图论第五次作业参考答案

5.11

> 设G是顶点集合划分为X与Y的二分图，则G的最大匹配中的边数等于$|X| - max_{S\subset X}(|S| - |N(S)|)$。

证明：

引用结论：取$S \subseteq X$，则$S \cup N(X-S)$是G的一个覆盖。

因为对$S \subseteq X$，$S \cup N(X-S)$是G的一个覆盖，

故对$(X-S) \subseteq X$，$(X-S) \cup N(S)$是G的一个覆盖，$min_{S\subset X}(|X-S| + |N(S)|)$是最小覆盖数。

又因为最小覆盖数等于最大匹配数，

故最大匹配中的边数
$= min_{S\subset X}(|X-S| + |N(S)|) = min_{S\subset X}(|X| - |S| + |N(S)|) = |X| - max_{S\subset X}(|S| - |N(S)|)$
。

5.13

> 用$Tutte$定理来证明$Hall$定理。

$Tutte$定理：图G（G为一般图，不一定是二分图）有完备匹配$\Leftrightarrow \forall S \subseteq V(G)$，都有$o(G-S) \le |S|$.
$Hall$定理：二分图$G, V(G) = X \cup Y$，且$X \cap Y = \emptyset$，存在将X中的顶点都许配的匹配$\Leftrightarrow \forall S \subseteq X$都有$|N(S)| \ge |S|$，其中$N(S)$为$S$的邻顶集合。
证明：
对二分图$G = (X, Y, E)$，当v为偶数时，加一些边使得Y为完全图；当v是奇数时，加一些边和顶点y_0使得$Y \cup y_0$是完全图。记此完全图为Y'，$H = X \cup Y'$，则G中存在将X中所有顶点都许配的匹配的充要条件是H有完备匹配。此时$Hall$定理等价于H有完备匹配的充要条件是$\forall S \subseteq X, |N_H(S)| \ge |S|$.

（1）必要性：
$\forall S \subseteq X$, 由$Tutte$定理，$o(H - N_H(S)) \le |N_H(S)|$
在$H - N_H(S)$中，S中点都是孤立点，所以$|S| \le o(H - N_H(S))$
$\therefore |N_H(S)| \ge |S|$.

（2）充分性：
对$\forall S \subseteq V(H)$，并设$S = S_1 \cup S_2$，且$S_1 \subseteq X, S_2 \subseteq Y$.
因为Y是一个完全图，则在H中删去S_1不会增加连通片个数，且最多产生一个奇片. 删去S_2可能会使得X中有孤立顶点，设此时X中的孤立顶点为S_3，则$|N(S_3)| \le |S_2|$，则有$|S_3| \le |N(S_3)| \le |S_2|$
若$|S_3| = |S_2|$，则$o(H - S_2) = |S_3| = |S_2|$;
若$|S_3| \le |S_2| - 1$，则$o(H - S_2) \le |S_3| + 1 \le |S_2|$;
若$|S_1|$为偶数，则$o(H - S) = o(H - S_2) \le |S_2| \le |S|$;

若$|S_1|$为奇数，则$o(H-S)=o(H-S_2)+1\leq|S_2|+1\leq|S|$；
综上，对$\forall S\subseteq V(H)$，都有$o(H-S)\leq|S|$. 由$Tutte$定理，H为有完备匹配的图。

5.14

> 证明：若G是$k-1$边连通图的k度正则图，且$\nu(G)$是偶数，则G有完全匹配。

证明：设$S\subseteq V(G)$，$G_1,G_2,...,G_n$是$G-S$中的奇片，m_i是G_i与S间的边数。因为图G是$k-1$边连通图，则有

$$m_i\geq k-1$$

并且通过

$$m_i=k|V(G_i)|-2|E(G_i)|$$

可以得到m_i和k同奇偶，所以有

$$m_i\geq k$$

由此我们可以得出

$$k|S|\geq\sum_{i=1}^{n}m_i\geq nk$$

即

$$|S|\geq n=o(G-S)$$

所以由$Tutte$定理可得G有完全匹配。

5.15

> 证明：树T有完备匹配，当且仅当对任意$v\in V(T)$，都有$o(T-v)=1$。

证明：
（1）必要性：
树T有完备匹配，由$Tutte$定理，$\forall S\subseteq V(T)$, 都有$o(T-S)\leq|S|$。令$S=\{v\}$，则$o(T-v)\leq 1$。
由于树T由完备匹配，即$|T|$为偶数，则$|T-v|$为奇数，所以$o(T-v)\geq 1$。
综上，$o(T-v)=1$。

（2）充分性：
$\forall v\subseteq V(T)$，都有$o(T-v)=1$，则$V(T)$为偶数。
删去v后，树T被划分成若干个连通片，且只有一个连通片为奇片，设奇片中与v相连的顶点为u，在树T中，确定一个v后，由于$o(T-v)=1$，所以u被唯一确定，并且$e=uv$也是被唯一确定的。

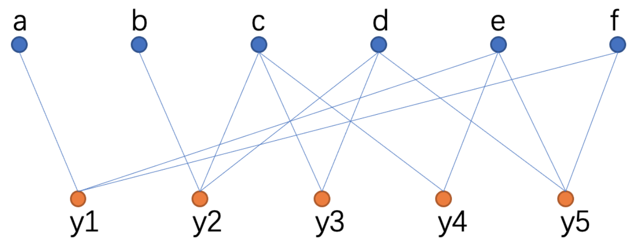
并且这个性质是具有对称性的，当删去u后，v所在的连通片变成了奇片，且他们的连接被唯一确定。

因为v是任意的，所以对于树中的每个顶点都有一个配对，这就是T中的完备匹配。

5.16

> 由a, b, c, d, e, f六个人组成检查团，检查5个单位的工作。若某单位与某人有过工作联系，则不能选派此人到该单位去检查工作。已知第一单位与b, c, d有过联系，第二单位与a, e, f，第三单位与a, b, e, f，第四单位与a, b, d, f，第五单位与a, b, c有过联系，请列出去各个单位进行检查的人员名单。

根据题意可以得到匹配问题的模型，二分图中的边表示人与单位无联系。



名单如下：

第一单位	第二单位	第三单位	第四单位	第五单位
a	b	c	e	d, f
a	b	c, d	e	f
a	b	d	c	e, f
a	b	d	c, e	f
a, f	b	c	e	d
a	b, d	c	e	f
a	b, c	d	e	f
a, f	b	d	c	e
a, e	b	d	c	f