

# 2025年复分析(H)期中试卷回忆版

考试时间：2025年4月24日 授课教师：王兵

一、给定光滑的实值函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 构造整函数  $\tilde{f}$  使得  $\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = f$ .

二、计算积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ .

三、设  $u$  不是整数, 证明  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u}$ , 并计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

四、找出一个函数  $f$  使得其傅立叶变换等于它自身。

五、设  $f$  是去心圆盘  $\check{B}(z_0, r)$  上的全纯函数, 且满足: 存在  $A > 0, \varepsilon > 0$ , 使得

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z - z_0|} \left( \log \frac{1}{|z - z_0|} \right)^{-1-\varepsilon}, \quad \forall z \in \check{B}(z_0, r).$$

证明:  $z_0$  是  $f$  的可去奇点。

六、设  $f$  是整函数, 且对任意  $z \in \mathbb{C}$  满足  $|f(z)| \leq C|e^z|\sqrt{|z|}$ . 证明:  $f$  恒等于零。