2024年春季实分析期末考试回忆版

授课教师：于树澄、李皓昭

一、（30分）判断正误并给出证明或举反例

（1）L^1收敛蕴含a.e.收敛

（2）a.e.收敛蕴含依测度收敛

（3）L^1收敛蕴含依测度收敛

二、（20分）

（1）叙述并证明控制收敛定理

（2）用控制收敛定理计算积分$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{\frac{\sqrt{n}}{\log(n+2024)}}}dx$.

三、（15分）设$a,b>0$, 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^{-b}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

证明: $f\in BV[0,1]$当且仅当$a>b$. 并在$a=b$时，对任意给定的$\alpha\in(0,1)$，构造一个不是有界变差的f满足α阶Holder连续条件，即存在$A>0$使得$|f(x)-f(y)|\le A|x-y|^\alpha$对任意$x,y\in[0,1]$成立。

四、（15分）设μ^*是定义在集合X上的一个外测度。

（1）叙述μ^*-可测集的定义。

（2）令$\mathcal{M}:=\{E\subset X: E\text{是}\mu^*\text{-可测集}\}$. 证明：$\mathcal{M}$是$X$上的一个$\sigma$-代数，且$\mu:=\mu^*|_{\mathcal{M}}$是$(X,\mathcal{M})$上的一个完备测度。

五、（10分）设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 证明$f$是Lipschitz连续并存在$L>0$使得$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$对任意$x,y\in\mathbb{R}$成立，当且仅当$f$绝对连续且$|f'(x)|\le L$ 对 a.e. $x\in\mathbb{R}$成立。

六、（10分）设$f\in L^1(\mathbb{R})$满足

$$\limsup_{\epsilon\to 0_+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)f(y)|}{(x-y)^2+\epsilon^2}dxdy<\infty.$$

证明：$f(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}$.