

HW5 title

name ID

2024 年 5 月 26 日

摘要

关键词:

1 前言（问题的提出）

2 问题分析

3 建模假设

3.1 坐标建立

以地面为 $z=0$ 平面，风向（与地面平行）为 x 轴正向，烟囱朝向为 z 轴正向，烟囱底为坐标原点 O ，建立 O -xyz 坐标系；坐标空间离散化，各方向均以 $1m$ 为一个单位；时间离散化，每 $0.1s$ 为一个时间单位。

3.2 边界条件

1. 无穷远处烟尘浓度为 0；
2. 烟尘无法穿过地面，即地面对烟尘具有反射作用，体现为 $z=0$ 时的边界条件，通过反射系数 α 控制。

3.3 额外条件

1. 初始 $t=0$ 时，全空间 c 处处为 0；
2. 仅在烟囱口 $(0,0,h)$ 处，浓度以恒定速率增加（ $Q \text{ kg/s}$ ，考虑到离散化后单位体积是 $1m^3$ ，也可以直接认为是 $Q \text{ kg}/(m^3 \cdot s)$ ）；
3. 考虑烟尘受重力影响，可以用一个恒定且处处相等、沿 z 轴负向的风速 w 来模拟，通过斯托克斯定律估算（待补充）；
- 4.（可选）考虑烟尘从烟囱喷出时向上的初速度，等价于一个在烟囱口附近沿 z 轴正向的风速。

4 符号说明

符号	含义	单位
D	扩散系数	m^2/s
α	地面对烟尘反射系数	
Q	污染物排放速率	kg/s
v	风速	m/s
w	模拟烟尘重力的风速	m/s
c	烟尘浓度	kg/m^3

风向沿 x 轴正向（以风向为正向建立 x 轴），模拟烟尘重力的速度沿 z 轴负向。

5 数学模型建立

$$\begin{aligned} & \text{Given } D, v, Q, \text{ solve } c(x, y, z, t), \\ & s.t. \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - v\frac{\partial c}{\partial x} - w\frac{\partial c}{\partial z} + f(x, y, z) \\ c|_{x=\pm\infty} = c|_{y=\pm\infty} = c|_{z=+\infty} = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial z}|_{z=0} = 0 \\ c|_{t=0} = 0 \end{cases} \\ & \text{where } f(x, y, z) = \begin{cases} Q, & \text{if } (x, y, z) = (0, 0, h) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \\ & -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 \leq z, t < +\infty \end{aligned}$$

6 问题求解

7 讨论与优化

8 组内分工

- 假设提出与模型建立
- 代码编写与绘图仿真
- 结果讨论与模型改进
- 结果汇总与报告撰写