \leq 3v - 6$，

联立得，$v \geq 12$，此时$\epsilon \geq \frac{5}{2} v \geq 30$，与题设矛盾，故假设不成立。

5.2

> 证明：树至多有一个完备匹配。

证明：

法一：假设存在两个不同的完备匹配M和M'，考虑其对称差$M \oplus M'$，易知对称差非空且非孤立点度数为2，则存在圈，与树没有圈相矛盾。故树至多有一个完备匹配。

法二：利用叶子节点在完备匹配中的唯一性。对于每个叶子节点，它只能和唯一与它相邻的点匹配，如果有一个结点连接了两个及以上的叶子节点，那么其中至少会有一个叶子节点不能匹配，则此时不存在完备匹配。所以，只有每个结点最多只与一个叶子结点相连时，才有可能存在完备匹配。于是在这种情况下，去掉叶子结点和与它相邻的结点会得到森林，对森林中的每棵树不断重复上面过程，直到所有的结点都被匹配或者有点不能被匹配。在这个过程中，如果存在完备匹配，匹配的方法都是唯一确定下来的。