基于 Poisson 图像编辑的图像融合实现

陈鸿绪　35　PB21000224

2024 年 5 月 14 日

摘要

Poisson 图像融合是一种基于数学中的泊松方程的图像融合技术。它主要用于将两个或多个图像中的内容无缝地融合在一起，生成一个自然且连续的新图像。这种方法特别适用于图像编辑、图像合成以及计算机视觉等领域。Poisson 图像融合的基本思想是将源图像的内容和目标图像的纹理信息结合起来。首先，需要确定源图像和目标图像的对应区域。然后，通过泊松方程计算目标区域的梯度场，并将其用于合成新的图像。这种方法可以确保融合后的图像在视觉上看起来更加自然和连续。本次实验将基于所提供的 matlab 框架，编写代码实现基于 poisson 融合算法的图像融合程序，并在多张图片上进行实验与分析。

一、前言（问题的提出）

1.1 问题背景及描述

Poisson 图像融合的问题背景主要源于图像编辑和计算机视觉领域中对图像处理技术的需求。在许多应用中，我们希望能够将来自不同来源的图像内容无缝地融合在一起，以创建新的图像或者修改现有图像。例如，在电影制作中，可能会需要将多个拍摄的镜头合并成一个连续的场景，或者将演员与复杂的背景场景融合。在图像编辑中，需要将一个对象从一张图片中移除并将其放置到另一张图片中，同时保持对象的照明和阴影效果看起来自然。如何实现上述需求便是一个难题。

传统的图像融合方法，如简单的复制和粘贴，常常会因为图像之间的亮度、颜色和纹理的不匹配而产生明显的边界和不自然的过渡效果。为了解决这些问题，研究人员开发了基于数学和物理原理的高级图像融合技术，其中 Poisson 图像融合就是其中之一。

Poisson 图像融合的关键在于它能够保持源图像的内容和目标图像的光照一致性。这是通过将源图像的内容与目标图像的梯度场相结合来实现的。通过求解泊松方程，可以得到一个新的图像，它在融合区域既保留了源图像的结构信息，又保持了目标图像的光照和纹理细节。

二、相关工作

“Poisson Image Editing” [1] 是由 Patrick Perez, Michel Gangnet, Alexandre Blake, Jean-Michel Morel, and ANR DATASHAPE 在 2003 年发表的工作。该工作创新地介绍了一种基于泊松方程的图像编辑方法，对于特定的选定区域，通过求解泊松方程，可以求解得到一个新的图像，它在融合区域既保留了源图像的结构信息，又保持了目标图像的光照和纹理细节。

Perez 等人的这篇论文对后续的图像编辑和图像融合研究产生了深远的影响，许多后续工作都是基于泊松图像编辑的思想发展而来的。此外，Poisson Image Editing 的方法也被集成到许多图像编辑软件中。

三、问题分析

3.1 光照和颜色一致性

确保融合后的图像在光照和颜色上具有一致性，避免产生明显的边界和不自然的过渡效果，我们需要得到能够保持光照一致性的融合方法。

3.2 纹理和细节保留

在融合过程中需要保留源图像和目标图像的重要纹理和细节信息。丢失重要纹理和细节信息都会使得融合效果变差。

3.3 鲁棒性和适应性

确保融合方法对图像的噪声和变换具有一定的鲁棒性。即在不同图像情景下可以维持同样好的效果，保持适应性。

3.4 可接受的时间代价

在实际应用中，算法实现的时间代价不能太大，所以就需考虑算法本身和代码实现的一些细节优化。

四、建模的假设

4.1 梯度场假设

泊松图像融合基于源图像和目标图像在融合区域的梯度场（即像素值的变化率）的相似性。这意味着在融合过程中，我们期望保持源图像在融合区域内的局部细节和结构，同时将其与目标图像的背景或其他区域无缝融合。

4.2 平滑性假设

该方法假设图像变化是平滑的，这意味着图像的梯度场应该是连续的。这个假设使得泊松方程能够有效地用于求解图像融合问题，因为泊松融合算法基于图像亮度的平滑变化，这样可以一定程度上保证在融合区域内部和边界处能够实现平滑的过渡，避免明显的边缘或伪影。

4.3 狄里克雷边界条件有效性

在泊松图像融合中，狄里克雷边界条件用于指定融合区域边界上的像素值。这些边界条件通常根据源图像在融合边界上的像素值来设定，以确保融合后的图像在边界处与源图像保持一致。我们假设这种在边界处与原图像保持一致的狄里克雷边界条件确实可以处理好融合边界的变化过度。

五、符号说明

表 1: 符号说明

符号	说明
g	参考图，即目标融合区域所在图
S	背景图，即融合目标的融合背景
Ω	背景图融合的目标区域
$\partial\Omega$	目标区域的边界
Δ	对图像求解梯度向量场
∇	对图像的拉普拉斯算子
f	Ω 上的标量场
$f*$	S 上的标量场

六、数学模型建立

6.1 数学问题转化与求解

我们需要参考图的纹理复制到背景图上，所以期望得到的结果和参考图在梯度上是尽可能接近的，即考虑最小化下式：

$$min_f \int\int_{\Omega} |\nabla f - \nabla g|^2$$

同时为了让边界过渡自然，f, f^* 在边界 $\partial\Omega$ 上需要相等，考虑加上约束条件

$$s.t. f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega}$$

该问题是一个泛函问题，具体来说是带有狄利克雷边界条件的泊松方程问题，求解结果为：

$$\Delta f = \Delta g = div(\nabla g), s.t. f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega}$$

即我们需要求出标量场 f 满足上述两者拉普拉斯算子相等的条件。

6.2 拉普拉斯算子离散化

为了利用两者拉普拉斯算子相等的条件，我们首先需要可以求出某点拉普拉斯算子值，这里采用拉普拉斯算子在图像上离散化的表示形式：

$$\Delta g = g(x+1, y) + g(x-1, y) + g(x, y+1) + g(x, y-1) - 4g(x, y)$$

f 上同样有：

$$\Delta f = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

由于满足前述条件，所以可以得到方程：

$$\Delta g = \Delta f$$

6.3 边界情况的处理

注意 $\Delta g = \Delta f$ 条件展开后，我们目标是求解 f 标量场，然而会遇到某点标量 f 超出 Ω 的情形，这时候就需要狄利克雷边界条件的约束，即由：

$$f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega}$$

将超出 Ω 的点 x 处的标量场 $f(x)$ 替代为 $f^*(x)$。

6.4 稀疏方程组的建立与求解

对 Ω 区域内的每一个点得到一个方程，再使用边界情况增加方程约束，最后联立可以得到一个关于标量场 f 在 Ω 区域稀疏可解的方程组。最后根据解出的解可以得到 Ω 区域的每点标量值（像素值）。

6.5 多通道联合

注意由于图像可能有三通道，这时就需要将三个通道全部单独分别求出 Ω 区域的标量场，最后再将通道简单叠加即可。

七、结果

这里展示三组不同图片的结果。

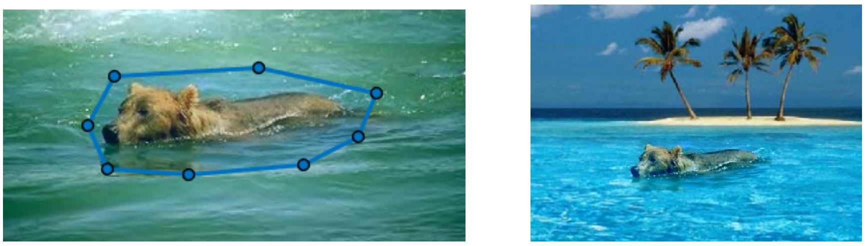

图 1: 左图：参考图多边形区域圈出，右图：融合效果展示

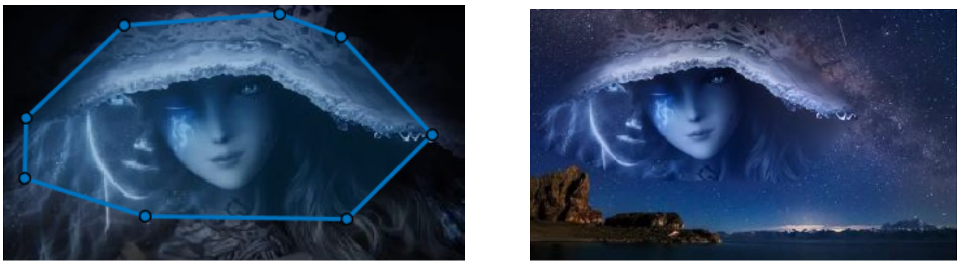

图 2: 左图：参考图多边形区域圈出，右图：融合效果展示

图 3: 左图：参考图多边形区域圈出，右图：融合效果展示

八、结论与分析

8.1 融合效果分析

我们从纹理细节、融合过渡是否自然等方面评判该算法结果的性能。首先对于参考图和背景图选中区域性质本身就比较接近的情形，我们可以发现往往融合效果非常好，无论纹理细节还是融合之后的过渡，都非常自然，这点从图 1 中动物和海水融合表现、图 2 人物拉妮和夜空融合表现可以看出。但是对于背景图有复杂纹理的情形，我们发现效果并不理想，这点可以从图 3 看出，背景图下方是并不是简单的天空背景，而是具有更为复杂的纹理，钢铁侠的下部分和背景图下部分的融合并没有保留复杂的纹理，而是变得模糊平滑。

8.2 时间代价分析

在代码中，我们首先寻找了多边形中所包含的整点，再通过每个整点列出方程联立出稀疏方程便可以求出最终解。所以程序时间代价至少与多边形中的内点数是成正比的，在上述三组图片样本中，其图片大小量级一致，在与这三组图片量级一致的条件下得到融合结果的时间大致在数秒内，属于可接受范围，但是如果目标图片大小达到百 k 级别，会导致程序的时间代价不再可接受。

九、问题

9.1 复杂纹理情形

正如上述所言，对于背景复杂纹理效果，该算法依然有需要改进的空间。对于该问题，实际上在提出该算法的论文中已经提出混合梯度的思想进行改进。

9.2 时间代价优化

对于尺寸较大的图片，融合算法的速度堪忧，所以可能需要进行算法上的另辟蹊径，或者进行一些算法细节的改进。

参考文献

[1] P. Pérez, M. Gangnet, and A. Blake, “Poisson image editing,” in *Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries, Volume 2*, pp. 577–582, 2023.