

中国科学技术大学

2020 - 2021 学年第一学期期末考试试卷

课程名称 线性代数(A2) 课程编号 00152502
 考试时间 2021年3月6日 考试形式 闭卷
 学院 _____ 姓名 _____ 学号 _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

得分	评卷人

一、填空题 (每空6分, 共36分)

1. 欧氏空间 \mathbb{R}^3 中, 标准内积关于基 $M = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ 的度量矩阵是 _____.
2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的相合规范形为 _____.
3. 设实二次型 $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + \lambda(xy + xz + yz)$ 正定, 则 λ 的取值范围是 _____.
4. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的 Jordan 标准形是 _____.
 A 的正交相抵标准形是 _____.
5. 在三维空间中的直角坐标系中, 方程 $xy + yz + zx = 2$ 表示的二次曲面类型是 _____.

得分	评卷人

二、(本题15分) 对酉空间 \mathbb{C}^3 中的向量 $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ 定义内积 $(x, y) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$. 对向量组 $\alpha_1 = (1, i, 0), \alpha_2 = (0, 1, i), \alpha_3 = (i, 0, 1)$ (这里 i 是虚数单位)作Gram-Schmidt正交化, 求 \mathbb{C}^3 的一组标准正交基。

得分	评卷人

三、(本题15分) 设 α 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量. 定义 V 上的线性变换 A :

$\beta \rightarrow \beta - 2(\alpha, \beta)\alpha, \forall \beta \in V$ 证明:

1. A 是正交变换;
2. A 在适当的标准正交基下的矩阵为 $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

得分	评卷人

四、（本题24分）设欧氏空间 $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的内积定义为 $(X, Y) = \text{Tr}(X^T Y)$.

1. 证明：基本矩阵 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 构成 V 的一组标准正交基；
2. 求 V 上的线性变换 $A: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$ 的伴随变换 A^* .
3. 证明： A 是规范变换.

得分	评卷人

证明: $\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$.

五、(本题10分) 设 A, B 均为 n 阶实对称正定方阵, 且 $A \geq B$ (即 $A - B \geq 0$).