图论第二次作业答案

1.16

> 假设G是简单图，且$\delta(G) \geq k$，则 G 中有长为 k 的轨道。

证明：

设$P(v_0, v_m)$是该图的最长轨。假设它的长度小于k，即$m < k$。对于v_0，因为$\delta(G) \geq k$，除去与轨道$P(v_0, v_m)$上的顶点有连线外，v_0 至少与轨道外的一个顶点的相邻，与最长轨的假设矛盾！

则 G 的最长轨长度至少为 k，所以存在长为 k 的 轨道。

1.20

> 设 G 是连通图，且每个顶点的度数都是偶数，则$\omega(G-v) \leq deg(v)/2$

证明：

设$G-v$有k个连通片$G_{1,2...k}$，对于任意一个连通片G_i，假设在图G中其只有奇数个顶点和v相连。由于G中每个顶点的度数都是偶数，则G_i中有奇数个顶点的度数为奇数，与欧拉定理矛盾。

因此任意一个连通片G_i，有偶数条边与v相连，且由于G是连通图，每个连通片均有边与v相连。所以每个连通片G_i与v至少有2条边相连，则有$\omega(G-v) \leq deg(v)/2$

1.24

> 1.24 G是简单图，$\delta(G) \geq 2$ ，则G 中有长至少为 $\delta(G)+1$ 的圈。

证明：

取最长轨道 $P(v_0, v_m)$ ，由习题1.16知 $m \geq \delta(G)$ 。 又因为$P(v_0, v_m)$ 是最长的轨道， 所以v_0的所有邻顶都在$P(v_0, v_m)$ 上 。

由于$deg(v_0) \geq \delta(G)$,v_0至少一个邻顶的下标大于等于 $\delta(G)$，不妨设 为$max \geq \delta(G)$ 。则 圈 $C_0 = P(v_0, v_{max}) \cup v_0v_{max}$ 构成一个长为$max+1$ 的圈。 而$max+1 \geq \delta(G)+1$ 。 得证。

1.25

> 设G使简单图。证明：（1）若$\varepsilon(G) \geq v(G)$,则G中有圈　（2）若$\varepsilon(G) \geq v(G)+4$，则G中有两个无公共边的圈。

（1）**证明：**

若图G有度为0或1的顶点，则依次删除这个顶点和它关联的边，得到G的子图G_1，显然G_1也满足$\varepsilon(G) \geq v(G)$。重复这样的过程得到$G_2, G_3 \ldots G_m$。由于V=1或2的简单图不可能满足$\varepsilon(G) \geq v(G)$，所以这个过程可以停止到某一个G_m，并且$\delta(G_m) \geq 2$。由例1.8可知，G_m中有圈。该圈同样也在图G中，证毕。

（2）**证明：**

只需证明$\varepsilon(G) = v(G)+4$时命题成立。假设G是满足$\varepsilon(G) = v(G)+4$，但不包含不相交的圈的图中顶点数最少的图。则图G满足以下两点性质：a.图G不包含长度小于等于4的圈　b.$\delta(G) \geq 3$

证明a：假设G存在长为4的圈C，去除圈C包含的边得到G'，则G'满足$\varepsilon(G') \geq v(G')$，由(1)可知G'中含有圈C'，则找到了两个不相交的圈，矛盾。性质a证毕。

证明b:假设存在顶点v_0，$d(v_0)=2$,则构造图$G_1 = G - v_0 + e(v1, v2)$,若$d(v_0) \leq 2$，则$G_1$为在G中去除$v_0$以及其关联的边（$d(v_0)=0$时，任去G中一边），显然，$G_1$也是不含两个边不相交的圈的图且$\varepsilon(G) = v(G) + 4$。这与假设G是顶点数最少的图矛盾。性质b证毕。

由b与欧拉定理可得：$v + 4 = \varepsilon \geq 3v/2$,所以$v \leq 8$。由a可知在G中存在一个最短圈$C = (V_C, E_C) = v_0, e_1, v_1 \ldots e_m, v_m, e_0, v_0$且$8 \geq m \geq 5$。且$e(v_i, v_j) \notin E(G)$, 当$0 \leq i, j \leq m$且$|j - i| > 1$,否则能找到一个长度小于等于4的圈。

又因为$\delta(G) \geq 3$，每个C上的顶点都与圈外至少一个顶点相连。设这些圈外顶点的集合为S，且S中每个顶点只能与V_C中一个顶点相连（否则将会找到长至多为2+m/2的圈小于m)。所以$|S| \geq |V_C|$,于是$8 \geq |V| \geq |S| + |V_C| \geq 10$矛盾。所以不存在这样的G。证毕。

1.29

> G是连通图。$v(G) \geq 2$且$\varepsilon(G) < v(G)$,则G中至少有两个度数为1的顶点。

因为G是连通图，所以$\varepsilon(G) \geq v - 1$,又有$\varepsilon(G) < v(G)$。所以$\varepsilon(G) = v - 1$。

设度数为1的顶点为k。由欧拉定理：

$2\varepsilon(G) = \sum_v deg(v) \geq k + (v(G) - k) * 2 = 2v(G) - k$

联系上面两式可得$k \geq 2$。

2.2

> 一棵树T有 n_i 个 度数为 i 的顶点， $i = 2, 3, \ldots, k$ ，其余顶点都是树叶，则T有几片树叶？

由图的性质有：

$$2\epsilon(T) = \sum_{i=1}^{k} i n_i$$

由树的性质有：

$$\epsilon(T) = v(T) - 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - 1$$

上面两个式子联立可得：

$$n_1 = \sum_{i=2}^{k} (i-2) n_i + 2$$

2.5

> 图G是森林当且仅当$e = v - w$

证明←：若G具有w个连通分支，且$e = v - w$，加入G的某一个分支C_1含有圈。则$e(C_1) \geq e(C_2)$,对G的其他分支C_i,我们有$e(C_i) \geq v(C_i) - 1$,故$e = \sum e(C_i) \geq \sum v(C_i) - w + 1 = v - w + 1$,与假设矛盾。

证明→：显然，略

2.7

> 若G是森林，且有2k个奇数度数点，则G中有k条无公共边的轨，使得G的每条边都在这些轨上

证明： G的每一个非平凡连通片至少有两个奇数度数顶点（森林的每一个连通片都是树），所以当k=1时，G是一棵只有两个叶子的树且该树是一条路（$\sum d(v)=2e=2v-2$)除了两叶节点其余度数都为2）。

若命题对k=n-1已成立，当k=n时，任取G中一个非平凡分支C_1，设u,v是C_1上度数为1的顶点，P_n为u到v的轨道（因为连通一定存在）。设$G_1=G-E(P_n)$,显然G_1也是森林。其顶点为奇数的个数为2(n-1)个。根据归纳假设，有$E(G_1)=E(P_1)\cup E(P_2)...\cup E(P_{n-1})$。所以得到了n条不相交的轨道组成E(G):$E(G)=E(G_1)\cup E(G_n)$,由归纳法知命题成立。

2.8

> 证明： 若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列，则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{v} d_i = 2(v-1)$。

证明：

充分性：

若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列，且是树T的度数序列。

则$\sum_{i=1}^{v} d_i = \sum_{v_i \in T} deg(v_i) = 2\epsilon = 2(v-1)$

必要性：

命题： $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列 ， 若$\sum_{i=1}^{v} d_i = 2(v-1)$ 则此序列是树的度数序列。

对v进行归纳。

当$v=2$ 时， $d_1=d_2=1$, 是树的度数序列。

假设，$v=k$ 时命题成立。

则$v=k+1$时， 若 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2(k+1-1)$

必有 $d_{k+1}=1$，否则 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i \geq (k+1)d_{k+1} \geq 2(k+1) > 2(k+1-1)$

必有 $d_1 \geq 2$，否则 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i \leq (k+1)d_1 \leq (k+1) < 2(k+1-1)$

考虑到序列， $d_1-1, d_2, d_3, \cdots, d_k$ ，共k 个点， 满足归纳假设, 可构成一棵树 。不防设构成树T_0 。连接 v_0, v_{k+1} 。 构成一棵新树 T_1 。 T_1 的度数序列即为 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{k+1}$ 。 命题成立。

得证。