

17.1-2 考虑初始计数器为 $10\cdots 00$ (共 k 位), 假设操作序列为: DECREMENT, INCREMENT, DECREMENT, ... 交替, 那么每次操作都会反转 k 位, 故花费时间开销为 $O(kn)$ 。

17.3-1 考虑 $\Phi'(D_i) = \Phi(D_i) - \Phi(D_0)$, 则势函数 Φ' 将数据结构 D_i 映射到实数 $\Phi'(D_i)$ 上, 且有式 $\Phi'(D_0) = 0$, $\Phi'(D_i) = \Phi(D_i) - \Phi(D_0) \geq 0$ 成立;

由于 $\Phi'(D_i) - \Phi'(D_{i-1}) = [\Phi(D_i) - \Phi(D_0)] - [\Phi(D_{i-1}) - \Phi(D_0)] = \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$, 故摊还代价和原势函数相同。

17.3-4 仍然将势函数定义为其中对象的数目, 由于初始包含 S_0 个对象, 结束时包含 S_n 个对象, 而两者并没有大小比较关系, 所以不能保证 $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$ 的成立, 但是仍然有:

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \sum_{i=1}^n c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0) \sim O(n)$$

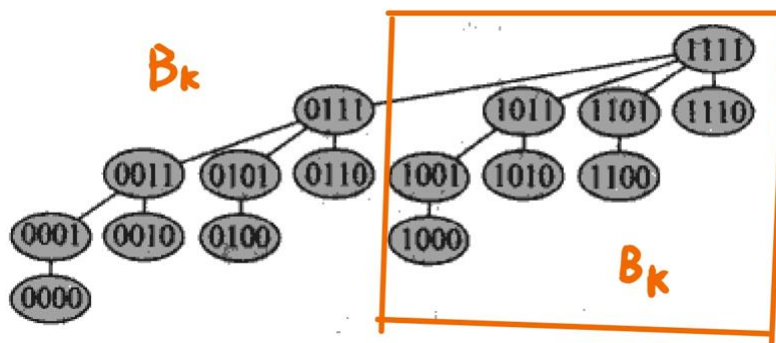
然而 $\Phi(D_0) = S_0$, $\Phi(D_n) = S_n$ 成立, 故有总实际代价上界为:

$$\sum_{i=1}^n c_i \sim O(n) + S_0 - S_n$$

19.1-3 先证明在 x 的二进制表示中共有 j 个 1, 归纳证明。

首先对于只有二项树 B_0 以及 B_1 , 均可以进行验证是正确的。

假设对于二项树 B_k 是正确的, 则 B_{k+1} 可以看成是两个二项树 B_k 根节点相连形成, 如图:

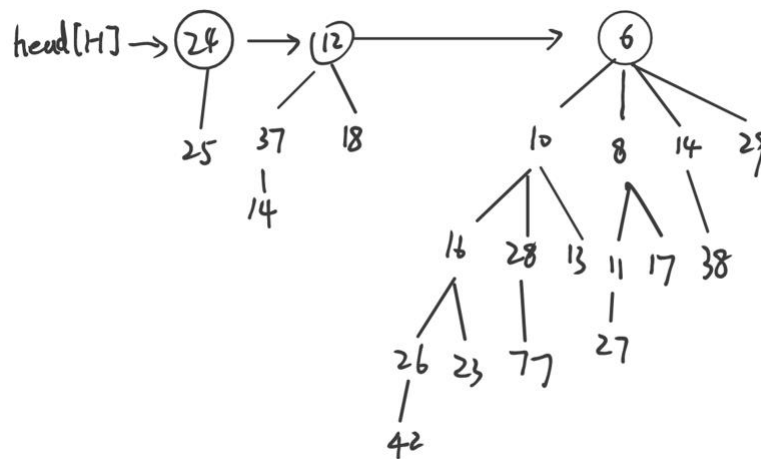


对于左边的 B_k 由后序遍历是排在最前面的, 所以现在的序号相当于在之前二项树 B_k 的二进制序号前填上了一个 0, 而右边的二项树排序位于左二项树之后, 所以相当于在之前二项树 B_k 的二进制序号前填上了一个 1, 由二项树的性质可知, 右边的二项树恰好比左边的二项树是高 1 层的, 再利用归纳假设, 所以恰好使得每一层结点的二进制表达的 1 的数目相同。又有左二项树 $j = k - i = (k+1) - (i+1)$, 所以归纳对于 $k+1$ 情况成立, 所以归纳成立。

恰好包含 j 个 1 的二进制 k 串共有: C_k^j

不难发现, 按照后序遍历, 排在结点 x 子树森林前的树的大小至少是 x 子树森林中最大子树大小四倍, 又 x 子树森林所有树的大小为 $2^0, 2^1 \cdots 2^{(\deg(x)-1)}$, 即 x 的序号二进制的后部全部是连续的 1, 一一对应于 x 子树森林所有树的大小, 最右边的 0 即分割了 x 子树森林和结点 x 子树森林前的树, 所以 x 二进制表达最右边 0 的右边的 1 个数与 x 的度数相同。

19.2-2



19.2-6

BINOMIAL-HEAP-DELETE(H, x)

$P = \text{head}[H]$

$\text{Min} = P.\text{key}$

 While(P) :

 If $P.\text{key} < \text{Min}$:

$\text{Min} = P.\text{key}$

$P = P.\text{sibling}$

$\text{Min_key} = \text{Min} - 1$

 BINOMIAL-HEAP-DECREASE($H, x, \text{Min_key}$) //调整需要删除的结点的 key 成为最小的 key

 BINOMIAL-HEAP-EXTRACT-MIN(H) //抽取最小 key 的结点完成删除

由于改变寻找最小 key 时间复杂度为 $O(\lg n)$ ，且后续操作亦为 $O(\lg n)$ ，所以总时间复杂度为 $O(\lg n)$