

中国科学技术大学2021年秋
数学分析A3期中考试试卷

2021年11月6日

姓名: _____ 系别: _____ 学号: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								
阅卷人								

1. (20分) 判断下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{n}{n^2+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n+1}} - 1)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n} \right)$.

2. (20分) 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛;

(2) 设 $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛;

(3) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 x}$ 在 $(0, +\infty)$ 中一致收敛;

(4) 设函数列 $f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 且在 $[a, b]$ 中一致收敛于函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

3. (20分) (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ 的收敛点集.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n-1)!} x^n$ 的和函数.

4. (15分) (1) 证明: 对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 中一致收敛;

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, +\infty)$ 中非一致收敛.

5. (10分) 证明: 若 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上能用多项式一致逼近, 则 f 为多项式.

6. (8分) 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $(0, +\infty)$ 中的一致收敛性.

7. (7分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n 及多项式 $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k}$, 其中 a_0, \dots, a_n 为有理数, 使得对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.