第 6 章 微分几何 (H)2024 秋季期中

注意事项:

1. 试题中 $\mathbb{R}^3$ 等同于欧氏空间 $\mathbb{E}^3$.
2. 曲面 $M: r=r(u,v)$ 若满足 $F\equiv M\equiv 0$, 则其 Gauss 方程和 Codazzi 方程可写为:

$$-\sqrt{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)=LN\text{和}L_v=HE_v,N_u=HG_u.$$

练习 6.1(8 分)

1. (4 分) 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=e^x\cos y$. 设 v_p 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个切向量, 其中 $v=(2,-1,3),p=(2,0,-1)$. 计算 $\mathrm{d}f(v_p)$.
2. (4 分) 设 r,θ,z 为 $\mathbb{R}^3$ 的圆柱坐标函数, 也即:$z=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$. 计算体积元 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 用 r,θ,z 以及 $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}z$ 的表达式.

练习 6.2(13 分) 考察空间正则曲线 $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, r(s)=(\frac{4}{5}\cos s,1-\sin s,-\frac{3}{5}\cos s)$.

1. (4’) 证明 s 为弧长参数.
2. (4’) 求该曲线的主法向量 n 和副法向量 b.
3. (5’) 求该曲线的曲率和挠率, 判断该曲线是何种曲线, 并说明理由.

练习 6.3(23 分)

1. (7’) 设 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 为 xy 平面上单位圆周曲线的弧长参数化曲线. 在每点 $\beta(s)$ 处放一条与单位圆径向方向垂直, 其切向与单位圆切向 $\beta'(s)$ 成 45° 夹角的直线 $\ell(s)$ 所形成的直纹面记作 M_1. 将每点 $\beta(s)$ 处的直线 $\ell(s)$ 替换成与其垂直并且与单位圆径向方向垂直的直线 $\widetilde{\ell}(x)$ 所测直线族形成的直纹面记作 M_2. 试证明 M_1 和 M_2 作为 $\mathbb{R}^3$ 的点集相等.
2. (7’) 设 M 为曲线 $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, r(t)=(g(t),h(t),0), h>0$ 绕着 x 轴旋转所得的旋转面. 设 h' 恒不为零, 证明该曲线 M 总是可以正则参数化为如下形式:

$$r(u,v)=(f(u),u\cos v,u\sin v).$$

3. (9’) 求 (b) 中正则参数曲面 $r(u,v)$ 的主曲率,Gauss 曲率和平均曲率.

练习 6.4(15 分) 设 $r=r(s)$ 是一条弧长参数空间曲线, 其曲率 $\kappa>0$, 挠率 $\tau\neq 0$.

1. (7’) 设曲线 r 落在以 $c\in\mathbb{R}^3$ 为心,R 为半径的球面上, 证明:

$$r-c=-\rho\vec{n}-\rho'\sigma\vec{b},$$

其中 $\vec{n}$ 和 $\vec{b}$ 分别为其主法向量和副法向量,$\rho=\frac{1}{n},\sigma=\frac{1}{r}$.

2. (8’) 设 $\rho^2+(\rho'\sigma)^2$ 为常值函数,$\rho'\neq 0$. 证明:r 必落在某一个球面上.

练习 6.5(16 分) 设 $M: r=r(u,v),(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面片. 设其第一, 第二基本形式为

$$\mathrm{I}=E\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+F(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u)+G\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v,\mathrm{II}\quad=L\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+M(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u)+N\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v,$$

其 Gauss 曲率为 H, 平均曲率为 K.

1. (7’) 记 $\mathcal{W}$ 为其 Weingarten 变换. 证明下式对任意 $v,w\in T_pM,\forall p\in M$ 成立:

$$\langle\mathcal{W}^2(v),w\rangle-2H\mathrm{II}(v,w)+K\mathrm{I}(v,w)=0.$$

2. (9’) 记 $v=v_1r_u+v_2r_v$ 为曲面的一个非零切向量. 证明 v 为主方向, 当且仅当

$$\det\begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{pmatrix}=0.$$

✍ **练习 6.6(25 分)** 设 $M: r = r(u,v), (r,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中没有脐点的正则曲面片. 其第一, 第二基本形式如上题所记. 设其参数化为正交曲率线网, 且 $v-$ 线的主曲率恒为 0.

1. (5') 证明: 光滑向量值函数 $t \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^2$ 方向不变, 当且仅当 $v(t) \wedge v'(t) = 0$.
2. (5') 计算 Christoffel 符号 Γ_{22}^1 用函数 E, F, G 及其偏导数的表达式.(注意指标定义方式为 $u^1 = u, u^2 = v$.)
3. (5') 证明:$r_{vv} \wedge r_v = \Gamma_{22}^1 r_u \wedge r_v$.
4. (10') 证明:M 是直纹面.