USTC2025 春概率论期中试题 2025年4月16日

姓名: 学号: 分数:

1. **(15分)** 在正整数集合上建立一个概率模型，满足条件：任取一整数其为偶数的概率为 1/2. 详细指出概率空间的三要素.

2. **(15分)** 设 X 和 Y 分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，且相互独立，求条件密度 $f_{X|X+Y}(x|x+y)$ 和条件期望 $\mathbb{E}[X|X+Y]$.

3. **(20分)** 对 $0<q<1$, 设随机向量 (X,Y) 有联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0;\\ qx, & x<0, 0\le x, y<1;\\ x, & 0\le x<1, y\ge 1;\\ q, & 0\le y<1, x\ge 1;\\ 1, & x,y\ge 1.\end{cases}$$

分别求 X 与 Y 的分布函数. 试问 X 和 Y 是否独立? (X,Y) 是联合连续型或联合离散型吗?

4. **(15分)** 随机图模型 $G(n,p)$ 指 n 个顶点 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 的图, 两个顶点以概率 p 连边，且每两个顶点是否连边相互独立. 顶点 i 的度 D_i 定义为与 i 相连的边数. 回答

   (i) 求 D_i 的分布列与期望 $\mathbb{E}[D_i]$.

   (ii) 若 X 表示 $G(n,p)$ 中"三边形"个数，试求"三边形"期望数 $\mathbb{E}[X]$.

5. **(15分) 概率论与线性代数的结合可能催生有趣的数学问题与方法，且看一例.** 令 $X_n=(X_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，n^2 个矩阵元 $\{X_{ij}\}$ 为相互独立且同分布的对称伯努利随机变量，即

$$\mathbb{P}(X_{ij}=0)=\mathbb{P}(X_{ij}=1)=\frac{1}{2},$$

定义 $p_n=\mathbb{P}(\det(X_n)\text{为奇数})$. 试回答 (i) 计算 p_2, p_3; (ii) 猜测 p_n 的一般公式并证明之.

6. **(20分)** 假设非常值的随机变量 X_n 取值于 $\{0,1,\ldots,2n\}$, 其母函数 $G(z)=\mathbb{E}[z^{X_n}]$ 为 $2n$ 次多项式且满足李-杨（李政道-杨振宁）性质:

复变量 z 的多项式方程 $G(z)=0$ 的所有根均在单位圆周上.

   (i) 写出一个随机变量，其母函数具有李-杨性质.

   (ii) 证明对所有非负整数 m, $\mathbb{E}\left[(X_n-n)^{2m+1}\right]=0$.

   (iii) 令

$$X_n^*:=\frac{X_n-\mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}},$$

试证明

$$1\le\mathbb{E}\left[(X_n^*)^4\right]<3.$$