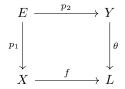
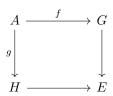
## 第10章 2024 秋代数学(研)期中

- ▲ 练习10.1 第一题暂缺.
- **练习 10.2(20** 分) 考虑  $H = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ . 考虑子模  $A = \{0\} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ , 以及 A 的子模  $B = \{0\} \oplus (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ .
  - 1. 请叙述:A 在 H 中的补模的概念 (或等价条件).
  - 2. 设  $X \subset H$  是 A 的补. 证明有同构  $H/X \simeq \mathbb{Z}$ .
  - 3. 对于 A, 请列出其在 H 中的所有补, 并给出论证.
  - 4. 判断并论证:B 在 H 中是否有补?
- **4** 练习 **10.3**(**30** 分) 设 R 为环. 考虑模同态  $f: X \to L$  和  $g: Y \to L$ . 设  $E = \{(x,y) \in X \oplus Y: f(x) = g(y)\}$ .
  - 1. 证明如下的交换图表是拉回图. 这里, $p_1$  和  $p_2$  表示相应的投影同态.



- 2. 证明: $Ker(p_2)$  同构于 Ker(f).
- 3. 证明:g 诱导单同态  $\operatorname{coker}(p_2) \hookrightarrow \operatorname{coker}(f)$ .
- 4. 试举例: 上述诱导单同态不一定是同构.
- 5. 具体例子: $R = \mathbb{Z}, f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  使得  $f(n) = \overline{n}, g: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  使得  $g(\overline{n}) = \overline{2n}$ . 如上定义 E, 试计算 E 的秩和扭模.
- **练习 10.4(20** 分) 考虑域上二元多项式环 R = k[x,y], 其由 x,y 生成的理想  $\mathfrak{m} = (x,y)$ , 则  $\mathfrak{m}^n$  均为 R 的线性子空间.
  - 1. 计算线性空间  $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$  的维数.
  - 2. 设 F 为秩 m 的自由 R— 模. 试求线性空间  $\mathfrak{m}^n F/(\mathfrak{m}^{n+1}F)$  的维数.
  - 3. 作为 R- 模,m 不是自由模.
  - 4. 作为 R- 模,m 不是内射模.
- **练习 10.5(5** 分) 设  $f(x) \in k[x]$  为非零多项式. 考虑商环 R = k[x]/(f(x)). 试证明: R 作为其自身的模是内设模.



试证明: 群 E 是无限群.