

中国科学技术大学期中试卷

2024-2025 学年第一学期

课程名称:

拓扑学

课程编号:

Math 3003

考试时间:

考试形式:

闭卷

考生姓名:

学号:

1. (30 分) 判断以下命题的对错:

(a) $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 把 X 的闭集映为 Y 的闭集。 ____

(b) 二维球面与正方体体表面同胚。 ____

(c) 满足 T_3 公理的拓扑空间也满足 T_1 公理。 ____

(d) 度量空间都是 C_2 空间。 ____

(e) 若 X 局部连通, 它的连通分支为 X 的开子集。 ____

(f) 闭流形中连通的开集道路连通。 ____

(g) 若 X 满足 T_2 公理, 则 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$ 为 $X \times X$ 的闭集。 ____

(h) 商映射是闭映射。 ____

(i) 紧致的度量空间列紧。 ____

(j) 莫比乌斯带是闭流形。 ____

2. (8 分) 拓扑空间 X 和 Y 满足 T_3 公理, 证明 $X \times Y$ 满足 T_2 公理。

3. (10 分) A 是拓扑空间 X 的子集, 证明: A 的边界包含它内部的边界, 即:

$$\partial A^\circ \subset \partial A$$

4. (10 分) 在 $X = E^2$ 中定义等价关系:

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ if and only if } x + y^2 = x' + y'^2.$$

求 X/\sim 是哪个熟悉的空间, 证明之。

5. (10 分) 证明: S^1 与 S^2 不同胚。

6. (10 分) 设 $p: X \rightarrow Y$ 是一个闭连续满射, 对于任意 $y \in Y, p^{-1}(y)$ 是一个紧致空间。

证明: 若 Y 是紧致的, 则 X 是紧致的。

7. (10 分) 设 $X_\alpha, \alpha \in J$ 是连通空间, $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 是乘积空间。 $a = (a_\alpha)$ 是 X 中的一点。

(a) 对 J 的任意有限子集 K , 令 $X_K = \{(x_\alpha) \in X | \text{if } \alpha \notin K, x_\alpha = a_\alpha\}$. 证明 X_K 连通。

(b) 证明: 所有空间 X_K 的并 Y 是连通空间。

(c) 证明: X 是连通空间。

8. (10 分) 设 $\mathcal{F} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} | a < b\}$, $\tau = \bar{\mathcal{F}}$, 拓扑空间 (\mathbb{R}, τ) 是以 \mathcal{F} 为基的拓扑空间。

(a) 证明: (\mathbb{R}, τ) 满足第一可数公理;

(b) 证明: (\mathbb{R}, τ) 不满足第二可数公理;

(c) 证明: (\mathbb{R}, τ) 开覆盖有可数子覆盖。