

# 中国科学技术大学

## 2021 级统计学专业《实用随机过程》期中考试试题

(考试时间: 2023-05-06)

1. (总 18 分, 每小题 6 分) 设顾客到达某个商店的规律可以用参数  $\lambda = 1$  的齐次 Poisson 过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  来描述, 时间单位为小时. 已知前 1 个小时仅有 2 位顾客到达.
- (1) 求第 2 个小时内有 3 位顾客到达的概率;
  - (2) 求这 2 位顾客都是在前 20 分钟到达的概率;
  - (3) 求至少有一位顾客是在前 20 分钟到达的概率.

2. (15 分) 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda = 1$  的齐次 Poisson 过程, 事件发生时刻序列记为  $\{S_n, n \geq 1\}$ . 求

$$E \left[ \sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k) \right], \quad \text{Var} \left( \sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k) \right).$$

3. (总 38 分, 前 3 题每小题 6 分, 后 2 小题每题 10 分) 假设冲击按参数为  $\lambda = 1$  的 Poisson 过程发生, 且假设每次冲击独立地以概率  $p$  引起系统失效. 以  $M_r$  记使得系统第  $r$  次失效的冲击数,  $T_r$  表示系统第  $r$  次失效的时刻, 其中  $r \geq 1$  为整数.

- (1) 求  $M_2$  的概率分布;
  - (2) 给定  $M_2 = n \geq 2$ , 求  $T_2$  的条件分布;
  - (3) 求  $P(M_2 = n | T_2 = t)$ , 其中  $n \geq 2$ ;
  - (4) 求  $P(M_r = n | T_r = t)$ , 其中  $n \geq r \geq 3$ ;
  - (5) 假设每次冲击造成系统的损失为  $c_1$  元, 若造成系统失效, 则还需要额外的  $c_2$  元维修损失费. 记  $R(t)$  为  $(0, t]$  时间段冲击造成系统总的损失费, 求  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)/t$ .
4. (14 分) 设一个元件的工作过程可以用更新过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  来描述, 更新间隔序列  $\{X_n, n \geq 1\}$  独立同分布, 共同分布  $F$  具有非格子点性质, 且满足  $E[X_1] = 1$ ,  $E[X_1^3] = 3$ , 记  $Y(t)$  为元件于时刻  $t$  的剩余寿命, 求  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[Y^2(t)]$ .

5. (15 分) 观察一系列独立同分布的离散随机变量  $W_1, W_2, \dots$ , 等待花样“22322”的发生. 设

$$P(W_1 = 0) = P(W_1 = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(W_1 = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(W_1 = 3) = \frac{1}{4},$$

求等待花样“22322”首次发生所需要的期望时间.

## 2021 《实用随机过程》期中考试试题解答

1. (总 18 分, 每小题 6 分) 解: (1) 利用独立增量性质得

$$P(N(2) - N(1) = 3 | N(1) = 2) = P(N(2) - N(1) = 3) = \frac{1}{6} \lambda^3 e^{-\lambda} = \frac{1}{6e}.$$

(2)+(3) 利用  $[(S_1, S_2) | N(1) = 2] \stackrel{d}{=} (U_{1:2}, U_{2:2})$ , 其中  $U_1, U_2 \text{ iid } \sim U(0, 1)$ . 于是,

$$P\left(S_1 \leq \frac{1}{3}, S_2 \leq \frac{1}{3} | N(1) = 2\right) = P\left(U_1 \leq \frac{1}{3}, U_2 \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

$$P\left(S_1 \leq \frac{1}{3} | N(1) = 2\right) = 1 - P\left(U_1 > \frac{1}{3}, U_2 > \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}.$$

2. (15 分) 解: 设  $\{U_k, k \geq 1\} \text{ iid } \sim U(0, \pi/2)$ , 则先证

$$\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(U_k).$$

注意到右端为复合 Poisson 过程, 于是

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right] = \frac{\lambda\pi}{2} E[\sin(U_1)] = \lambda = 1,$$

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} g(S_k)\right) = \frac{\lambda\pi}{2} E[g^2(U_1)] = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\lambda\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3. (总 38 分, 前 3 题每小题 6 分, 后 2 小题每题 10 分) 解: (1) 首先,  $M_2 \sim \text{NB}(2, p)$  服从参数为  $(2, p)$  的负二项分布, 取值于  $\{2, 3, \dots\}$ , 即

$$P(M_2 = n) = \binom{n-1}{1} p^2 (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2 (1-p)^{n-2}, \quad n \geq 2.$$

(2) 利用  $[T_2 | M_2 = n] = [S_n | M_2 = n] = S_n \sim \Gamma(n, 1)$ .

(3) 记  $g_{T_2|M_2}(t|n)$  为  $[T_2 | M_2 = n]$  的条件概率密度函数, 则由 (2) 得

$$g_{T_2|M_2}(t|n) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

对  $M_2$  取条件, 由 (2) 可以得到  $T$  的概率密度函数为

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} g_{T_2|M_2}(t|k) \cdot P(M_2 = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \cdot (k-1)p^2(1-p)^{k-2} = p^2 \lambda^2 t e^{-\lambda t p}. \end{aligned}$$



于是, 当  $n \geq 2$  时,

$$P(M_2 = n | T_2 = t) = \frac{g_{T_2|M_2}(t|n) \cdot P(M_2 = n)}{g_{T_2}(t)} = \frac{[\lambda t(1-p)]^{n-2} \exp\{-\lambda t(1-p)\}}{(n-2)!}.$$

(4) 考虑 Poisson 过程事件分类, 任意时刻  $s$  发生的冲击事件以概率  $p$  划为 I 型事件 (造成系统失效), 以概率  $1-p$  划为 II 型事件 (未造成系统失效), 分别以  $N_i(t)$  表示  $(0, t]$  时间段  $i$  型事件发生的个数. 给定  $T_r = t$  表示系统于时刻  $t$  第  $r$  次失效, 且第  $r$  个 I-型事件一定发生于时刻  $t$ ,  $t$  之前的冲击个数应该为  $N_2(t) + r - 1$ , 即

$$[M_r - (r-1) | T_r = t] = N_2(t) \sim \text{Poi}(\lambda t(1-p)).$$

于是,

$$P(M_r = n | T_r = t) = P(N_2(t) = n - r + 1) = \frac{[\lambda(1-p)t]^{n-r+1} \exp\{-\lambda(1-p)t\}}{(n-r+1)!}.$$

(5) 引进一个更新酬劳过程, 每当冲击造成系统失效, 则称一个更新发生, 该时刻称为更新点. 此时, 一个更新间隔长度  $T$  与  $T_1$  同分布, 一个更新间隔里总的酬劳  $R$  与  $c_1 M_1 + c_2$ . 注意到

$$E[T_1] = E\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i\right] = \frac{1}{\lambda p}, \quad E[R] = c_1 E[M_1] + c_2 = \frac{c_1}{p} + c_2,$$

其中  $\{X_k\}$  为冲击到达间隔. 于是, 利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[T_1]}{E[R]} = c_1 \lambda + c_2 \lambda p = c_1 + c_2 p.$$

4. (14 分) 证法一: 记  $h(t) = E[(X-t)_+^2]$ , 其中  $X \sim F$ , 则  $\int_0^\infty h(s) ds = E[X^3]/3$ . 对  $t$  之前最后一次更新发生时刻  $S_{N(t)}$  取条件得

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E[Y^2(t) | S_{N(t)} = 0] \cdot \bar{F}(t) \\ &\quad + \int_0^t E[Y^2(t) | S_{N(t)} = y] \bar{F}(t-y) dm(y) \\ &= E[(X-t)^2 | X > t] \bar{F}(t) \\ &\quad + \int_0^t E[(X-(t-y))^2 | X > t-y] \bar{F}(t-y) dm(y) \\ &= h(t) + \int_0^t h(t-y) dm(y) \longrightarrow \frac{EX^3}{3\mu} = 1. \end{aligned}$$

证法二: 对首次更新发生时刻  $X_1$  取条件, 得

$$E[Y^2(t)] = E[Y^2(t)|X_1 > t] \cdot \bar{F}(t) + \int_0^t E[Y^2(t)|X_1 = y]dF(y).$$

记  $h(t) = E[(X - t)_+^2]$ ,  $g(t) = E[Y^2(t)]$ , 则

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t - y) dF(y).$$

因此,

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t - y) dm(y).$$

余下同证法一. ■

5. (15 分) 解法一: 构造标准更新酬劳过程  $\{X_n, n \geq 1\}$  如下: 首次出现的花样 “22322” 时刻称为首次更新时刻; 从该时刻以后开始 (不考虑该时刻及其以前的历史) 再次出现该花样的时刻称为第二次更新时刻; 如此下去. 每个更新区间里的酬劳并不是于更新点给付的, 如果在任何时刻  $i$  出现上述花样 (此时考虑该时刻所有的历史), 则给付酬劳  $R_i = 1$  个单位. 在利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[R_1 + R_2 + \cdots + R_n]}{n} = \frac{ER}{ET}, \quad (*.1)$$

其中  $ET$  和  $ER$  分别表示期望更新间隔时和在一个更新间隔时里的期望酬劳. 另一方面,  $R_j = 0, \forall j = 1, \dots, 4; ER_i = 1/64, \forall i \geq 5$ ,

$$\begin{aligned} ER &= 1 + \sum_{j=1}^4 E[\text{在一个更新之后的第 } j \text{ 时刻的酬劳}] \\ &= 1 + \left[ 0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right] \end{aligned}$$

于是利用 (\*.1) 可求出  $ET = 64[1 + 1/16 + 1/32] = 70$ .

解法二: 设  $T_2$  为首次出现花样 “2” 的时刻, 设  $T_{22|2}$  为在出现 “2” 条件下等待花样 “22” 出现所需要的额外时间,  $T_{22322|22}$  为在出现 “22” 条件下花样 “22322” 出现所需要的额外投掷次数, 则首次出现花样 “22322” 所需要的时间

$$T_{22322} = T_2 + T_{22|2} + T_{22322|22},$$

其中  $T_2, T_{22|2}$  和  $T_{22322|22}$  相互独立. 于是利用 (延迟) 更新过程的理论可求出

$$ET_2 = 2, \quad ET_{22|2} = 4, \quad ET_{22322|22} = 64,$$

所以  $ET_{22322} = 2 + 4 + 64 = 70$ . ■