Note of Quantum Optics
2 经典光场的相干性

Yi-Han Luo
University of Science and Technology of China

版本:1.0
更新:2020 年 8 月 1 日

本章参考

1 光场模型

这里我们假设光场是由一个原子系综产生, 对于其中每个原子, 假设其发射的光场为理想平面波, 频率为 ω_0. 原子系综中每个原子均在做无规则运动, 因此不可避免发生原子间碰撞, 假设每次碰撞后该原子对应的理想平面波的相位被瞬间随机移动.

于是, 对于该系综中每个原子, 其产生电场为

$$E_i(t) = E_0 \exp[-i\omega_0 t + i\phi_i(t)]. \tag{1}$$

其中, $\phi_i(t)$ 在原子自由飞行时保持不变, 碰撞发生时瞬间随机跳到另一个取值. 于是, 该系综的总电场输出即为

$$E(t) = E_0 \exp(-i\omega_0 t) \sum_{i=1}^{\nu} \exp[i\phi_i(t)], \tag{2}$$

其中 ν 为系综中的原子数量. 上式右侧求和式, 每时刻的取值相当于在二维复平面上步长为 1 的 ν 次随机行走, 这里我们记末位置模长为 $a(t)$, 极角为 $\phi(t)$, 故总光场最终写作

$$E(t) = E_0 \exp(-i\omega_0 t) a(t) \exp[i\phi(t)]. \tag{3}$$

2 物理量定义

首先定义两个与相干时间相关的时间尺度. 对于原子碰撞过程, 定义平均自由飞行时间为 τ_{coll}, 以及 $\gamma_{\mathrm{coll}} = 1/\tau_{\mathrm{coll}}$, 后文会提及碰撞过程的相干时间定义即为 $\tau_c = \tau_{\mathrm{coll}}$. 除此

之外, 多普勒展宽也会导致时间相干性变差, 多普勒展宽造成光谱为高斯线性, 谱宽为 Δ, 后文会提及与之相关的时间相干性 $\tau_c = \sqrt{\pi}/\Delta$.

一般而言, 原子平均自由时间远大于光场的周期, 故我们需要在两个时间尺度上定义均值. 下文用 $\bar{I}(t)$ 表示一个光场震荡周期内光强的均值 (瞬时值)

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 a(t)^2; \tag{4}$$

用 $\bar{I} = \langle \bar{I}(t) \rangle$ 表示 $T \gg \tau_{\text{coll}}$ 时长内光强的平均值. 其中 $\bar{I}$ 为实验能够观测到的结果.

3 一阶干涉的实验装置

这里为了描述简洁, 突出物理背景, 研究平行光输入 Mach-Zehnder 干涉仪. 如图 [] 所示, $E(t)$ 为入射场, 从第一块分束器入射干涉仪, 其在第一块分束器上的透射和反射光分别进入 z_1 与 z_2 两路, 分别于时刻 t_1 和 t_2 重合于第二块分束器. 这里我们考察 $E_4(t)$, 为

$$E_4(t) = \mathcal{RT}E(t_1) + \mathcal{TR}E(t_2). \tag{5}$$

其中 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{T}$ 代表反射和透射系数, $t_i = t - z_i/c$. 这里我们假设干涉仪两臂不等长, 导致 $t_2 > t_1$, 故可令 $t_2 = t_1 + \tau$.

于是, 可得瞬时光场均值 $\bar{I}(t)$ 和光场均值 $\bar{I}$ 如下

$$\bar{I}_4(t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c|\mathcal{RT}|^2\Big\{|E(t_1)|^2 + |E(t_2)|^2 + 2\text{Re}[E^*(t_1)E(t_2)]\Big\} \tag{6a}$$

$$\bar{I}_4 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c|\mathcal{RT}|^2\Big\{\langle|E(t)|^2\rangle + \langle|E(t+\tau)|^2\rangle + 2\text{Re}\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle\Big\} \tag{6b}$$

可见, 可探测到的光强 (第二式) 其干涉取决于 $2\text{Re}\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle$, 此处定义光场的一阶相干函数

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle}{\langle E^*(t)E(t)\rangle}. \tag{7}$$

故

$$\bar{I}_4 = 2|\mathcal{RT}|^2\bar{I}\big(1 + \text{Re}\, g^{(1)}(\tau)\,\big). \tag{8}$$

其中 $\bar{I} = \epsilon_0 c\langle|E(t)|^2\rangle/2$ 为入射场的光强.

4 一阶相干函数

我们直接将原子碰撞模型的光场带入, 计算光场的自相关

$$\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle = E_0^2 \exp(-i\omega_0\tau)\Big\langle \sum_{i,j=1}^{\nu} \exp[i\big(\phi_i(t+\tau) - \phi_j(t)\big)]\Big\rangle, \tag{9}$$

由于不同原子碰撞过程完全独立, 故长时间区间内光强平均, $i \neq j$ 项均为 0, 故

$$\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle = \nu\langle E_i^*(t)E_i(t+\tau)\rangle. \tag{10}$$

上式将总光场的自相关化规到了每个原子激发光场的自相关.

接下来我们考虑原子碰撞过程以及多普勒光谱展宽分别讨论其自相关函数.

碰撞过程: 仔细考察 $\langle E_i^*(t)E_i(t+\tau)\rangle$ 可以发现, 其与原子的自由飞行时间密切相关: 当 $\tau < \tau_{\text{coll}}$ 时, 两时刻的 E_i 来自同一理想平面波, 故 $\langle E_i^*(t)E_i(t+\tau)\rangle = 1$; 当 $\tau > \tau_{\text{coll}}$, 电场便被插入随机相位差, 从而使其均值为 0. 按以上分析, 给定 τ 后, $\langle E_i^*(t)E_i(t+\tau)\rangle$ 等于原子自由飞行时间大于 τ 这个事件所发生的概率, 故

$$\langle E_i^*(t)E_i(t+\tau)\rangle = E_0^2 \exp(-i\omega_0\tau)\int_\tau^\infty p(\tau')\mathrm{d}\tau', \tag{11}$$

其中 $p(\tau)$ 为两次碰撞间隔时长的概率密度函数, 有形式

$$p(\tau) = \frac{1}{\tau_{\text{coll}}}\exp(-\tau/\tau_{\text{coll}}). \tag{12}$$

于是,

$$\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle = \nu E_0^2 \exp(-i\omega_0\tau - \tau/\tau_{\text{coll}}), \tag{13}$$

考虑到 τ 取正负时, 其自相关衰减是对称的, 故有最终一阶相干函数为

$$g^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega_0\tau - \gamma_{\text{coll}}|\tau|). \tag{14}$$

多普勒展宽: 由于原子自由飞行, 以及光的多普勒效应, 导致最终光谱会在 ω_0 基础上有所变宽, 这里考虑总光场为最简单情形, 即

$$E(t) = E_0\sum_{i=1}^{\nu}\exp(-i\omega_i t + i\phi_i), \tag{15}$$

故

$$\begin{aligned}
\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle &= E_0^2\sum_{i=1}^{\nu}\exp(-i\omega_i\tau) &\text{(16a)}\\
&= \frac{\nu E_0^2}{\sqrt{2\pi}\Delta}\int_0^\infty e^{-i\omega\tau}\exp\left(-\frac{(\omega_0-\omega)^2}{2\Delta^2}\right)\mathrm{d}\omega &\text{(16b)}\\
&= \nu E_0^2\exp\left(-i\omega_0\tau - \frac{1}{2}\Delta^2\tau^2\right). &\text{(16c)}
\end{aligned}$$

于是一阶相干函数为

$$g^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega_0\tau - \frac{2}{\pi\tau_c^2}\tau^2). \tag{17}$$

5　一阶相干函数与光谱的关系

对输入光场做 Fourier 变换, 可得其频率分布函数

$$E_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T E(t) \exp(i\omega t) \mathrm{d}t, \tag{18}$$

基于此我们定义函数

$$f(\omega) = \frac{|E_T|^2}{T} = \frac{1}{2\pi T} \int_T \mathrm{d}t \mathrm{d}t' E^*(t) E(t') \exp(-i\omega(t-t')\,). \tag{19}$$

易知, 上式又可以写成 (通过换元)

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^*(t) E(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\tau, \tag{20}$$

接下来对 $f(\omega)$ 积分, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathrm{d}\omega = \langle E^*(t) E(t) \rangle, \tag{21}$$

于是便有归一化光谱分布为

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle E^*(t) E(t+\tau) \rangle}{\langle E^*(t) E(t) \rangle} e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\tau \tag{22a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\tau, \tag{22b}$$

即, 归一化的光谱的强度分布即为一阶相干函数的 Fourier 变换.

于是可知, 考虑碰撞后, 光束光谱对应于 Lorentz 线型; 考虑多普勒效应情况下, 光束光谱对应于 Gaussian 线型.

6　瞬时光强的涨落

以上几节我们所考察的均为长时间间隔内的平均结果, 本节我们考察与 $\bar{I}(t)$ 相关瞬时光强的性质. 首先我们来考察 $\bar{I}(t)$ 的各阶矩.

一阶矩:

$$\bar{I} = \langle \bar{I}(t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \left\langle \left| \sum_{i=1}^{\nu} \exp(i\phi_i(t)) \right|^2 \right\rangle \tag{23a}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \nu. \tag{23b}$$

其中, 求和式平方中的交叉相由于各原子发光独立, 故均值为 0.

二阶矩:

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{I}(t)^2 \rangle &= \frac{1}{4}\epsilon_0^2 c^2 E_0^4 \left\langle \left| \sum_{i=1}^{\nu} \exp(i\phi_i(t)) \right|^4 \right\rangle &\text{(24a)}\\
&= \frac{1}{4}\epsilon_0^2 c^2 E_0^4 \left\{ \sum_{i} \left\langle |\exp(i\phi_i(t))|^4 \right\rangle + \sum_{i<j} \left\langle |2\exp(i\phi_i(t) + i\phi_j(t))|^4 \right\rangle \right\} &\text{(24b)}\\
&= \frac{1}{4}\epsilon_0^2 c^2 E_0^4 [\nu + 2\nu(\nu - 1)] &\text{(24c)}\\
&\approx \frac{1}{4}\epsilon_0^2 c^2 E_0^4 \cdot 2\nu^2. &\text{(24d)}
\end{aligned}
$$

其中, 由于各原子发光各自独立, 故第二行仅有不带虚部的项保留了下来.

高阶矩: 这里我们仅讨论 ν 极大情况下的近似.