

2024 数分 (A1) 期末

as4937

2025 年 1 月 12 日

本试卷共 7 道大题, 考试时间为 2025 年 1 月 12 日上午 8:30 - 10:30.

第 2 至 6 题每题 10 分, 第 7 题 5 分.

1 题目

问题 1. 计算题. 每题 9 分, 共 45 分.

问题 1.1. 已知三次多项式 $f(x)$ 满足 $f^{(i)}(1) = 1 (i = 0, 1, 2, 3)$. 求不定积分

$$\int \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx$$

问题 1.2. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 单调递增且有反函数 $f^{-1}(x)$. 已知 $f(0) = 0, f(3) = 2$, 且 $\int_0^3 f(x) dx = 2$. 求 $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$.

问题 1.3. 求定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx$$

的值.

问题 1.4. 已知 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. 求定积分 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 的值. (结果中可含有 $f(x)$.)

问题 1.5. 求曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕 y 轴旋转得到的旋转体的体积.

问题 2. 已知

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x \leq e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x > e \end{cases}$$

则当反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛时, 求 α 的取值范围.

问题 3. 已知 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$. 若 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

问题 4. 设 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. 证明: $\int_a^b f(x) dx > 0$.

又问: 若 $f(x) \in R[a, b]$, $f(x)$ 非负且不恒为 0, 上述结论是否仍正确? 若正确请给出证明, 若不正确请给出反例.

问题 5. 已知 $f(x) \in C^1[0, 1]$, 且 $f(0) = 0$. 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

问题 6. 已知 $f(x)$ 在任意有限区间上可积, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(x) dx}{x} = l$$

问题 7. 已知 $f(x) \in C^3(-\infty, +\infty)$, 且 $|f(x)|, |f'''(x)|$ 在 \mathbb{R} 上均有界. 证明: $|f'(x)|, |f''(x)|$ 在 \mathbb{R} 上有界. 记 $M_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} f^{(i)}(x) (i = 0, 1, 2, 3)$. 证明: $M_1 \leq \frac{1}{2}(9M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}$.