2025 秋数理统计习题课讲义

目录

第一章 作业答案

1.1 PPT1.1

习题 1.3

设总体 X 服从两点分布 $Ber(1,p)$ (即 $\mathbb{P}(X=1)=p, \mathbb{P}(X=0)=1-p$), 其中 p 是未知参数,$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_5)$ 为从此总体中抽取的简单样本,

(1) 写出样本空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathbf{X}$ 的概率分布;

(2) 指出 X_1+X_2, $\min_{1\le i\le 5} X_i$, X_5+2p, $X_5-\mathbb{E}[X_1]$, $(X_5-X_1)/\mathrm{Var}(X_1)$ 哪些是统计量, 哪些不是, 为什么?

解答 (1) 样本空间 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{X}=\{(x_1,\cdots,x_5): x_i=0$ 或$1, i=1,\cdots,5\}$,$\mathbf{X}$ 的概率分布为 $\mathbb{P}(X_1=x_1,\cdots,X_5=x_5)=p^{\sum_{i=1}^5 x_i}(1-p)^{5-\sum_{i=1}^5 x_i}$, 其中 $x_i=0$ 或 $1, i=1,\cdots,5$.

(2) 注意统计量只能是样本的函数, 不能跟未知参数有关. 因此只有 X_1+X_2 和 $\min_{1\le i\le 5} X_i$ 是统计量.

习题 1.7

在正态总体 $\mathcal{N}(50,6^2)$ 中抽取容量为 36 的简单样本, 求样本均值 $\bar{X}$ 落在 50.6 和 51.8 之间的概率.

解答 已知 $X\sim\mathcal{N}(50,6^2), n=36$, 则样本均值 $\bar{X}\sim\mathcal{N}(50,6^2/36)$, 因此 $\bar{X}-50\sim\mathcal{N}(0,1)$. 将欲求概率用标准正态分布表示 (记 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数):

$$\mathbb{P}(50.6<\bar{X}<51.8)=\mathbb{P}(0.6<\bar{X}-50<1.8)=\Phi(1.8)-\Phi(0.6)=0.9641-0.7257=0.2384.$$

注 查表题最好将查表的结果显式地写出.

习题 1.8

设 $X_1,\cdots,X_{100}$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu,1)$ 的样本, 试确定常数 c, 使得 $\forall\mu>0, \mathbb{P}(|\bar{X}|<c)$ 都不超过 0.05.

解答 已知 $X_i\sim\mathcal{N}(\mu,1), n=100$, 则样本均值 $\bar{X}\sim\mathcal{N}(\mu,1/100)$, 因此 $(\bar{X}-\mu)/0.1\sim\mathcal{N}(0,1)$. 将欲求概率用标准正态分布表示:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}|<c)=\mathbb{P}(-c<\bar{X}<c)=\mathbb{P}\left(\frac{-c-\mu}{0.1}<\frac{\bar{X}-\mu}{0.1}<\frac{c-\mu}{0.1}\right)=\Phi\left(\frac{c-\mu}{0.1}\right)-\Phi\left(\frac{-c-\mu}{0.1}\right).$$

由于 $\mu>0$, 因此当 c 固定时,$\mathbb{P}(|\bar{X}|<c)$ 是 μ 的减函数. 因此, 对任意 $\mu>0, \mathbb{P}(|\bar{X}|<c)$ 的最大值在 $\mu\to 0^+$ 时取得. 当 $\mu=0$ 时:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}|<c)=\Phi\left(\frac{c}{0.1}\right)-\Phi\left(\frac{-c}{0.1}\right)=2\Phi\left(\frac{c}{0.1}\right)-1.$$

题目要求 $2\Phi(c/0.1)-1\le 0.05$, 解得 $\Phi(c/0.1)\le 0.525$, 查标准正态分布表得 $c\le 0.1\times 0.063=0.0063$. 即当 $c\le 0.0063$ 时, 对任意的 $\mu>0$, 都有 $\mathbb{P}(|\bar{X}|<c)\le 0.05$.

习题 1.9

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本, 假如要以 99.7% 的概率保证偏差 $|\bar{X}-\mu|<0.1$, 试问在 $\sigma^2=0.5$ 时, 样本容量 n 应取多大?

解答 已知 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \sigma^2 = 0.5$, 则样本均值 $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 1/2n)$, 因此 $\sqrt{2n}(\bar{X}-\mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$. 将欲求概率用标准正态分布表示:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| < 0.1) = \mathbb{P}\left(-0.1\sqrt{2n} < \sqrt{2n}(\bar{X}-\mu) < 0.1\sqrt{2n}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{50}}\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{-n}{50}}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{50}}\right) - 1.$$

题目要求 $2\Phi(\sqrt{n/50}) - 1 \geq 0.997$, 查标准正态分布表得 $\sqrt{n/50} \geq 2.97$, 解得 $n \geq 442$, 因此样本容量 n 至少为 442.

习题 2.3

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为从下列总体中抽取的简单样本, 利用特征函数试求样本均值 $\bar{X}$ 的分布:

(2) 参数为 λ 的 Poisson 总体 $Poi(\lambda)$.

解答 对于 Poisson 分布 $P(\lambda)$, 其特征函数为 $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$. 样本均值 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$ 的特征函数为:

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = [\varphi_X(\frac{t}{n})]^n = \left[\exp\left(\lambda(e^{it/n}-1)\right)\right]^n = \exp(n\lambda(e^{it/n}-1)),$$

这正是 Poisson 分布 $Poi(n\lambda)$ 的特征函数除以 n 后的形式. 因此 $n\bar{X} \sim Poi(n\lambda)$. 这说明 $\bar{X}$ 的概率分布为

$$\mathbb{P}(\bar{X} = \frac{k}{n}) = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

注 $\bar{X} \sim Poi(n\lambda)/n$ 是不规范的写法, 应尽量避免.

1.2 PPT1.2

习题 2.1

设从正态总体 $\mathcal{N}(20, 9)$ 中分别抽取容量为 10 和 15 的两组独立样本, 记这两组样本的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$ 和 S_1^2, S_2^2.

(1) 求两样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

(2) 求 $9S_1^2 + 14S_2^2$ 大于 164 的概率.

解答 (1) 样本均值 $\bar{X} \sim \mathcal{N}(20, 9/10), \bar{Y} \sim \mathcal{N}(20, 9/15)$, 且相互独立, 因此 $\bar{X}-\bar{Y} \sim \mathcal{N}(0, 9/10+9/15) = \mathcal{N}(0, \frac{3}{2})$, 进而 $(\bar{X}-\bar{Y})/\sqrt{3/2} \sim \mathcal{N}(0,1)$. 将欲求概率用标准正态分布表示:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\bar{Y}| > 0.3) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{3/2}}\right| > \frac{0.3}{\sqrt{3/2}}\right) = 2\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{6}}{10}\right)\right) = 2(1-\Phi(0.2449)) = 0.8065.$$

(2) 回顾样本方差的分布定理:$(n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, 可知 $9S_1^2/9 \sim \chi^2_9, 14S_2^2/9 \sim \chi^2_{14}$, 且二者相互独立. 再由卡方分布的可加性知 $(9S_1^2 + 14S_2^2)/9 \sim \chi^2_{23}$, 进而

$$\mathbb{P}(9S_1^2 + 14S_2^2 > 164) = \mathbb{P}\left(\frac{9S_1^2 + 14S_2^2}{9} > \frac{164}{9}\right) = \mathbb{P}(\chi^2_{23} > 18.2222) = 0.7453.$$

习题 2.8

设 $X_1, \ldots, X_n$ 是从总体 $X \sim \chi^2_m$ 中抽取的大小为 n 的简单样本, 试求样本均值 $\bar{X}$ 的概率分布.

解答 由于 $X_i \sim \chi^2_m$ 且相互独立, 根据卡方分布的可加性,$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{nm}$, 已知卡方分布的概率密度函数为:

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{2^{nm/2}\Gamma(\frac{nm}{2})}x^{\frac{nm}{2}-1}e^{-x/2}, \quad s > 0,$$

因此由变量变换公式,

$$f_{\bar{X}}(x) = f_{S_n}(nx) \cdot n = \frac{1}{2^{nm/2}\Gamma(\frac{nm}{2})}(nx)^{\frac{nm}{2}-1}e^{-nx/2} \cdot n = \frac{n^{\frac{nm}{2}}}{2^{nm/2}\Gamma(\frac{nm}{2})}x^{\frac{nm}{2}-1}e^{-\frac{nx}{2}}, \quad x > 0.$$

注 需要牢记正态分布、指数分布等基础分布的概率密度函数、特征函数等性质,并知道 Gamma 分布、卡方分布等分布的均值、方差、特征函数等性质.

习题 2.9

计算自由度为 n 的 χ^2 分布的变异系数和峰度.

解答 设 $X \sim \chi^2_n$, 回顾卡方分布的均值 $\mathbb{E}[X] = n$, 方差 $\mathrm{Var}(X) = 2n$. 因此变异系数 $\gamma := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}/E[X] = \sqrt{2/n}$.

为求卡方分布的峰度, 先使用特征函数法求前四阶矩. 已知卡方分布的特征函数为 $\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$. 回顾特征函数求导与矩的关系:$E[X^k] = \varphi^{(k)}(0)/i^k$, 求导有

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= in(1-2it)^{-n/2-1},\\
\varphi''(t) &= -n(n+2)(1-2it)^{-n/2-2},\\
\varphi'''(t) &= -in(n+2)(n+4)(1-2it)^{-n/2-3},\\
\varphi^{(4)}(t) &= n(n+2)(n+4)(n+6)(1-2it)^{-n/2-4},
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[X] = n, \quad \mathbb{E}[X^2] = n(n+2), \quad \mathbb{E}[X^3] = n(n+2)(n+4), \quad \mathbb{E}[X^4] = n(n+2)(n+4)(n+6).$$

于是 $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4] = \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^3] + 6\mathbb{E}^2[X]\mathbb{E}[X^2] - 3\mathbb{E}^4[X] = 12n^2 + 48n$, 代入峰度公式计算可知

$$\beta_2 := \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^4}{\mathrm{Var}(X)^2} - 3 = \frac{12n^2 + 48n}{4n^2} - 3 = \frac{12}{n}.$$

习题 2.14

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, 且 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$, $S_n^2 = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)/n$, 又设 $X_{n+1} \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ 且与 $X_1, \ldots, X_n$ 独立, 试求统计量

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的分布.

解答 由于 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2/n)$, $X_{n+1} \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ 且二者独立, 因此 $X_{n+1} - \bar{X} \sim \mathcal{N}(0, (n+1)\sigma^2/n)$, 进而

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

与此同时, 由样本方差的分布定理可知

$$nS_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}.$$

另一方面, 由样本方差的分布定理可知 $\bar{X}$ 与 S_n^2 独立. 又因为 X_{n+1} 独立于前 n 个样本, 所以上述两个统计量相互独立, 进而

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{\dfrac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{n-1}}} \sim t_{n-1}.$$

注 本题题目中定义的 $S_n^2 = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)/n$ 是样本的二阶中心矩. 其与样本方差的区别在于, 样本方差通常定义为 $S_n^2 = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)/(n-1)$, 正规化常数是 $1/(n-1)$. 因此本题中使用的样本方差的分布定理的系数需要改变, 需要注意区分.

习题 2.15

设 $X_1,\ldots,X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2)$, 且 $Y_1,\ldots,Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2)$, 且 $X_1,\ldots,X_m$ 和 $Y_1,\ldots,Y_n$ 相互独立,$\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别表示它们的样本均值,S_{1m}^2 和 S_{2n}^2 定义类似上题中的 S_n^2.α 和 β 是两个给定的实数, 试求

$$T=\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}\right)}}$$

的分布.

解答 由于 $\bar{X}\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2/m),\bar{Y}\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2/n)$ 且二者独立, 因此 $\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2(\alpha^2/m+\beta^2/n))$, 进而可得

$$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\sim\mathcal{N}(0,1).$$

与此同时, 由样本方差的分布定理可知 $mS_{1m}^2/\sigma^2\sim\chi_{m-1}^2, nS_{2n}^2/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$, 且二者独立. 因此由卡方分布的可加性可知

$$\frac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{\sigma^2}\sim\chi_{m+n-2}^2.$$

另一方面, 由样本方差的分布定理可知 $\bar{X}$ 与 S_{1m} 独立,$\bar{Y}$ 与 S_{2n} 独立. 又因为两个样本之间独立, 因此上述两个统计量相互独立, 进而

$$T=\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}\right)}}=\frac{\dfrac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{m+n-2}}}\sim t_{m+n-2}.$$

注 验证某个表达式服从 t 分布或 F 分布时除了验证满足的分布之外, 一定要记得验证分子和分母的独立性.

习题 2.21

设从两个方差相等, 且相互独立的两个正态总体中分别抽取样本容量为 15 和 20 样本, 若其样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2, 试求 $\mathbb{P}(S_1^2/S_2^2>2)$.

解答 设单次抽取的方差为 σ^2, 两个样本的大小分别为 n_1,n_2. 由于两个样本均为正态且相互独立, 由样本方差的分布定理可知

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n_1-1}^2,\quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n_2-1}^2,$$

且两者独立. 因此可知

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2(n_1-1)}}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2(n_2-1)}}=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{n_1-1}}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{n_2-1}}\sim F_{n_1-1,n_2-1}=F_{14,19}$$

因此可知

$$\mathbb{P}(S_1^2/S_2^2>2)=\mathbb{P}(F_{14,19}>2)=0.0798.$$

注 本题的结果没法直接查表得到, 需要用计算器.

1.3 PPT1.3

习题 2.30

设总体 X 服从 Weibull 分布，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 α 为形状参数，β 为刻度参数．$(X_1,\cdots,X_n)$ 为从此总体中抽取的简单样本，试证 $Y=\min(X_1,\cdots,X_n)$ 仍服从 Weibull 分布并指出 Y 的分布的形状参数和刻度参数是什么？

解答 记 survival function

$$S(x)=1-F(x)$$

那么易知

$$S_X(x)=\begin{cases}e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

同时有

$$S_Y(x)=P(X_1,...,X_n\geq x)=(S_X(x))^n=\begin{cases}e^{-n(x/\beta)^{\alpha}}=e^{-(x/(\beta/n^{1/\alpha}))^{\alpha}}, x\geq 0\\ 1, x<0.\end{cases}$$

故我们可以轻松地看出 Y 也是 weibull 分布，且形状参数仍为 α, 刻度参数为 $\frac{\beta}{n^{1/\alpha}}$

注 比较简单的“最小值”统计量的分布，需要注意的是不少同学会误判它的刻度参数。

习题 2.32

设总体 X 服从双指数分布，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}, & x>\mu\\ 0, & x\leqslant\mu\end{cases}$$

其中 $-\infty<\mu<\infty, 0<\sigma<\infty, X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量，试证明 $\frac{2(n-i+1)}{\sigma}\left(X_{(i)}-X_{(i-1)}\right)$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布 $(i=2,\cdots,n)$

解答 这个题爆算好像也能做，不过那样就像是没有熟练运用所学了，我们可以考虑变换一下。因为只考虑差值，不妨设 $\mu=0$。令

$$Y_1=X_{(1)}, Y_i=X_{(i)}-X_{(i-1)}, i=2,\ldots,n,$$

那么

$$\left|\frac{\partial\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)}{\partial\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\right|=1.$$

我们可以计算出 $Y_1.Y_2\ldots Y_n$ 的联合密度

$$\begin{aligned}f_{Y_1,\ldots,Y_n}\left(y_1,\ldots,y_n\right)&=f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}\left(y_1,y_1+y_2,\ldots,y_1+\ldots+y_n\right)\left|\frac{\partial\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)}{\partial\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)}\right|\\&=n!\prod_{i=1}^{n}f_X\left(y_i\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1-i}{\sigma}e^{\frac{n+1-i}{\sigma}y_i}I_{(0,+\infty)}\left(y_i\right)\right)\end{aligned}$$

分解联合 $p.d.f$(或者说我们积分一下也可以得出), 我们可以推出 $Y_i, i=1,\dots,n$ 是独立同分布于 $\text{Exp}\left(\frac{\sigma}{n+1-i}\right)$. 由此,

$$\frac{2(n+1-i)}{\sigma}Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \chi_2^2.$$

注 最后一步是基于以下的一些分布的关系

$$Exp(\sigma)=\Gamma\left(1,\frac{1}{\sigma}\right),\quad \chi_p^2=\Gamma\left(\frac{p}{2},\frac{1}{2}\right).$$
$$\frac{2}{\sigma}Exp(\sigma)=\chi_2^2.$$

补充：习题 2.31

某电子元件寿命服从指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}, & 0<x<\infty\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

从这批产品中抽取 n 个作寿命试验，规定到第 $r(0<r\leqslant n)$ 个电子元件失效时就停止试验. 这样获得前 r 个次序统计量 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(r)}$ 和 n 个电子元件总试验时间 $T=\sum_{i=1}^r X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}$ ，证明 $\frac{2T}{\lambda}$ 服从自由度为 $2r$ 的 χ^2 分布，即 $\frac{2T}{\lambda}\sim\chi_{2r}^2$.

解答 我们在前面可以看到这题就是取 $\lambda=\sigma$ 的情况, 由之前讨论，我们有:

$$\begin{aligned}\frac{2T}{\lambda}&=\frac{2}{\lambda}\left(nX_{(1)}-(n-1)X_{(1)}+(n-1)X_{(2)}-(n-2)X_{(2)}+\ldots+(n+1-r)X_{(r)}\right)\\&=\frac{2}{\lambda}\left(nY_1+(n-1)Y_2+\ldots+(n+1-r)Y_r\right)\\&=\sum_{i=1}^r\frac{2(n+1-i)}{\lambda}Y_i\sim\chi_{2r}^2.\end{aligned}$$

最后一步是卡方分布的性质，注意这里 Y_i 我们证过独立了。

1.4 PPT1.4

习题 1.15

（1）对数正态分布 $\text{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad x>0,\quad -\infty<\mu<\infty.$$

（2）Cauchy 分布 $C(\mu,\lambda)$

$$f(x;\mu,\lambda)=\frac{\lambda}{\pi\left[\lambda^2+(x-\mu)^2\right]},\quad x\in\mathbb{R}^1,\lambda>0,\mu\in\mathbb{R}^1.$$

（3）拉普拉斯（Laplace）分布 $\text{La}(\mu,\lambda)$

$$f(x;\mu,\lambda)=\frac{1}{2\lambda}\exp\left\{-\frac{-|x-\mu|}{\lambda}\right\},\quad x\in\mathbb{R}^1,\mu\in\mathbb{R}^1,\lambda>0.$$

（4）三参数韦布尔（Weibull）分布 $W(\mu,\alpha,\lambda)$

$$f(x;\mu,\alpha,\lambda)=\lambda\alpha(x-\mu)^{\alpha-1}\exp\left\{-\lambda(x-\mu)^\alpha\right\},\quad x>\mu,\mu\geqslant 0,\alpha>0,\lambda>0.$$

（5）多项分布 $M(n,\boldsymbol{\theta})$ ，其中 $\sum_{i=1}^{k} x_i = n, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$ ，

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_k^{x_k}, \quad x_i > 0, \theta_i > 0, i = 1,\cdots,k,$$

其中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_k)$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_k)$. 试判断上述分布族是否是指数型分布族

解答 (1) 是；展开后发现

$$T_1(x) = (lnx)^2, T_2(x) = lnx, h(x) = \frac{1}{x}$$

(2)(3)(4) 都不是指数族，但具体证明比较麻烦，也不是考试会涉及的。判断方法就是把密度函数写成差不多类似指数族的，然后你会发现没法分离它们.

(5) 是；

$$T_i(\vec{x}) = x_i, h(\vec{x}) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_n!}$$

注 指数族的判断确实有时候要拼熟练度，但是指数族涵盖了很大一部分常见分布，而后面像 $C-R$ 不等式等其它结论如果总体分布属于指数族的话会简单很多，这使得它其实很有用。

习题 1.16

将负二项分布和指数分布写成指数族的标准形式，并求出其自然参数空间.

解答 我们记 Negbin(r, p) 为参数 $0 < p < 1$ (fix r) 的负二项分布.

Negbin(r,p) :

$$\begin{aligned} f(n;p) &= \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} \overset{\theta:=\log(1-p)}{=} \left(\frac{1-e^\theta}{e^\theta}\right)^r \exp\{\theta n\}\binom{n-1}{r-1} \\ &:= C(\theta)\exp\{\theta n\}h(n), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq r} \end{aligned}$$

有 $C(\theta) := \left(\frac{1-e^\theta}{e^\theta}\right)^r$, $h(n) := \binom{n-1}{r-1}$. 其自然参数空间为 $\{\theta : \theta \in (-\infty, 0)\}$.

Exp(λ) :

$$\begin{aligned} f(x;\lambda) &= \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}I_{(0,+\infty)}(x) \overset{\theta:=-\frac{1}{\lambda}}{=} -\theta\exp\{\theta x\}I_{(0,+\infty)}(x) \\ &:= C(\theta)\exp\{\theta x\}h(x), \end{aligned}$$

有 $C(\theta) := -\theta, h(x) := I_{(0,+\infty)}(x)$. 其自然参数空间为 $\{\theta : \theta \in (-\infty, 0)\}$

注 这种题答案可以很不一致，因为有一步自选的变换。如果 $r = \sum X_i$ 依赖于样本而不固定。那么我们的参数变换是：

$$\tilde{\theta} := log(\frac{p}{1-p})$$

习题 1.17

设指数族的自然形式为 $f(x,\boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta})\exp\left\{\sum_{j=1}\theta_j T_j(x)\right\}h(x), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_k)$ ，证明

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}\left(T_j(x)\right) = -\frac{\partial \ln C(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j} = -\frac{1}{C(\boldsymbol{\theta})}\frac{\partial C(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}, \quad \operatorname{Cov}\left(T_j(x), T_s(x)\right) = -\frac{\partial^2 \ln C(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_s}.$$

解答

$$\text{由} \int f(x,\theta)dx = 1$$

$$\Longrightarrow c(\theta) = \frac{1}{\int \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \theta_j T_j(x)\right) h(x)dx} \triangleq \frac{1}{p(\theta)}$$

则

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} &= -\tfrac{1}{P^2(\theta)} \int T_j(x) \exp\left(\textstyle\sum_{j=1}^{k} \theta_j T_j(x)\right) h(x)dx \\ &= -\tfrac{1}{P(\theta)} \cdot \mathbb{E}_\theta\left(T_j(x)\right) = -c(\theta)\mathbb{E}_\theta\left(T_j(x)\right) \qquad -------------- 1 \\ \Longrightarrow -\tfrac{\partial \ln c(\theta)}{\partial \theta_j} &= -\tfrac{1}{c(\theta)} \tfrac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} = \mathbb{E}_\theta\left(T_j(x)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} = -c(\theta)\mathbb{E}_\theta\left(T_j(x)\right)$$

$$\text{且} \frac{\partial^2 \ln c(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_s} = -\frac{1}{C^2(\theta)} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_s} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} + \frac{1}{C(\theta)} \frac{\partial^2 c(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_s} -------------- 2$$

其中 $\frac{\partial^2 C(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_s} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(-\frac{1}{p^2(\theta)} T_s(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x)\right) h(x)dx\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{P^3(\theta)} \int T_j(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x)\right) h(x)dx \cdot \int T_s(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x)\right) h(x)dx \\ &\quad - \frac{1}{P^2(\theta)} \int T_j(x) T_s(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x)\right) h(x)dx \end{aligned}$$

$$= 2c(\theta)\mathbb{E}_\theta T_j(x) \mathbb{E}_\theta T_{s(x)} - c(\theta)\mathbb{E}_\theta T_j(x) T_s(x) ------------- 3$$

由 1、2、3

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 \log C(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_s} = -\operatorname{Cov}_\theta\left(T_j(x), T_s(x)\right)$$

第三、四次作业

1.5 PPT 1.5

作业 1

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\theta)$，证明：

$$T(\mathbf{X}) = X_{(1)} \text{ 不是} \theta \text{ 的充分统计量。}$$

解答 指数分布的概率密度函数为

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,+\infty)}(x),$$

样本的联合密度为

$$f(\mathbf{x};\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i).$$

记 $T(\mathbf{X}) = X_{(1)}$，则 T 的边际密度为

$$f_T(t) = n\theta e^{-n\theta t} I_{(0,+\infty)}(t).$$

因此条件密度为

$$f_{\mathbf{X}|T}(\mathbf{x} \mid t) = \frac{f(\mathbf{x};\theta)}{f_T(t)} = \frac{\theta^{n-1}}{n} e^{\theta(nt - \sum_{i=1}^n x_i)} \prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i).$$

该条件密度关于 θ 非常数（除非 $n=1$），故由定义可知 $T(\mathbf{X})$ 不是充分统计量。注 也可证明 $T_0(\mathbf{X}) = \sum X_i$ 是 θ 的极小充分统计量，而 $X_{(1)}$ 不能表示为 T_0 的函数，因此亦非充分统计量。

作业 2

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为来自下列分布的简单样本：

$$f(x|a,b) = c(a,b)\phi(x) I_{(a,b)}(x), \quad -\infty < a < b < \infty,$$

其中

$$0 < c(a,b) = \left[\int_a^b \phi(x)\, dx\right]^{-1} < \infty.$$

证明：$T(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ 是 (a,b) 的充分统计量。

解答 样本联合密度为

$$f(\mathbf{x};a,b) = [c(a,b)]^n \prod_{i=1}^n \phi(x_i) I_{(a,b)}(x_i) = [c(a,b)]^n \left(\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\right) I_{(a,b)}(X_{(1)}, X_{(n)}).$$

由因子分解定理可知，$T(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ 对 (a,b) 是充分统计量。

习题 2.38

设 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单样本，证明

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$$

是 λ 的充分统计量。

解答 (1) 从定义出发：若 $T(\mathbf{X}) = t$，则有

$$f(\mathbf{x}|T=t) = \frac{f(\mathbf{x};\lambda)}{f_T(t)} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}/\prod x_i!}{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t/t!} = \frac{t!}{n^t \prod x_i!},$$

与 λ 无关。故由定义 $T = \sum X_i$ 是充分统计量。

(2) 用因子分解定理：

$$f(\mathbf{x};\lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}\frac{1}{\prod x_i!} = g(T(\mathbf{x}),\lambda)h(\mathbf{x}),$$

其中 $g(T,\lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^T$，$h(\mathbf{x}) = 1/\prod x_i!$。由因子分解定理，$T(\mathbf{X}) = \sum X_i$ 为 λ 的充分统计量。

习题 2.39

设 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 为来自几何分布的简单样本，试证明

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$$

是 p 的充分统计量。

解答 (1) 从定义出发：若 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Geo}(p)$，则 $\sum X_i \sim \mathrm{NegBin}(n,p)$。

$$f(\mathbf{x}|T=t) = \frac{f(\mathbf{x};p)}{f_T(t)} = \frac{p^n(1-p)^{\sum x_i - n}}{\binom{t-1}{n-1}p^n(1-p)^{t-n}} = \frac{1}{\binom{t-1}{n-1}},$$

与 p 无关，因此 T 是 p 的充分统计量。

(2) 因子分解定理：

$$f(\mathbf{x};p) = p^n(1-p)^{\sum x_i - n} = g(T(\mathbf{x}),p)h(\mathbf{x}),$$

其中 $g(T,p) = p^n(1-p)^{T-n}$，$h(\mathbf{x}) = 1$，由因子分解定理 $T(\mathbf{X}) = \sum X_i$ 为充分统计量。

习题 2.42

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta, \theta^2)$，$\theta > 0$。问 $\bar{X}$ 是否为充分统计量?

解答 不是。证明如下：

样本联合密度为

$$f(\mathbf{x};\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\theta^n}\exp\left[-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2\right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\theta^n}\exp\left[-\frac{1}{2\theta^2}\sum x_i^2 + \frac{1}{\theta}\sum x_i - \frac{n}{2}\right].$$

取

$$T(\mathbf{X}) = \left(\sum X_i, \sum X_i^2\right),$$

由因子分解定理可见，T 为 θ 的充分统计量。

若仅取 $\bar{X} = \sum X_i/n$，其为 T 的函数之一，但不足以一一对应 T。存在不同样本 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 满足 $\bar{x} = \bar{y}$ 但 $\sum x_i^2 \neq \sum y_i^2$，因此条件密度比 $f(\mathbf{x};\theta)/f(\mathbf{y};\theta)$ 依然含 θ，故 $\bar{X}$ 不是充分统计量。

习题 2.4

设 $X_1, X_2 \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2)$，记

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \qquad U = \frac{X_1}{X_2}.$$

证明 R 与 U 相互独立。

解答 令 $Y_i = X_i/\sigma$ $(i = 1, 2)$，则 $Y_1, Y_2 \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$，因此

$$U = \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2},$$

其分布与 σ 无关（即柯西分布），故 U 是关于 σ^2 的辅助统计量。又因

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{\sigma^2} = Y_1^2 + Y_2^2 \sim \chi_2^2,$$

为正态族的完全充分统计量，所以 R（为其函数）对 σ^2 也是完全充分的。由 Basu 定理，辅助统计量 U 与完全充分统计量 R 独立，即

$$R \perp U.$$

习题 2.48

已知密度函数

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}, \quad \theta > 0.$$

试证：统计量 $T(X) = \sum_{i=1}^n |X_i|$ 是 θ 的充分且完全统计量。

解答 样本似然函数为

$$L(\theta|x) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n |x_i|\right\}.$$

由因子分解定理可知 $T(X) = \sum |X_i|$ 对 θ 充分。又可将模型改写为一参数指数族形式：

$$f(x; \theta) = \exp\left[-\frac{|x|}{\theta} - \log(2\theta)\right],$$

其自然参数为 $\eta = -1/\theta \in (-\infty, 0)$（为开集），支撑集与参数无关，因此 $T(X)$ 在此族中完全。综上，$T(X) = \sum |X_i|$ 是 θ 的充分完全统计量。

习题 2.49

设 $X_1, \ldots, X_n$ 来自移位指数分布：

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{(x>\theta)}.$$

求充分完全统计量。

解答 样本最小值 $T = X_{(1)}$ 的密度为

$$f_T(t) = ne^{-n(t-\theta)} \mathbf{1}_{(t>\theta)}.$$

由因子分解定理可知 T 对 θ 充分。若对所有 θ 有

$$E_\theta[\phi(T)] = \int_\theta^\infty \phi(t)\, ne^{-n(t-\theta)} dt = 0,$$

则令 $u = t - \theta$，得

$$0 = \int_0^\infty \phi(\theta + u)\, ne^{-nu} du.$$

对 θ 求导可得 $\phi(\theta) = 0$，即 $\phi(T) = 0$ 几乎处处，说明 T 完全。因此，$X_{(1)}$ 是 θ 的充分完全统计量。

习题 2.51

设 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} U(\theta, 2\theta)$，$\theta > 0$。证明 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 是充分但不完全统计量。

解答 顺序统计量联合密度为

$$f(x_{(1)}, x_{(n)}; \theta) = \frac{n(n-1)}{\theta^n}[x_{(n)} - x_{(1)}]^{n-2}\mathbf{1}_{(\theta < x_{(1)} < x_{(n)} < 2\theta)}.$$

由因子分解定理，$T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ 对 θ 充分。设 $Y_i = X_i/\theta \sim U(1,2)$，则

$$\frac{X_{(n)}}{X_{(1)}} = \frac{Y_{(n)}}{Y_{(1)}},$$

其分布与 θ 无关，说明存在非常数函数 $h(T)$ 满足 $E_\theta[h(T)] = 0$，故 T 非完全。因此，$(X_{(1)}, X_{(n)})$ 是充分但不完全统计量。

—

习题 2.55

设 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从 $N(a, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，$Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 是从 $N(b, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，且合样本 $X_1, \cdots, X_n; Y_1, \cdots, Y_n$ 相互独立，证明 $T(X,Y) = (\bar{X}, \bar{Y}, Q_1^2, Q_2^2)$ 与

$$r(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{Q_1^2 \cdot Q_2^2}}$$

独立，此处 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$，$\bar{Y} = \sum_{j=1}^n Y_j/n$，$Q_1^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$，$Q_2^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$。

解答

$$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(a, \sigma_1^2), \quad Y_1, \ldots, Y_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(b, \sigma_2^2)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \mid a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n(\sigma_1\sigma_2)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum (x_i - a)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum (y_i - b)^2\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n(\sigma_1\sigma_2)^n} \exp\left\{-\frac{na^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a}{\sigma_1^2}\sum x_i - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum x_i^2 - \frac{nb^2}{2\sigma_2^2} + \frac{b}{\sigma_2^2}\sum y_i - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum y_i^2\right\}.
\end{aligned}$$

由因子分解定理：

$$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad T_2 = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum y_i, \quad T_3 = Q_1^2 = \sum (x_i - \bar{X})^2, \quad T_4 = Q_2^2 = \sum (y_i - \bar{Y})^2.$$

故充分统计量为

$$T(X,Y) = (\bar{X}, \bar{Y}, Q_1^2, Q_2^2).$$

参数空间为

$$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

在 $\mathbb{R}^4$ 的内部点，指数族为单参数指数族，因此 $T(X,Y)$ 完全。

$$Z_i = \frac{X_i - a}{\sigma_1}, \qquad W_i = \frac{Y_i - b}{\sigma_2},$$

则

$$Z_1, \ldots, Z_n, W_1, \ldots, W_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1).$$

相关系数:

$$r(X,Y)=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{Q_1^2Q_2^2}}$$
$$=\frac{\sum(Z_i-\bar{Z})(W_i-\bar{W})}{\sqrt{\sum(Z_i-\bar{Z})^2\sum(W_i-\bar{W})^2}}.$$

r 与 $a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 无关，故为辅助统计量。
由 Basu 定理，$T(X,Y)$ 与 $r(X,Y)$ 独立。

1.6 PPT 2-1

习题 3.7

设随机变量 X 的分布为

$$\Pr(X=k)=-\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k},\qquad 0<p<1.$$

求 p 的矩估计。

解答 计算

$$E[X]=\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)},\qquad E[X^2]=\frac{1}{(1-p)^2\ln(1-p)}.$$

则

$$\frac{E[X]}{E[X^2]}=1-p\quad\Rightarrow\quad p=1-\frac{E[X]}{E[X^2]}.$$

以样本矩代替得矩估计:

$$\hat{p}_{\mathrm{MoM}}=1-\frac{\sum_i X_i}{\sum_i X_i^2}.$$

习题 3.8

设 $X_1,\dots,X_n\sim N(0,\sigma^2)$，求 σ 的矩估计。

解答

(1) 由 $E|X|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$，得

$$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{|X|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|.$$

(2) 由 $D(X)=\sigma^2$，取样本方差

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

得

$$\hat{\sigma}_2=\sqrt{S_n^2}.$$

习题 3.9

设 $X\sim N(a,\sigma^2)$，求 $\mathbb{P}(X>1)$ 的矩估计。

解答

$$\mathbb{P}(X>1)=\Phi\left(\frac{a-1}{\sigma}\right).$$

矩估计取 $\hat{a}=\bar{X}$，$\hat{\sigma}=\sqrt{S_n^2}$，其中

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

于是

$$\widehat{\mathbb{P}(X>1)}_{\mathrm{MoM}}=\Phi\left(\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{S_n^2}}\right).$$

习题 3.14

设总体 X 的密度为

$$f(x;a,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-a|}{\sigma}\right),$$

其中 $\sigma>0$，$-\infty<a<\infty$ 为未知参数。设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自此总体的简单样本，求 a 和 σ 的矩估计与极大似然估计。

解答 首先计算矩估计。由

$$E[X]=a,\qquad Var(X)=2\sigma^2,$$

故矩估计为

$$\hat{a}_{\mathrm{MoM}}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \hat{\sigma}_{\mathrm{MoM}}=\sqrt{\frac{S_n^2}{2}},\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

极大似然估计：样本似然函数为

$$L(a,\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i-a|\right).$$

取对数得

$$\ell(a,\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|X_i-a|.$$

对于固定 σ，最大化 $\ell(a,\sigma)$ 等价于最小化 $\sum|X_i-a|$，其最优解为样本中位数：

$$\hat{a}_{\mathrm{MLE}}=X_{(\lceil n/2\rceil)}.$$

再将 $\hat{a}_{\mathrm{MLE}}$ 代入，对 σ 求偏导：

$$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum|X_i-\hat{a}_{\mathrm{MLE}}|=0,$$

得

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\hat{a}_{\mathrm{MLE}}|.$$

习题 3.16

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自双参数指数分布

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\quad x\geq\mu,$$

的简单样本。求 μ、σ 及 $P_\theta(X_1\geq t)$ 的矩估计和极大似然估计。

解答 计算得

$$P_\theta(X_1 \geq t) = \exp\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right), \quad t > \mu.$$

由

$$E[X] = \mu + \sigma, \qquad Var(X) = \sigma^2,$$

可得矩估计为

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MoM}} = \bar{X} - \sqrt{S_n^2}, \qquad \hat{\sigma}_{\mathrm{MoM}} = \sqrt{S_n^2},$$

并有

$$P_\theta\widehat{(X_1 \geq t)}_{\mathrm{MoM}} = \exp\left(-\frac{t - \bar{X} + \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{S_n^2}}\right).$$

极大似然估计：似然函数为

$$L(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right) I_{(X_{(1)} \geq \mu)}.$$

对 μ 单调递增，故 $\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = X_{(1)}$。代入后对 σ 求导：

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum (X_i - X_{(1)}) = 0,$$

得

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}),$$

从而

$$P_\theta\widehat{(X_1 \geq t)}_{\mathrm{MLE}} = \exp\left(-\frac{t - X_{(1)}}{\hat{\sigma}_{\mathrm{MLE}}}\right).$$

习题 3.17

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为从 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ 分布中抽取的简单样本，求 θ 的最大似然估计。

解答 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n I_{(\theta-1/2,\ \theta+1/2)}(X_i) = I_{(X_{(n)}-1/2,\ X_{(1)}+1/2)}(\theta).$$

因此

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} \in (X_{(n)} - 1/2,\ X_{(1)} + 1/2),$$

即 θ 的极大似然估计可以取该区间内任意值。

习题 3.21

一只罐子中装有黑白两种球，有放回地抽取大小为 n 的样本，其中有 k 个白球。设罐中黑白球之比为 μ，求其最大似然估计。

解答 抽到白球的概率为 $1/(1+\mu)$，黑球的概率为 $\mu/(1+\mu)$。则

$$P(K = k|\mu) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{1+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{n-k}.$$

取对数似然函数：

$$\ell(\mu) = (n-k)\ln\mu - n\ln(1+\mu) + C.$$

对 μ 求导：

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{n-k}{\mu} - \frac{n}{1+\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \frac{n}{k} - 1.$$

因此，罐中黑白球数之比的极大似然估计为

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \frac{n}{k} - 1.$$

第五次作业

习题 1.21

设 θ 是一批产品的不合格率，已知它不是 0.1 就是 0.2，且其先验分布为 $P(\theta=0.1)=0.7, P(\theta=0.2)=0.3$。假如从这批产品中随机抽取 8 个进行检查，发现有 2 个不合格，求 θ 的后验分布。

解答 已知先验分布为：

$$P(\theta=0.1)=0.7, \quad P(\theta=0.2)=0.3$$

从这批产品中随机抽取 8 个，发现 2 个不合格。在给定不合格率 θ 时，不合格数 $X \sim \text{Binomial}(n=8, p=\theta)$，其概率为：

$$P(X=2 \mid \theta)=\binom{8}{2}\theta^2(1-\theta)^6$$

计算两种 θ 对应的似然值：

$$P(X=2 \mid \theta=0.1)=\binom{8}{2}(0.1)^2(0.9)^6 \approx 0.1488$$
$$P(X=2 \mid \theta=0.2)=\binom{8}{2}(0.2)^2(0.8)^6 \approx 0.2936$$

利用贝叶斯公式，后验分布为：

$$P(\theta=0.1 \mid X=2)=\frac{P(X=2 \mid \theta=0.1)P(\theta=0.1)}{\sum_\theta P(X=2 \mid \theta)P(\theta)}$$
$$=\frac{0.1488\times 0.7}{0.1488\times 0.7+0.2936\times 0.3} \approx \frac{0.10416}{0.10416+0.08808}=\frac{0.10416}{0.19224} \approx 0.5417$$
$$P(\theta=0.2 \mid X=2)=1-0.5417=0.4583$$

因此，θ 的后验分布为：

$$P(\theta=0.1 \mid X=2) \approx 0.5417, \quad P(\theta=0.2 \mid X=2) \approx 0.4583$$

最终结果：

$$\boxed{P(\theta=0.1 \mid X=2) \approx 0.5417, \quad P(\theta=0.2 \mid X=2) \approx 0.4583}$$

习题 1.23

设一卷磁带上的缺陷数服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，其中 λ 可取 1.0 和 1.5 中的一个，又设 λ 的先验分布为 $P(\lambda=1.0)=0.4$，$P(\lambda=1.5)=0.6$。假如检查一卷磁带发现 3 个缺陷，求 λ 的后验分布。

解答 已知先验分布为：

$$P(\lambda=1.0)=0.4, \quad P(\lambda=1.5)=0.6$$

检查一卷磁带发现 3 个缺陷。在给定参数 λ 时，缺陷数 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，其概率为：

$$P(X=3 \mid \lambda)=\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

计算两种 λ 对应的似然值：

$$P(X=3 \mid \lambda=1.0)=\frac{1.0^3 e^{-1.0}}{3!}=\frac{e^{-1}}{6} \approx 0.0613$$
$$P(X=3 \mid \lambda=1.5)=\frac{1.5^3 e^{-1.5}}{3!}=\frac{3.375 e^{-1.5}}{6} \approx 0.1255$$

利用贝叶斯公式，后验分布为：

$$P(\lambda=1.0\mid X=3)=\frac{P(X=3\mid\lambda=1.0)P(\lambda=1.0)}{\sum\limits_{\lambda}P(X=3\mid\lambda)P(\lambda)}$$

$$=\frac{0.0613\times0.4}{0.0613\times0.4+0.1255\times0.6}=\frac{0.02452}{0.02452+0.07530}=\frac{0.02452}{0.09982}\approx0.2456$$

$$P(\lambda=1.5\mid X=3)=1-0.2456=0.7544$$

因此，λ 的后验分布为：

$$P(\lambda=1.0\mid X=3)\approx0.2456,\quad P(\lambda=1.5\mid X=3)\approx0.7544$$

最终结果：

$$\boxed{P(\lambda=1.0\mid X=3)\approx0.2456,\quad P(\lambda=1.5\mid X=3)\approx0.7544}$$

习题 1.25

考虑一个试验，对给定的 θ，试验结果 X 有如下密度函数：

$$p(x\mid\theta)=\frac{2x}{\theta^2},\quad 0<x<\theta<1.$$

(1) 假如 θ 的先验分布是 $(0,1)$ 上的均匀分布，试求 θ 的后验分布；

(2) 假如 θ 的先验密度是 $\pi(\theta)=3\theta^2, 0<\theta<1$，试求 θ 的后验分布。

解答 设观测到样本 $X=x_0$，其中 $0<x_0<1$。

(1) 先验为均匀分布 $\pi(\theta)=1, 0<\theta<1$

后验分布为：

$$\pi(\theta\mid x_0)\propto p(x_0\mid\theta)\cdot\pi(\theta)=\frac{2x_0}{\theta^2}\cdot1=\frac{2x_0}{\theta^2},\quad x_0<\theta<1.$$

去掉与 θ 无关的常数 $2x_0$：

$$\pi(\theta\mid x_0)\propto\theta^{-2},\quad x_0<\theta<1.$$

计算归一化常数：

$$C=\int_{x_0}^{1}\theta^{-2}d\theta=\left[-\theta^{-1}\right]_{x_0}^{1}=-1+\frac{1}{x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}.$$

因此后验密度为：

$$\pi(\theta\mid x_0)=\frac{\theta^{-2}}{\frac{1-x_0}{x_0}}=\frac{x_0}{1-x_0}\theta^{-2},\quad x_0<\theta<1.$$

(2) 先验为 $\pi(\theta)=3\theta^2, 0<\theta<1$

后验分布为：

$$\pi(\theta\mid x_0)\propto p(x_0\mid\theta)\cdot\pi(\theta)=\frac{2x_0}{\theta^2}\cdot3\theta^2=6x_0,\quad x_0<\theta<1.$$

去掉与 θ 无关的常数 $6x_0$：

$$\pi(\theta\mid x_0)\propto1,\quad x_0<\theta<1.$$

计算归一化常数（区间长度为 $1-x_0$）：

$$C=\int_{x_0}^{1}1d\theta=1-x_0.$$

因此后验密度为：

$$\pi(\theta\mid x_0)=\frac{1}{1-x_0},\quad x_0<\theta<1.$$

最终答案:

(1) 先验为均匀分布时:

$$\boxed{\pi(\theta \mid x) = \frac{x}{1-x}\theta^{-2}, \quad x < \theta < 1}$$

(2) 先验为 $\pi(\theta) = 3\theta^2$ 时:

$$\boxed{\pi(\theta \mid x) = \frac{1}{1-x}, \quad x < \theta < 1}$$

习题 1.34

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是从均匀分布 $U(0, \theta)$ 中抽取的简单样本，又假设 θ 的先验分布是 Pareto 分布 $Pa(\theta_0, \alpha)$，其密度函数为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, & \theta > \theta_0, \\ 0, & \theta \le \theta_0, \end{cases}$$

其中 $\theta_0 > 0$，$\alpha > 0$。证明 Pareto 分布是 $U(0, \theta)$ 中端点 θ 的共轭先验分布。

解答 1. 样本的似然函数

设样本 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 来自均匀分布 $U(0, \theta)$，其密度函数为

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

样本的联合密度函数（似然函数）为

$$L(\theta \mid X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & \theta > \max(x_1, \ldots, x_n), \\ 0, & \theta \le \max(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

记 $T = \max(x_1, \ldots, x_n)$，则似然函数可写为

$$L(\theta \mid X) = \begin{cases} \theta^{-n}, & \theta > T, \\ 0, & \theta \le T. \end{cases}$$

2. 后验分布的计算

先验分布为 Pareto 分布:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, & \theta > \theta_0, \\ 0, & \theta \le \theta_0. \end{cases}$$

根据贝叶斯公式，后验分布与先验乘以似然成比例:

$$\pi(\theta \mid X) \propto L(\theta \mid X) \cdot \pi(\theta).$$

考虑 θ 的取值范围。要使后验分布非零，必须同时满足:

- $\theta > \theta_0$（来自先验分布的支持集）
- $\theta > T$（来自似然函数的支持集）

因此，后验分布的有效定义域为 $\theta > \max(\theta_0, T)$。

在后验分布的支持集上:

$$\pi(\theta \mid X) \propto \theta^{-n} \cdot \theta^{-(\alpha+1)} = \theta^{-(n+\alpha+1)}, \quad \theta > \max(\theta_0, T).$$

即

$$\pi(\theta \mid X) \propto \theta^{-(n+\alpha+1)}, \quad \theta > \max(\theta_0, T).$$

3. 后验分布的识别

考虑函数形式：

$$\pi(\theta \mid X) \propto \theta^{-(n+\alpha+1)}, \quad \theta > \max(\theta_0, T).$$

这正是 Pareto 分布的核函数。具体地，设 $\theta_0^* = \max(\theta_0, T)$，$\alpha^* = n + \alpha$，则

$$\pi(\theta \mid X) \propto \theta^{-(\alpha^*+1)}, \quad \theta > \theta_0^*.$$

归一化常数应为 $\alpha^*(\theta_0^*)^{\alpha^*}$，因此后验分布为

$$\pi(\theta \mid X) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^*(\theta_0^*)^{\alpha^*}}{\theta^{\alpha^*+1}}, & \theta > \theta_0^*, \\ 0, & \theta \le \theta_0^*, \end{cases}$$

其中 $\theta_0^* = \max(\theta_0, T)$，$\alpha^* = n + \alpha$。

4. 结论

后验分布 $\pi(\theta \mid X)$ 仍然是 Pareto 分布，只是参数更新为：

$$\theta_0^* = \max(\theta_0, T), \quad \alpha^* = n + \alpha.$$

因此，Pareto 分布是均匀分布 $U(0, \theta)$ 中端点 θ 的共轭先验分布。

最终结论

$$\boxed{\text{Pareto 分布是均匀分布 } U(0,\theta) \text{ 中参数 } \theta \text{ 的共轭先验分布}}$$

$$\boxed{\text{后验分布为：} Pa(\max(\theta_0, T), n + \alpha)}$$

习题 3.53

设随机变量 X 服从几何分布

$$p(x \mid \theta) = \mathbb{P}(X = x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots,$$

其中参数 θ 的先验分布为均匀分布 $U(0, 1)$。

(1) 若只对 X 作一次观察，观察值为 3，求 θ 的后验期望估计；

(2) 若对 X 作三次观察，观察值为 3, 2, 5，求 θ 的后验期望估计。

解答 1. 先验分布与似然函数

先验分布为：

$$\pi(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1.$$

几何分布的似然函数为：

$$p(x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}.$$

对于样本 $X = (x_1, \ldots, x_n)$，似然函数为：

$$L(\theta \mid X) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i-1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}.$$

记 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) = S - n$，因此：

$$L(\theta \mid X) = \theta^n (1-\theta)^{S-n}.$$

2. 后验分布

根据贝叶斯公式，后验分布为：

$$\pi(\theta \mid X) \propto L(\theta \mid X) \cdot \pi(\theta) = \theta^n (1-\theta)^{S-n}, \quad 0 < \theta < 1.$$

这是 Beta 分布的核函数：

$$\pi(\theta \mid X) \propto \theta^n (1-\theta)^{S-n}.$$

因此后验分布为：

$$\theta \mid X \sim \mathrm{Beta}(n+1, S-n+1).$$

Beta 分布 $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ 的期望为：

$$\mathbb{E}[\theta] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

代入 $\alpha = n+1$，$\beta = S-n+1$，得：

$$\mathbb{E}[\theta \mid X] = \frac{n+1}{S+2}.$$

3. (1) 一次观察，$x = 3$
此时 $n = 1$，$S = 3$，代入公式：

$$\mathbb{E}[\theta \mid X] = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

4. (2) 三次观察，$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 5$
此时 $n = 3$，$S = 3+2+5 = 10$，代入公式：

$$\mathbb{E}[\theta \mid X] = \frac{3+1}{10+2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0.3333.$$

最终答案
(1) 一次观察，$x = 3$ 时：

$$\boxed{\mathbb{E}[\theta \mid X] = 0.4}$$

(2) 三次观察，$x = 3, 2, 5$ 时：

$$\boxed{\mathbb{E}[\theta \mid X] = \frac{1}{3}}$$

1.7 PPT 2-2

P5 第一题

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bernoulli}(\theta), \theta \in (0,1)$ 未知。
① 回忆例 1.9，在先验分布 $\theta \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ 下，θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + a}{n+a+b}.$$

求 $\hat{\theta}_B$ 的均方误差 $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_B)$;
② 分别求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{MoM}}$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$，以及它们各自的均方误差。

解答 ① 贝叶斯估计的均方误差
记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Binomial}(n, \theta)$，则

$$\hat{\theta}_B = \frac{S_n + a}{n+a+b}.$$

计算偏差：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_B \mid \theta] = \frac{\mathbb{E}[S_n \mid \theta] + a}{n+a+b} = \frac{n\theta + a}{n+a+b},$$

$$\mathrm{Bias}(\hat{\theta}_B \mid \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_B \mid \theta] - \theta = \frac{n\theta + a}{n+a+b} - \theta.$$

通分得：

$$\mathrm{Bias}(\hat{\theta}_B \mid \theta) = \frac{n\theta + a - \theta(n+a+b)}{n+a+b} = \frac{a-(a+b)\theta}{n+a+b}.$$

计算方差：

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_B \mid \theta) = \frac{\mathrm{Var}(S_n \mid \theta)}{(n+a+b)^2} = \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+a+b)^2}.$$

均方误差：

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_B \mid \theta) &= \mathrm{Var}(\hat{\theta}_B \mid \theta) + [\mathrm{Bias}(\hat{\theta}_B \mid \theta)]^2 \\ &= \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+a+b)^2} + \left[\frac{a-(a+b)\theta}{n+a+b}\right]^2 \\ &= \frac{n\theta(1-\theta) + [a-(a+b)\theta]^2}{(n+a+b)^2}.\end{aligned}$$

展开分子：

$$[a-(a+b)\theta]^2 = a^2 - 2a(a+b)\theta + (a+b)^2\theta^2,$$

$$n\theta(1-\theta) = n\theta - n\theta^2.$$

所以分子为：

$$a^2 + [n - 2a(a+b)]\theta + [(a+b)^2 - n]\theta^2.$$

因此：

$$\boxed{\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_B \mid \theta) = \frac{a^2 + [n-2a(a+b)]\theta + [(a+b)^2-n]\theta^2}{(n+a+b)^2}}$$

② 矩估计与极大似然估计

矩估计：样本一阶矩 $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ 等于总体均值 θ，故

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MoM}} = \bar{X} = \frac{S_n}{n}.$$

该估计无偏：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{\mathrm{MoM}} \mid \theta] = \theta, \quad \mathrm{Bias} = 0.$$

方差为：

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{MoM}} \mid \theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

均方误差：

$$\boxed{\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{MoM}} \mid \theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

极大似然估计：似然函数为：

$$L(\theta) = \theta^{S_n}(1-\theta)^{n-S_n}.$$

对数似然函数：

$$\ell(\theta) = S_n \ln\theta + (n-S_n)\ln(1-\theta).$$

求导并令为 0：

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{S_n}{\theta} - \frac{n-S_n}{1-\theta} = 0.$$

解得：

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \frac{S_n}{n} = \bar{X}.$$

因此矩估计与极大似然估计相同，均方误差也相同：

$$\boxed{\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \frac{S_n}{n}, \quad \mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} \mid \theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

P5 第二题

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0,\theta), \theta > 0$ 未知。
① 分别求 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}_{MoM}$ 和极大似然估计 $\widehat{\theta}_{MLE}$，以及它们各自的均方误差。
② 设 θ 的先验分布 $\theta \sim U(0,1)$，求 θ 的贝叶斯估计及其均方误差；
③ 在均方误差意义下，上述三个估计量哪个更优？

解答 (1) 矩估计 (MoM)
均匀分布 $U(0,\theta)$ 的期望为

$$E[X_i] = \frac{\theta}{2}.$$

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$。矩估计方程：

$$\bar{X} = \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{MoM} = 2\bar{X}.$$

(2) 极大似然估计 (MLE)
似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{\{0\le X_i\le\theta\}} = \theta^{-n}\mathbf{1}_{\{\theta\ge X_{(n)}\}},$$

其中 $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$。当 $\theta \ge X_{(n)}$ 时，$L(\theta)$ 随 θ 增大而减小，因此

$$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}.$$

(3) 偏差与均方误差比较
矩估计量：

$$E[\hat{\theta}_{MoM}] = E[2\bar{X}] = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta,$$

$$Bias(\hat{\theta}_{MoM}) = 0,$$

$$Var(\hat{\theta}_{MoM}) = 4\cdot Var(\bar{X}) = 4\cdot\frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{3n},$$

$$MSE_{MoM} = Var + Bias^2 = \frac{\theta^2}{3n}.$$

MLE： 已知 $X_{(n)}$ 的 pdf（$0 \le t \le \theta$）为

$$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}.$$

于是

$$E[X_{(n)}] = \int_0^\theta t\cdot\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta,$$

$$Bias(\hat{\theta}_{MLE}) = \frac{n}{n+1}\theta - \theta = -\frac{\theta}{n+1}.$$

又

$$E[X_{(n)}^2] = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1}dt = \frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$Var(X_{(n)}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

所以

$$MSE_{MLE} = Var + Bias^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}.$$

比较:

$$MSE_{MoM} = \frac{\theta^2}{3n}, \quad MSE_{MLE} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

比较系数:

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} \text{ 与 } \frac{1}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad 6n \text{ 与 } (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2.$$

即比较 0 与 $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$:

- 当 $n = 1$ 时，$MSE_{MLE} > MSE_{MoM}$;
- 当 $n = 2$ 时，两者相等;
- 当 $n > 2$ 时，$MSE_{MLE} < MSE_{MoM}$。

$$\boxed{\hat{\theta}_{MoM} = 2\bar{X}, \quad \hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}}$$

$$\boxed{MSE_{MoM} = \frac{\theta^2}{3n}, \quad MSE_{MLE} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}, \quad n > 2 \text{ 时 MLE 更优}}$$

2. 贝叶斯估计（先验 $\theta \sim U(0,1)$）

先验密度：$\pi(\theta) = 1$，$0 < \theta < 1$。

后验密度:

$$\pi(\theta \mid X) \propto L(\theta)\pi(\theta) = \theta^{-n} \cdot \mathbf{1}_{\{\theta \ge X_{(n)},\, 0<\theta<1\}}.$$

即 $\theta \in [X_{(n)}, 1]$（设 $X_{(n)} < 1$，否则后验退化）。

归一化常数:

$$C = \int_{X_{(n)}}^{1} \theta^{-n} d\theta.$$

若 $n \neq 1$:

$$C = \left[\frac{\theta^{1-n}}{1-n}\right]_{X_{(n)}}^{1} = \frac{1 - X_{(n)}^{1-n}}{1-n}.$$

后验密度:

$$\pi(\theta \mid X) = \frac{\theta^{-n}}{C}, \quad X_{(n)} \le \theta \le 1.$$

后验均值（贝叶斯估计）:

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = E[\theta \mid X] = \frac{\int_{X_{(n)}}^{1} \theta \cdot \theta^{-n} d\theta}{C} = \frac{\int_{X_{(n)}}^{1} \theta^{1-n} d\theta}{C}.$$

分子（$n \neq 2$）:

$$\int_{X_{(n)}}^{1} \theta^{1-n} d\theta = \left[\frac{\theta^{2-n}}{2-n}\right]_{X_{(n)}}^{1} = \frac{1 - X_{(n)}^{2-n}}{2-n}.$$

因此

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = \frac{1 - X_{(n)}^{2-n}}{2-n} \cdot \frac{1-n}{1 - X_{(n)}^{1-n}} = \frac{1-n}{2-n} \cdot \frac{1 - X_{(n)}^{2-n}}{1 - X_{(n)}^{1-n}}, \quad n \neq 1, 2.$$

$n = 1, 2$ 时需单独计算（对数形式）。

$$\boxed{\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = \frac{1-n}{2-n} \cdot \frac{1 - X_{(n)}^{2-n}}{1 - X_{(n)}^{1-n}} \quad (n \neq 1, 2)}$$

3. 风险比较（贝叶斯风险，平方损失）

取平方损失，贝叶斯风险 $= E_\theta[MSE(\hat{\theta})]$，先验 $\theta \sim U(0,1)$。

- $\hat{\theta}_{MoM}$：$MSE = \frac{\theta^2}{3n}$，

$$r_{MoM} = \int_0^1 \frac{\theta^2}{3n} d\theta = \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9n}.$$

- $\hat{\theta}_{MLE}$：$MSE = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$，

$$r_{MLE} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 \theta^2 d\theta = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3(n+1)(n+2)}.$$

- $\hat{\theta}_{\text{Bayes}}$：由定义，在平方损失下后验均值估计最小化贝叶斯风险，故

$$r_{\text{Bayes}} \leq \min(r_{MoM}, r_{MLE}).$$

比较 r_{MoM} 与 r_{MLE}：乘以 $9n$ 得

$$1 \quad 与 \quad \frac{6n}{(n+1)(n+2)}.$$

当 $n \geq 2$ 时，$\frac{6n}{(n+1)(n+2)} < 1$，故 $r_{MLE} < r_{MoM}$。

因此贝叶斯风险排序为：

$$\boxed{r_{\text{Bayes}} < r_{MLE} < r_{MoM} \quad (n > 2)}$$

贝叶斯估计最优，MLE 次之，矩估计最差。
此问计算平方损失，而贝叶斯估计的 MLE 比较难算。

第六次作业

习题 3.23

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为抽自下列指数分布的简单样本：

$$f(x,\mu)=\begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x>\mu, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $-\infty<\mu<\infty$。

(1) 试求 μ 的最大似然估计 $\hat{\mu}^*$。$\hat{\mu}^*$ 是 μ 的无偏估计吗？如果不是，试对它作修改，以得到 μ 的无偏估计 $\hat{\mu}^{**}$；

(2) 试求 μ 的矩估计 $\hat{\mu}$，并证明它是 μ 的无偏估计；

(3) 试问 $\hat{\mu}^{**}$ 和 $\hat{\mu}$ 哪一个有效？

解答 显然 $X_i-\mu \sim \mathrm{Exp}(1)$，彼此独立。

(1) 最大似然估计。样本联合密度为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\mu)} I_{(x_i>\mu)}=\exp\left(n\mu-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) I_{(\mu\le x_{(1)})}(\mu),$$

其中 $x_{(1)}=\min_i x_i$。对给定样本，$L(\mu)$ 随 μ 单调增加，因此在允许范围 $\mu\le x_{(1)}$ 的右端点处取得最大值，故

$$\hat{\mu}^*=X_{(1)}.$$

计算其期望。由于 $X_i-\mu\sim\mathrm{Exp}(1)$，则

$$X_{(1)}-\mu\sim\mathrm{Exp}(n),$$

其密度为

$$f_{X_{(1)}}(x)=ne^{n\mu-nx}I_{(x>\mu)}(x).$$

于是

$$E[X_{(1)}]=\int_{\mu}^{\infty} x\,ne^{n\mu-nx}\,dx=\mu+\frac{1}{n}.$$

因此

$$E[\hat{\mu}^*]=\mu+\frac{1}{n}\neq\mu,$$

$\hat{\mu}^*$ 不是无偏估计。令

$$\hat{\mu}^{**}=X_{(1)}-\frac{1}{n},$$

则

$$E[\hat{\mu}^{**}]=E[X_{(1)}]-\frac{1}{n}=\mu+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\mu,$$

故 $\hat{\mu}^{**}$ 为 μ 的无偏估计。

(2) 矩估计。由 $X_i-\mu\sim\mathrm{Exp}(1)$ 得

$$E[X_1]=\mu+1.$$

以样本均值 $\bar{X}$ 代替 $E[X_1]$，得矩估计

$$\hat{\mu}=\bar{X}-1.$$

因为

$$E[\hat{\mu}]=E[\bar{X}-1]=E[X_1]-1=(\mu+1)-1=\mu,$$

所以 $\hat{\mu}$ 也是 μ 的无偏估计。

(3) 比较有效性。由 $X_i - \mu \sim \mathrm{Exp}(1)$ 可知

$$Var(X_1) = 1.$$

故

$$Var(\hat{\mu}) = Var(\bar{X} - 1) = Var(\bar{X}) = \frac{1}{n}Var(X_1) = \frac{1}{n}.$$

另一方面，$X_{(1)} - \mu \sim \mathrm{Exp}(n)$，其方差为

$$Var(X_{(1)} - \mu) = \frac{1}{n^2},$$

从而

$$Var(\hat{\mu}^{**}) = Var\left(X_{(1)} - \frac{1}{n}\right) = Var(X_{(1)}) = \frac{1}{n^2}.$$

比较可见

$$Var(\hat{\mu}^{**}) = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} = Var(\hat{\mu}),$$

因此 $\hat{\mu}^{**}$ 比 $\hat{\mu}$ 更有效（方差更小）。

习题 3.44

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 Gamma 分布族 $\{\Gamma(\alpha, \lambda) : \alpha,\ \lambda > 0\}$ 的简单样本. 试证:
$\frac{\bar{X}}{\alpha}$
是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的有效估计量.

解答 由 Gamma 分布的性质知

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n\alpha, \lambda),$$

于是

$$\frac{\bar{X}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n\alpha,\ n\alpha\lambda)\,.$$

因此

$$E\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = \frac{n\alpha}{n\alpha\lambda} = \frac{1}{\lambda} = g(\lambda), \qquad Var\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}\right) = \frac{n\alpha}{(n\alpha\lambda)^2} = \frac{1}{n\alpha\,\lambda^2}.$$

单个观测 X 的密度为

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$\log f(x|\lambda) = \alpha \log \lambda - (\lambda x) + (\text{与}\lambda\text{无关}).$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(x|\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} - x, \quad I_1(\lambda) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(X|\lambda)\right)^2\right] = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

样本量为 n 时的 Fisher 信息为

$$I(\lambda) = nI_1(\lambda) = \frac{n\alpha}{\lambda^2}.$$

对函数 $g(\lambda) = 1/\lambda$，有

$$g'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2},$$

故对任一无偏估计量 T，Cramér–Rao 下界为

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\lambda)]^2}{I(\lambda)} = \frac{1/\lambda^4}{n\alpha/\lambda^2} = \frac{1}{n\alpha\,\lambda^2}.$$

而 $\mathrm{Var}(\bar{X}/\alpha)$ 正好等于该下界，因此

$$e(\lambda)=\frac{\text{CR 下界}}{\mathrm{Var}(\bar{X}/\alpha)}=1,$$

即 $\bar{X}/\alpha$ 是 $g(\lambda)=1/\lambda$ 的有效估计量.

习题 45

设 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim N(0,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 为未知参数，

(1) 求 σ^2 的无偏估计方差的 C–R 下界;

(2) 求 σ^2 的一致最小方差无偏估计及它的效率.

解答 (1) 由

$$f(x;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\quad \log f(x;\sigma^2)=-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

对 σ^2 求偏导得

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f(X;\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{X^2}{2\sigma^4}=\frac{X^2-\sigma^2}{2\sigma^4}.$$

于是单个样本的 Fisher 信息

$$I_1(\sigma^2)=E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f(X;\sigma^2)\right)^2\right]=\frac{1}{4\sigma^8}Var(X^2).$$

对 $N(0,\sigma^2)$，有 $X^2/\sigma^2\sim\chi_1^2$，故

$$Var\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right)=2\quad\Rightarrow\quad Var(X^2)=2\sigma^4.$$

从而

$$I_1(\sigma^2)=\frac{1}{4\sigma^8}\cdot 2\sigma^4=\frac{1}{2\sigma^4}.$$

样本量为 n 时

$$I(\sigma^2)=nI_1(\sigma^2)=\frac{n}{2\sigma^4}.$$

对 $g(\sigma^2)=\sigma^2$，$g'(\sigma^2)=1$，故 C–R 下界为

$$Var(T)\geq\frac{[g'(\sigma^2)]^2}{I(\sigma^2)}=\frac{1}{n/(2\sigma^4)}=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

(2) 容易看出

$$T(X)=\sum_{i=1}^n X_i^2$$

是关于 σ^2 的充分完全统计量。令

$$\hat{\sigma}^2=h(T)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

则

$$E(\hat{\sigma}^2)=E(X_1^2)=\sigma^2,$$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计，并由 L–S 定理知它是 σ^2 的 UMVUE。

其方差为

$$Var(\hat{\sigma}^2)=Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}\cdot nVar(X_1^2)=\frac{1}{n}\cdot 2\sigma^4=\frac{2\sigma^4}{n},$$

正好达到 C–R 下界，因此效率

$$e(\sigma^2)=\frac{\text{CR 下界}}{Var(\hat{\sigma}^2)}=1.$$

习题 3.46

设 $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim N(a, \sigma^2)$，a 已知，证明

$$W = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|$$

为 σ 的无偏估计量，且效率为 $1/(\pi-2)$。

解答 令

$$W = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|.$$

由单个样本的性质（见前面习题，可通过计算 $E|X_i - a|$ 得到）有

$$E(|X_i - a|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

于是

$$E(W) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}E|X_i - a| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \sigma,$$

故 W 是 σ 的无偏估计量。进一步可以计算出（略去计算细节）

$$Var(W) = \frac{\pi-2}{n}\sigma^2.$$

对参数 σ，由 $N(a,\sigma^2)$ 属于指数族，可得单个观测的 Fisher 信息

$$I_1(\sigma) = -E_\sigma\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\log f(X|\sigma)\right] = \frac{2}{\sigma^2},$$

于是样本量为 n 时

$$I(\sigma) = nI_1(\sigma) = \frac{2n}{\sigma^2}.$$

C–R 下界为

$$\frac{[g'(\sigma)]^2}{I(\sigma)} = \frac{1}{2n/\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2n},$$

而

$$Var(W) = \frac{\pi-2}{n}\sigma^2.$$

因此 W 对 σ 的效率为

$$e(\sigma) = \frac{\text{CR 下界}}{Var(W)} = \frac{\sigma^2/(2n)}{(\pi-2)\sigma^2/n} = \frac{1}{\pi-2}.$$

习题 3.34

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma^2 > 0$ 均未知。试求下列参数函数的 UMVUE：

(1) $3\mu + 4\sigma^2$

(2) $\dfrac{\mu^2}{4\sigma^2}$

解答 完全充分统计量为

$$T = (\bar{X}, S^2),\quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

且 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，二者独立。

(1) $3\mu + 4\sigma^2$ 的 UMVUE

由无偏性:

$$E[\bar{X}] = \mu, \quad E[S^2] = \sigma^2.$$

因此

$$E[3\bar{X} + 4S^2] = 3\mu + 4\sigma^2.$$

UMVUE 为

$$\delta_1 = 3\bar{X} + 4S^2.$$

(2) $\dfrac{\mu^2}{4\sigma^2}$ 的 UMVUE

考虑 $F = \dfrac{n\bar{X}^2}{S^2}$,它服从非中心 F 分布,自由度 1 和 $n-1$,非中心参数 $\lambda = \dfrac{n\mu^2}{\sigma^2}$。

非中心 F 分布的一阶矩公式($n > 3$):

$$E[F] = \frac{(n-1)(n+\lambda)}{n(n-3)} = \frac{(n-1)\left(n + \frac{n\mu^2}{\sigma^2}\right)}{n(n-3)}.$$

所以

$$E\left[\frac{n\bar{X}^2}{S^2}\right] = \frac{n-1}{n-3} + \frac{n-1}{n-3} \cdot \frac{\mu^2}{\sigma^2}.$$

解得

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{n-3}{n-1} E\left[\frac{n\bar{X}^2}{S^2} - \frac{n-1}{n-3}\right].$$

于是

$$\frac{\mu^2}{4\sigma^2} = E\left[\frac{n(n-3)}{4(n-1)} \cdot \frac{\bar{X}^2}{S^2} - \frac{1}{4}\right].$$

因此 UMVUE 为(当 $n > 3$)

$$\delta_2 = \frac{n(n-3)}{4(n-1)} \cdot \frac{\bar{X}^2}{S^2} - \frac{1}{4}.$$

最终答案

$$3\bar{X} + 4S^2$$

$$\frac{n(n-3)}{4(n-1)} \cdot \frac{\bar{X}^2}{S^2} - \frac{1}{4}$$

习题 3.35

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p)$,$0 < p < 1$ 是未知参数,试求:

(1) p^k 的 UMVUE(k 为正整数);

(2) $p^s + (1-p)^{n-s}$ 的 UMVUE($0 < s < n$ 为整数)。

解答 完全充分统计量为 $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$。

(1) p^k 的 UMVUE

由多项式估计的无偏性,当 $T \geq k$ 时,

$$E\left[\frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right] = p^k.$$

定义下降阶乘 $t^{(k)} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$,$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$,当 $T < k$ 时取 0。

因此

$$\delta_1(T) = \frac{T^{(k)}}{n^{(k)}} \cdot I_{\{T \geq k\}}.$$

(2) $p^s + (1-p)^{n-s}$ 的 UMVUE

p^s 的 UMVUE 为 $\dfrac{T^{(s)}}{n^{(s)}} \cdot I_{\{T\geq s\}}$。

对于 $(1-p)^{n-s}$，利用二项展开：

$$(1-p)^{n-s} = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j p^j.$$

所以 $(1-p)^{n-s}$ 的 UMVUE 为

$$\sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{T^{(j)}}{n^{(j)}} \cdot I_{\{T\geq j\}}.$$

因此 $p^s + (1-p)^{n-s}$ 的 UMVUE 为

$$\delta_2(T) = \frac{T^{(s)}}{n^{(s)}} \cdot I_{\{T\geq s\}} + \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{T^{(j)}}{n^{(j)}} \cdot I_{\{T\geq j\}}.$$

最终答案

$$\frac{T^{(k)}}{n^{(k)}} \cdot I_{\{T\geq k\}}$$

$$\frac{T^{(s)}}{n^{(s)}} \cdot I_{\{T\geq s\}} + \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{T^{(j)}}{n^{(j)}} \cdot I_{\{T\geq j\}}$$

习题 3.38

设有分布族

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0,$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为从中抽取的简单样本，求 $e^{-\theta T}$ 的 UMVUE，其中 $T>0$ 为给定的常数。提示：注意 $e^{-\theta T} = P_\theta(X_1 > T)$。

解答 完全充分统计量为 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n,\theta)$。

已知 $e^{-\theta T} = P_\theta(X_1 > T)$。由 Lehmann–Scheffé 定理，$P(X_1 > T \mid S_n)$ 是 UMVUE。

在指数分布下，给定 $S_n = s$，$(X_1,\ldots,X_n)$ 的条件分布与均匀分布 Dirichlet$(1,\ldots,1)$ 相联系，即

$$\left(\frac{X_1}{S_n},\ldots,\frac{X_n}{S_n}\right) \sim \text{均匀分布在} n\text{-维单纯形上}.$$

于是 $U_1 = X_1/S_n$ 的密度为（通过 Dirichlet 分布推导）：

$$f_{U_1}(u) = (n-1)(1-u)^{n-2}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

因此

$$P(X_1 > T \mid S_n = s) = P\left(U_1 > \frac{T}{s}\right).$$

若 $s \leq T$，概率为 0；若 $s > T$，则

$$P\left(U_1 > \frac{T}{s}\right) = \int_{T/s}^1 (n-1)(1-u)^{n-2}\, du.$$

令 $v = 1-u$，积分

$$= (n-1)\int_0^{1-T/s} v^{n-2}\, dv = \left(1-\frac{T}{s}\right)^{n-1}.$$

所以

$$P(X_1 > T \mid S_n = s) = \begin{cases} \left(1-\frac{T}{s}\right)^{n-1}, & s > T, \\ 0, & s \leq T. \end{cases}$$

即 UMVUE 为

$$\delta(S_n) = \left(1-\frac{T}{S_n}\right)_+^{n-1},$$

其中 $(x)_+ = \max(0, x)$。

习题 3.40

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\theta, 1)$，求 θ^2 的 UMVUE。并证明此 UMVUE 的方差达不到 Cramér–Rao 不等式的下界，即它不是有效估计。

解答 完全充分统计量为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\theta, 1/n)$。

1. 求 θ^2 的 UMVUE

由 $E[\bar{X}^2] = \theta^2 + \frac{1}{n}$，得

$$\theta^2 = E[\bar{X}^2] - \frac{1}{n}.$$

因此无偏估计为

$$\delta(\bar{X}) = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}.$$

它是充分统计量的函数且无偏，故为 UMVUE。

2. 计算 UMVUE 的方差

令 $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \sim N(0, 1)$，则 $\bar{X} = \theta + \frac{Z}{\sqrt{n}}$，

$$\bar{X}^2 = \theta^2 + \frac{2\theta Z}{\sqrt{n}} + \frac{Z^2}{n}.$$

于是

$$\delta(\bar{X}) = \theta^2 + \frac{2\theta Z}{\sqrt{n}} + \frac{Z^2 - 1}{n}.$$

方差：

$$\mathrm{Var}(\delta) = \mathrm{Var}\left(\frac{2\theta Z}{\sqrt{n}}\right) + \mathrm{Var}\left(\frac{Z^2 - 1}{n}\right) + 2\,\mathrm{Cov}\left(\frac{2\theta Z}{\sqrt{n}}, \frac{Z^2 - 1}{n}\right).$$

计算：

$$\mathrm{Var}\left(\frac{2\theta Z}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4\theta^2}{n}, \quad \mathrm{Var}\left(\frac{Z^2 - 1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}, \quad \mathrm{Cov}(Z, Z^2) = 0.$$

所以

$$\mathrm{Var}(\delta) = \frac{4\theta^2}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

3. Cramér–Rao 下界

Fisher 信息量 $I_n(\theta) = n$。对 $g(\theta) = \theta^2$，有 $g'(\theta) = 2\theta$，Cramér–Rao 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)} = \frac{4\theta^2}{n}.$$

4. 有效性比较

UMVUE 的方差为

$$\frac{4\theta^2}{n} + \frac{2}{n^2} > \frac{4\theta^2}{n},$$

等号不成立，故 UMVUE 不是有效估计。

习题 3.43

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为从密度函数

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0, \theta > 0,$$

中抽取的简单样本，求 θ 的 UMVUE，并比较此 UMVUE 的方差与 θ 的无偏估计方差的 Cramér–Rao 下界。

解答 1. 分布识别 密度函数为指数分布 $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$，即 $X_i\sim \mathrm{Exp}(1/\theta)$，均值为 θ，方差为 θ^2。

2. 完全充分统计量 样本联合密度：

$$f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}.$$

完全充分统计量为

$$T=\sum_{i=1}^n X_i\sim \mathrm{Gamma}(n,\theta).$$

3. 求 θ 的 UMVUE 由于 $E[X_i]=\theta$，所以 $E[\bar{X}]=\theta$，其中 $\bar{X}=\frac{T}{n}$。

因此 $\hat{\theta}=\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计，且为充分统计量的函数，故为 UMVUE。

4. 计算 UMVUE 的方差

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}=\frac{\theta^2}{n}.$$

5. Cramér–Rao 下界 单个观测的对数似然：

$$\ell(\theta;x)=-\ln\theta-\frac{x}{\theta}.$$

得分函数：

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}=-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}.$$

Fisher 信息量：

$$I_1(\theta)=\mathrm{Var}\left(\frac{\partial\ell}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{\theta^4}\mathrm{Var}(X)=\frac{\theta^2}{\theta^4}=\frac{1}{\theta^2}.$$

样本信息量 $I_n(\theta)=\frac{n}{\theta^2}$。

Cramér–Rao 下界：

$$\frac{1}{I_n(\theta)}=\frac{\theta^2}{n}.$$

习题 3.47

设 $X_1,\dots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(0,\sigma^2)$，证明

$$\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma((n+1)/2)}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}$$

是 σ 的 UMVUE，并求其效率。

解答 1. 完全充分统计量

样本联合密度：

$$f(x_1,\dots,x_n;\sigma)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

完全充分统计量为 $T=\sum_{i=1}^n X_i^2$，且 $T/\sigma^2\sim\chi_n^2$。

2. 证明无偏性与 UMVUE

令 $Y=\sqrt{T}$，则 $Y=\sigma Z$，其中 $Z\sim\chi_n$（卡方分布开根）。χ_n 分布的均值：

$$E[Z]=\sqrt{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}.$$

选择常数

$$c=\frac{1}{E[Z]}=\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma((n+1)/2)}.$$

但题目给出的是 $c'=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma((n+1)/2)}$，这可能是印刷差异，但思路一致：适当常数 k 使 $E[kY]=\sigma$，则 $\hat{\sigma}=kY$ 是 σ 的无偏估计。由于 $\hat{\sigma}$ 是充分统计量 T 的函数且无偏，故为 UMVUE。

3. 效率计算

Fisher 信息量：$I_n(\sigma) = \frac{2n}{\sigma^2}$。Cramér–Rao 下界：

$$\frac{1}{I_n(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{2n}.$$

估计量方差：$\hat{\sigma} = kY$，$k = 1/E[Z]$，则

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}) = \sigma^2 \left(\frac{n}{[E(Z)]^2} - 1 \right).$$

效率：

$$e = \frac{\sigma^2/(2n)}{\mathrm{Var}(\hat{\sigma})} = \frac{1}{2n\left(\frac{n}{[E(Z)]^2} - 1 \right)}.$$

其中 $E(Z) = \sqrt{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$。

最终答案 $\hat{\sigma}$ 是 σ 的 UMVUE，效率为

$$\frac{1}{2n\left(\frac{n}{[E(Z)]^2} - 1 \right)}$$

1.8 PPT3.1

习题 5.29

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 参数 $\mu \in \mathbb{R}$ 与 $\sigma^2 > 0$ 均未知, 求检验问题:

$$H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

水平为 α 的似然比检验.

解答 回忆似然比统计量的定义:

$$\lambda(\mathbf{X}) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)} = \frac{\sup_{\mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma^2 \le \sigma_0^2} L(\mu, \sigma^2)}{\sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0} L(\mu, \sigma^2)},$$

先求出似然函数:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right).$$

首先, 在全空间 $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ 上, 回忆似然函数在 MLE 处取得最大值, 我们已知 MLE 是

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

在这一点处的似然函数值为

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2 \right) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\frac{n-1}{n}S^2} \right) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n}{2} \right).$$

其次, 在 $\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma^2 \le \sigma_0^2\}$ 中, 回忆 MLE 的推导过程我们知道, 对固定的 σ^2, 似然函数关于 μ 在 $\mu = \bar{X}$ 处最大. 接下来固定 $\mu = \bar{X}$, 对对数似然的 σ^2 求导:

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2} \right), \quad \log L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \log L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{2(\sigma^2)^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}((n-1)S^2 - n\sigma^2).$$

可知当 $\sigma^2 < \frac{n-1}{n}S^2$ 时导数为正, 函数递增; 当 $\sigma^2 > \frac{n-1}{n}S^2$ 时导数为负, 函数递减. 因此在约束 $0 < \sigma^2 \le \sigma_0^2$ 下:

- 若 $\frac{n-1}{n}S^2 \le \sigma_0^2$, 则最大值点在 $\sigma^2 = \frac{n-1}{n}S^2$ 处达到, 此时 Θ_0 上似然函数的最大值与全空间上的最大值相同,

因此似然比统计量 $\lambda(\mathbf{x}) = 1$.

- 若 $\frac{n-1}{n}S^2 > \sigma_0^2$, 则最大值在边界 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 处达到. 此时 Θ_0 上的 MLE 为 $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$, 代入得

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R},0<\sigma^2\le\sigma_0^2} L(\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\mu\in\mathbb{R},0<\sigma^2\le\sigma_0^2} L(\mu,\sigma^2)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu,\sigma^2)} = \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n}{2}\right).$$

于是可知似然比统计量

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{n-1}{n}S^2 \le \sigma_0^2, \\ \left(\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n}{2}\right), & \frac{n-1}{n}S^2 > \sigma_0^2. \end{cases}$$

最后, 似然比检验在 $\lambda(\mathbf{X}) \le c$ 时拒绝 H_0, 下面求等价的拒绝域. 记 $V = \frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2}$, 则当 $\frac{n-1}{n}S^2 > \sigma_0^2$ 时,$V > 1$, 且 $\lambda(\mathbf{x}) = V^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2}V\right)e^{\frac{n}{2}}$. 关于 V 求导可知其在 $V > 1$ 时关于 V 单调递减, 因此 $\lambda(\mathbf{x}) \le c$ 等价于 $V \ge c_\alpha$. 为了确定 c_α, 回忆水平为 α 的检验的定义:

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R},0<\sigma^2\le\sigma_0^2} \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} \ge c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2\right) = \alpha.$$

由正态样本方差分布定理知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, 于是

$$\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n\sigma_0^2}, \quad \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} \ge c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2\right) = \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1} \ge \frac{n\sigma_0^2}{\sigma^2}c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2\right).$$

由于 $\sigma^2 \le \sigma_0^2$, 故该概率在 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时达到最大. 所以我们有

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{\mu\in\mathbb{R},0<\sigma^2\le\sigma_0^2} \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} \ge c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} \ge c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2=\sigma_0^2\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1} \ge \frac{n\sigma_0^2}{\sigma^2}c_\alpha \,\middle|\, \mu,\sigma^2=\sigma_0^2\right) = \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1} \ge nc_\alpha\right), \end{aligned}$$

进而解得 $c_\alpha = \frac{\chi^2_{n-1}(\alpha)}{n}$. 因此水平为 α 的检验的拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2} \ge \frac{\chi^2_{n-1}(\alpha)}{n}$, 即

$$\left\{\mathbf{X} \,\middle|\, \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{n-1}(\alpha)\right\}.$$

注 求似然比检验的三个步骤:(1) 先求似然函数, 以及全空间的最大值 (MLE);(2) 求 Θ_0 上的最大值, 写出似然比统计量的形式;(3) 根据分布具体形式求出拒绝域的具体常数.

习题 5.30

设 $X_1,\cdots,X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1,\sigma^2)$, $Y_1,\cdots,Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2,\sigma^2)$, 且样本 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立, 求检验问题:

$$H_0: \mu_2-\mu_1 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_2-\mu_1 \ne 0.$$

水平为 α 的似然比检验.

解答 本题中似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)} = \frac{\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu,\sigma^2)}{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)},$$

先求出似然函数:

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{m+n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_2)^2\right)\right).$$

首先, 在全空间 $\Theta=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2):\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$ 上, 似然函数在 MLE 处取得最大值. 写出对数似然函数并对 μ_1,μ_2 求偏导:

$$\log L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=-\frac{m+n}{2}\log(2\pi)-\frac{m+n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_2)^2\right),$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)=0,\qquad\frac{\partial\log L}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_2)=0,$$

解得 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$, 以及 $\hat{\mu}_2=\bar{Y}$. 代入并对 σ^2 求导:

$$\log L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=-\frac{m+n}{2}\log(2\pi)-\frac{m+n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2\right)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2}{2(\sigma^2)^2}=0,$$

解得

$$\sigma^2=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2\right).$$

容易验证上述二阶导小于零, 故此处取得最大值. 因此全参数空间上的 MLE 为:

$$\hat{\mu}_1=\bar{X},\quad\hat{\mu}_2=\bar{Y},\quad\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right).$$

在这一点处的似然函数值为

$$L(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}^2)=(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{\mu}_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu}_2)^2\right)\right)=(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left(-\frac{m+n}{2}\right).$$

另一方面, 在 $\Theta_0=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2):\mu_1=\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$ 中, 似然函数及其对数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{m+n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)^2\right)\right),$$

$$\log L(\mu,\sigma^2)=-\frac{m+n}{2}\log(2\pi)-\frac{m+n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)^2\right).$$

下面求在 Θ_0 上的最大值. 先对 μ 求导, 解得

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)\right)=0,\quad\hat{\mu}_0=\frac{m\bar{X}+n\bar{Y}}{m+n}.$$

代入后对 σ^2 求导, 解得

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{\mu}_0)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu}_0)^2\right)=0,$$

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i-\hat{\mu}_0)^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\hat{\mu}_0)^2\right).$$

容易验证上述二阶导小于零, 故此处取得最大值. 在 $(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2)$ 的似然函数值为:

$$L(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\left(-\frac{m+n}{2}\right).$$

于是似然比统计量

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu, \sigma^2)}{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)} = \frac{L(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2)}{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{m+n}{2}}.$$

下面进一步计算 $\hat{\sigma}_0^2$, 注意到

$$\sum_{i=1}^m (X_i - \hat{\mu}_0)^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + m(\bar{X} - \hat{\mu}_0)^2, \quad \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{\mu}_0)^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 + n(\bar{Y} - \hat{\mu}_0)^2,$$

$$\bar{X} - \hat{\mu}_0 = \frac{n(\bar{X} - \bar{Y})}{m+n}, \quad \bar{Y} - \hat{\mu}_0 = -\frac{m(\bar{X} - \bar{Y})}{m+n},$$

$$m(\bar{X} - \hat{\mu}_0)^2 + n(\bar{Y} - \hat{\mu}_0)^2 = \frac{mn}{m+n}(\bar{X} - \bar{Y})^2,$$

因此可解得

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 + \frac{mn}{m+n}(\bar{X} - \bar{Y})^2\right) = \hat{\sigma}^2 + \frac{mn}{(m+n)^2}(\bar{X} - \bar{Y})^2.$$

因此

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \dfrac{mn(\bar{x} - \bar{y})^2}{(m+n)^2\hat{\sigma}^2}}\right)^{\frac{m+n}{2}}.$$

似然比检验在 $\lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le c$ 时拒绝 H_0, 下面求等价的拒绝域. 定义两样本 t 统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{m+n-2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}},$$

则计算可知

$$T^2 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{m+n-2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{mn(m+n-2)(\bar{X} - \bar{Y})^2}{(m+n)(\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2)}$$

$$= \frac{mn(m+n-2)(\bar{X} - \bar{Y})^2}{(m+n)^2\hat{\sigma}^2} = (m+n-2)\frac{mn(\bar{X} - \bar{Y})^2}{(m+n)\hat{\sigma}^2}, \qquad \text{这意味着}\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{1 + \frac{T^2}{m+n-2}}\right)^{\frac{m+n}{2}}.$$

与此同时, 注意到函数 $f(T^2) = \left(\frac{1}{1+T^2/(m+n-2)}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ 关于 T^2 单调递减, 因此 $\lambda \le c$ 等价于 $T^2 \ge c'$, 即 $|T| \ge c''$. 在 H_0 成立时, 由习题 2.15 中 t 分布的性质可知 $T \sim t_{m+n-2}$. 对于水平为 α 的检验, 要求

$$\sup_{\mu_1=\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0} \mathbb{P}(|T| \ge c'') = \alpha,$$

故取 $c'' = t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})$, 因此水平为 α 的似然比检验的拒绝域为

$$\left\{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,\middle|\, |T| \ge t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

注 本题计算量较大, 并且需要知道使用作业 2.15 中有关 t 分布的结论, 即算出似然比统计量基于 σ^2 和 $\hat{\sigma}_0^2$ 的表达式后需要通过检验问题的特点凑出相对应的统计量.

习题 5.31

设 $X_1,\cdots,X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y_1,\cdots,Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且样本 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立, 求检验问题:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

水平为 α 的似然比检验.

解答 本题中似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y}):=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)}=\frac{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0}L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1^2>0,\sigma_2^2>0}L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)},$$

先求出似然函数:

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\right)^m\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^m(x_i-\mu_1)^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu_2)^2\right).$$

首先, 在全空间 $\Theta=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2):\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1^2,\sigma_2^2>0\}$ 上, 似然函数在 MLE 处取得最大值. 由于两个样本之间独立且二者均为正态简单样本, 直接写出全参数空间上的 MLE 为:

$$\hat\mu_1=\bar X,\quad \hat\mu_2=\bar Y,\quad \hat\sigma_1^2=\frac{m-1}{m}S_X^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(X_i-\bar X)^2,\quad \hat\sigma_2^2=\frac{n-1}{n}S_Y^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar Y)^2.$$

在这一点处的似然函数值为

$$L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\sigma_1^2,\hat\sigma_2^2)=(2\pi\hat\sigma_1^2)^{-\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{m}{2}\right)\cdot(2\pi\hat\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2}\right)=(2\pi\hat\sigma_1^2)^{-\frac{m}{2}}(2\pi\hat\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{m+n}{2}\right).$$

另一方面, 在 $\Theta_0=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2):\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1^2=\sigma_2^2>0\}$ 中, 似然函数为

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^m\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^m(x_i-\mu_1)^2\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu_2)^2\right).$$

其对数似然函数为

$$\log L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=-\frac{m+n}{2}\log(2\pi)-\frac{m+n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^m(x_i-\mu_1)^2+\sum_{j=1}^n(y_j-\mu_2)^2\right).$$

下面求在 Θ_0 上的最大值. 先对 μ_1,μ_2 求导, 解得

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^m(x_i-\mu_1)=0,\quad \hat\mu_{10}=\bar X;\qquad \frac{\partial\log L}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu_2)=0,\quad \hat\mu_{20}=\bar Y.$$

代入后对 σ^2 求导, 解得

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left(\sum_{i=1}^m(x_i-\bar x)^2+\sum_{j=1}^n(y_j-\bar y)^2\right)=0,$$

$$\hat\sigma_0^2=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^m(X_i-\bar X)^2+\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar Y)^2\right)=\frac{1}{m+n}((m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2).$$

容易验证上述二阶导小于零, 故此处取得最大值. 在 $(\hat\mu_{10},\hat\mu_{20},\hat\sigma_0^2)$ 的似然函数值为:

$$L(\hat\mu_{10},\hat\mu_{20},\hat\sigma_0^2)=(2\pi\hat\sigma_0^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left(-\frac{m+n}{2}\right).$$

于是似然比统计量

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0} L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1^2>0,\sigma_2^2>0} L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)} = \frac{L(\hat\mu_{10},\hat\mu_{20},\hat\sigma_0^2)}{L(\hat\mu_1,\hat\mu_2,\hat\sigma_1^2,\hat\sigma_2^2)} \\ &= \frac{(2\pi\hat\sigma_0^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left(-\frac{m+n}{2}\right)}{(2\pi\hat\sigma_1^2)^{-\frac{m}{2}}(2\pi\hat\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{m+n}{2}\right)} = \frac{(\hat\sigma_1^2)^{\frac{m}{2}}(\hat\sigma_2^2)^{\frac{n}{2}}}{(\hat\sigma_0^2)^{\frac{m+n}{2}}} \\ &= \frac{(\frac{m-1}{m}S_X^2)^{\frac{m}{2}}(\frac{n-1}{n}S_Y^2)^{\frac{n}{2}}}{(\frac{1}{m+n}((m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2))^{\frac{m+n}{2}}} = \frac{(m+n)^{\frac{m+n}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{((m-1)S_X^2)^{\frac{m}{2}}((n-1)S_Y^2)^{\frac{n}{2}}}{((m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2)^{\frac{m+n}{2}}}\end{aligned}$$

似然比检验在 $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})\le c$ 时拒绝 H_0, 下面求等价的拒绝域. 定义统计量

$$F := \frac{S_X^2}{S_Y^2},\qquad 则\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{(m+n)^{\frac{m+n}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{((m-1)F)^{\frac{m}{2}}(n-1)^{\frac{n}{2}}}{((m-1)F+(n-1))^{\frac{m+n}{2}}} \propto \frac{F^{\frac{m}{2}}}{((m-1)F+(n-1))^{\frac{m+n}{2}}}.$$

考虑函数 $g(F) := F^{\frac{m}{2}}/((m-1)F+(n-1))^{\frac{m+n}{2}}$. 易证 $g(F)$ 有唯一最大值点, 且当 $F\to 0^+$ 或 $F\to+\infty$ 时,$g(F)\to 0$. 此外,$\lambda\le c$ 等价于 $g(F)\le c'$, 这等价于 $F\le c_1$ 或 $F\ge c_2$, 其中 $0<c_1<1<c_2$ 使得 $g(c_1)=g(c_2)$. 在 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 成立时, 由 F 分布的定义可知 $F\sim F_{m-1,n-1}$. 对于水平为 α 的检验, 要求

$$\sup_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma^2>0}\mathbb{P}(F\le c_1或F\ge c_2)=\alpha.$$

这意味着 c_1,c_2 满足如下方程

$$\begin{cases} g(c_1)=g(c_2), \\ 1-F_{m-1,n-1}^{-1}(c_1)+F_{m-1,n-1}^{-1}(c_2)=\alpha. \end{cases}$$

因此, 水平为 α 的似然比检验的拒绝域为

$$\left\{(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,\middle|\,\frac{S_X^2}{S_Y^2}\le c_1或\frac{S_X^2}{S_Y^2}\ge c_2\right\},\quad 其中\ c_1,c_2\ 满足上述方程.$$

注 上述方程一般无法直接求出解析解, 只能数值求解. 然而, 对于同一检验问题, 如果取 $c_1=F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$,$c_2=F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$, 那么可以得到拒绝域为

$$\left\{(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,\middle|\,\frac{S_X^2}{S_Y^2}\le F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})或\frac{S_X^2}{S_Y^2}\ge F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})\right\},$$

这是 F 检验的拒绝域, 与似然比检验的拒绝域不同之处在于,F 检验的拒绝域一般不满足 $g(c_1)=g(c_2)$, 即不能像似然比检验那样将拒绝域等价表示成 $\lambda\le c$ 的形式. 在一般情况下, 这样选取 c_1 和 c_2 同样构成了一个水平为 α 的检验.PPT3.2 及之后的作业如无特别说明, 将采取这种近似的方式来构造检验. 特别地, 如果 $m=n$, 那么似然比检验中 c_1 和 c_2 满足的方程可以解出来, 并且可以验证似然比检验和 F 检验得到的拒绝域严格相同.

习题 5.36

设 $X_1,\cdots,X_m$ 为从指数分布 $f(x;\theta_1)=\theta_1^{-1}\exp(-\frac{x}{\theta_1})$ 抽取的简单样本, $Y_1,\cdots,Y_n$ 为从指数分布 $f(x;\theta_2)=\theta_2^{-1}\exp(-\frac{x}{\theta_2})$ 抽取的简单样本, 且两组样本独立,θ_1 和 θ_2 为未知参数, 求检验问题:

$$H_0:\theta_1=\theta_2\leftrightarrow H_1:\theta_1\ne\theta_2$$

水平为 α 的似然比检验.

解答 本题中似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)} = \frac{\sup_{\theta>0}L(\theta)}{\sup_{\theta_1,\theta_2>0}L(\theta_1,\theta_2)},$$

先求出似然函数:

$$L(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^{-m}\exp\left(-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^m x_i\right)\cdot\theta_2^{-n}\exp\left(-\frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^n y_j\right).$$

首先, 在全空间 $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}$ 上, 似然函数在 MLE 处取得最大值. 由于两个样本独立且均为指数分布简单样本, 全参数空间上的 MLE 为:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X}, \quad \hat{\theta}_2 = \bar{Y}.$$

在这一点处的似然函数值为

$$L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (\bar{x})^{-m} \exp\left(-\frac{m\bar{x}}{\bar{x}}\right) \cdot (\bar{y})^{-n} \exp\left(-\frac{n\bar{y}}{\bar{y}}\right) = (\bar{x})^{-m}(\bar{y})^{-n} \exp\left(-(m+n)\right).$$

另一方面, 在 $\Theta_0 = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = \theta_2 = \theta > 0\}$ 中, 似然函数及其对数为

$$L(\theta) = \theta^{-(m+n)} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j\right)\right), \qquad \log L(\theta) = -(m+n)\log\theta - \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j\right).$$

下面求在 Θ_0 上的最大值. 对 θ 求导, 解得

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{m+n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j\right) = 0, \qquad \hat{\theta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j}{m+n} = \frac{m\bar{X} + n\bar{Y}}{m+n}.$$

在 $\hat{\theta}_0$ 的似然函数取得最大值为:

$$L(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_0) = \left(\frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}\right)^{-(m+n)} \exp\left(-(m+n)\right).$$

于是似然比统计量

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\sup_{\theta>0} L(\theta)}{\sup_{\theta_1,\theta_2>0} L(\theta_1, \theta_2)} = \frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)} = \frac{\left(\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n}\right)^{-(m+n)} \exp\left(-(m+n)\right)}{(\bar{x})^{-m}(\bar{y})^{-n} \exp\left(-(m+n)\right)} \\ &= \frac{(\bar{x})^m(\bar{y})^n}{\left(\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n}\right)^{m+n}} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} \cdot \frac{(m\bar{x})^m (n\bar{y})^n}{(m\bar{x}+n\bar{y})^{m+n}}.\end{aligned}$$

似然比检验在 $\lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le c$ 时拒绝 H_0, 下面求等价的拒绝域. 定义统计量

$$F := \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \qquad \text{则}\lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} \cdot \frac{(mF)^m n^n}{(mF+n)^{m+n}} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m} \cdot \frac{F^m}{(mF+n)^{m+n}}.$$

考虑函数 $g(F) := F^m/(mF+n)^{m+n}$. 易证 $g(F)$ 在 $F = 1$ 处取得最大值, 且当 $F \to 0^+$ 或 $F \to +\infty$ 时,$g(F) \to 0$. 此外,$\lambda \le c$ 等价于 $g(F) \le c'$, 这等价于 $F \le c_1$ 或 $F \ge c_2$, 其中 $0 < c_1 < 1 < c_2$ 使得 $g(c_1) = g(c_2)$. 在 $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ 成立时, 先计算 F 的分布. 注意到两组样本均为独立同分布且样本之间独立, 由卡方分布和指数分布的关系可知 $\frac{2}{\theta}2m\bar{X} \sim \chi^2_{2m}$ 和 $\frac{2}{\theta}2n\bar{Y} \sim \chi^2_{2n}$, 因此有

$$F = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\frac{2}{\theta}2m\bar{X}/2m}{\frac{2}{\theta}2n\bar{Y}/2n} \sim F_{2m,2n}.$$

对于水平为 α 的检验, 要求 $\sup_{\theta>0} \mathbb{P}(F \le c_1 \text{或} F \ge c_2) = \alpha$, 这意味着 c_1,c_2 满足如下方程

$$\begin{cases} g(c_1) = g(c_2), \\ 1 - F^{-1}_{2m,2n}(c_1) + F^{-1}_{2m,2n}(c_2) = \alpha. \end{cases}$$

因此, 水平为 α 的似然比检验的拒绝域为

$$\left\{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,\middle|\, \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \le c_1 \text{或} \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \ge c_2\right\}, \quad \text{其中 } c_1,c_2 \text{ 满足上述方程.}$$

第 9 页作业 2

利用如下定理:

定理

设 $T(\mathbf{X})$ 是关于 θ 的一个充分统计量, 而 $\lambda^*(t)$ 和 $\lambda(\mathbf{x})$ 分别是依赖于 T 和 $\mathbf{X}$ 的似然比统计量, 则对于样本空间内的每点 $\mathbf{x}$, 均有 $\lambda^*(T(\mathbf{x})) = \lambda(\mathbf{x})$.

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$, 对于如下检验:

$$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0,$$

找出其在 σ^2 未知时的似然比统计量并给出对应或等价的水平为 α 的检验拒绝域.

解答 先求充分统计量的似然比统计量. 样本联合密度为

$$f(\mathbf{x};\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right),$$

因此由因子分解定理, 充分统计量为 $T(\mathbf{X})=(\bar{X},S^2)$. 其中 $\bar{X}$ 与 S^2 独立,$\bar{X}\sim\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$, 由正态样本方差分布定理知 $S^2\sim\Gamma(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2\sigma^2})$. 关于充分统计量的似然比统计量为

$$\lambda^*(T(\mathbf{x}))=\frac{\sup_{\sigma^2>0}L^*(\mu_0,\sigma^2)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0}L^*(\mu,\sigma^2)},$$

其中 $L^*(\mu,\sigma^2)$ 是关于 $T(\mathbf{X})$ 的似然函数:

$$\begin{aligned}
L^*(\mu,\sigma^2)&=f_{\bar{X},S^2}(\bar{x},S^2;\mu,\sigma^2)=f_{\bar{X}}(\bar{x};\mu,\sigma^2)f_{S^2}(S^2;\mu,\sigma^2)\\
&=\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(S^2)^{\frac{n-3}{2}}\exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}\right)\\
&=\left(\frac{\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(S^2)^{\frac{n-3}{2}}\right)\cdot(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu)^2+(n-1)S^2\right)\right).
\end{aligned}$$

在全空间 $\Theta=\{(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$ 上, 似然函数在 MLE 处取得最大值, 已知 MLE 并代入得

$$\hat{\mu}=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{n-1}{n}S^2,\quad L^*(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\left(\frac{\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(S^2)^{\frac{n-3}{2}}\right)\cdot(\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(n(\bar{x}-\hat{\mu})^2+(n-1)S^2\right)\right).$$

在 $\Theta_0=\{(\mu,\sigma^2):\mu=\mu_0,\sigma^2>0\}$ 上, 对似然函数取对数求导并求解:

$$\frac{\partial\log L^*}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left(n(\bar{x}-\mu_0)^2+(n-1)S^2\right)=0,\qquad \hat{\sigma}_0^2=(\bar{x}-\mu_0)^2+\frac{(n-1)S^2}{n}.$$

于是由定理知充分统计量的似然比统计量为:

$$\lambda(\mathbf{x})=\lambda^*(T(\mathbf{x}))=\frac{\sup_{\sigma^2>0}L^*(\mu_0,\sigma^2)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0}L^*(\mu,\sigma^2)}=\frac{L^*(\mu_0,\hat{\sigma}_0^2)}{L^*(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)}=\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(1+\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{(n-1)S^2}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

定义统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 则 $\lambda(\mathbf{x})=\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$. 似然比检验在 $\lambda(\mathbf{x})\le c$ 时拒绝 H_0. 注意到 $\lambda(\mathbf{x})$ 关于 T^2 单减, 因此 $\lambda(\mathbf{x})\le c$ 等价于 $|T|>c'$; 当 H_0 成立时,$T\sim t_{n-1}$; 对于水平为 α 的检验有 $\sup_{\sigma^2>0}\mathbb{P}(|T|\ge c')=\alpha$, 所以检验对应的拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\,\middle|\,|T|\ge t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

注 定理的使用简化了似然比统计量的计算, 充分统计量联合分布方便写出时均可使用该定理简化计算.

习题 5.58

设 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从总体中抽取的简单样本, 总体密度 $f(x|\theta)$ 和 θ 的先验密度 $\pi(\theta)$ 分别为

$$f(x|\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\le\theta,\end{cases}\qquad \pi(\theta)=\begin{cases}e^{-\theta}, & \theta>0,\\ 0, & \theta\le 0.\end{cases}$$

求 Bayes 检验问题 $H_0:\theta\le 1\leftrightarrow H_1:\theta>1$.

解答 先写出后验分布的形式:

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta\right) \cdot I_{\{x_{(1)}>\theta\}} e^{-\theta} I_{\{\theta>0\}} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + (n-1)\theta\right) I_{\{0<\theta<x_{(1)}\}}.$$

再计算在原假设和备择假设下的后验概率:

$$\alpha_0 = \mathbb{P}(\theta \in \Theta_0|\mathbf{x}) = \int_0^1 \pi(\theta|\mathbf{x})\mathrm{d}\theta, \qquad \alpha_1 = \mathbb{P}(\theta \in \Theta_1|\mathbf{x}) = \int_1^{x_{(1)}} \pi(\theta|\mathbf{x})\mathrm{d}\theta.$$

约定检验准则为 $\alpha_0 < \alpha_1$ 时拒绝 H_0, 否则接受 H_0. 首先当 $X_{(1)} \le 1$ 时必然接受 H_0. 在 $X_{(1)} > 1$ 时, 计算

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\int_0^1 \pi(\theta|\mathbf{x})\mathrm{d}\theta}{\int_1^{x_{(1)}} \pi(\theta|\mathbf{x})\mathrm{d}\theta} = \frac{\int_0^1 \exp((n-1)\theta)\mathrm{d}\theta}{\int_1^{x_{(1)}} \exp((n-1)\theta)\mathrm{d}\theta} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & n=1, \\ \dfrac{e^{n-1}-1}{e^{(n-1)x_{(1)}} - e^{n-1}}, & n>1, \end{cases}$$

因此可以解得拒绝原假设当且仅当

$$\begin{cases} X_1 > 2, & n=1, \\ X_{(1)} > \dfrac{1}{n-1}\log\left(2e^{n-1}-1\right), & n>1. \end{cases}$$

第 12 页作业 2

一个餐馆老板决定每盈利的总天数达到 5 天就休息一天, 设每天盈利的概率 $P(X=1)=\theta$, 不盈利的概率 $P(X=0)=1-\theta$, 且盈利的情况 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布,$n\in\mathbb{N}^+$. 假设参数 θ 的先验分布为均匀分布 $U(0,1)$. 现老板工作了 6 天后休息了 1 天, 问如下关于盈利概率的假设哪个为真?

$$H_0:\theta>0.5 \leftrightarrow H_1:\theta<0.5.$$

解答 已知工作了 6 天后休息 1 天, 因此前 5 天中恰好有 4 天盈利, 且第 6 天盈利. 因此计算后验密度,

$$\pi(\theta \mid \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x} \mid \theta)\pi(\theta) = 5\theta^5(1-\theta)I_{\{0<\theta<1\}}.$$

进而计算后验概率及其比值:

$$\alpha_0 = P(\theta>0.5 \mid \mathbf{x}), \quad \alpha_1 = P(\theta<0.5 \mid \mathbf{x}), \qquad \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\int_{0.5}^1 \theta^5(1-\theta)\mathrm{d}\theta}{\int_0^{0.5} \theta^5(1-\theta)\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{16}} = 15>1,$$

因此接受假设 H_0.

注 这里的后验密度事实上是 Beta 分布 $B(6,2)$.

1.9 PPT3.2

习题 5.2

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,9)$, 其中 μ 为未知参数,$\bar{X}$ 为样本均值. 设检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$$

的拒绝域为 $\{(X_1,\cdots,X_n):|\bar{X}-\mu_0|>c\}$.

(1) 定出常数 c, 使检验水平为 $\alpha=0.05$;

(2) 求此检验的功效函数 $\beta(\mu)$;

(3) 固定样本容量 $n=25$, 分析犯两种错误概率 α 和 β 之间的关系.

解答 (1) 在 $H_0:\mu=\mu_0$ 成立时, 有 $\bar{X}\sim N(\mu_0,9/n)$, 因此 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 检验水平为

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}-\mu_0|>c \middle| H_0\right)=\alpha, \qquad \text{即}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right| > \frac{c\sqrt{n}}{3}\middle| H_0\right)=\alpha.$$

进而可知 $\Phi(\frac{c\sqrt{n}}{3}) = \frac{\alpha}{2}$, 即

$$\frac{c\sqrt{n}}{3} = u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96, \qquad c = \frac{5.88}{\sqrt{n}}.$$

(2) 功效函数定义为

$$\beta(\mu) = \mathbb{P}_{\mu}\left(|\bar{X} - \mu_0| > c\right).$$

当总体均值为 μ 时,$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{9}{n})$, 从而 $\frac{\bar{X}-\mu}{3/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. 因此

$$\begin{aligned}\beta(\mu) = \mathbb{P}_{\mu}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right| > \frac{c\sqrt{n}}{3}\right) &= \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{3/\sqrt{n}} > \frac{c\sqrt{n}}{3} - \frac{\mu-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right) + \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{3/\sqrt{n}} < -\frac{c\sqrt{n}}{3} - \frac{\mu-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{3} - \frac{\mu-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(-\frac{c\sqrt{n}}{3} - \frac{\mu-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{3}(\mu-\mu_0)\right) + \Phi\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{3}(\mu-\mu_0)\right).\end{aligned}$$

(3) 犯第一类错误, 第二类错误的概率分别为

$$\alpha = \mathbb{P}\left(|\bar{X}-\mu_0| > c \middle| H_0\right) = \mathbb{P}_{\mu_0}(|\bar{X}-\mu_0| > c) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{3/5}\right| > \frac{c}{3/5}\right) = 2\Phi\left(-\frac{5c}{3}\right).$$

$$\begin{aligned}\beta = 1 - \beta(\mu) = \mathbb{P}_{\mu}\left(|\bar{X}-\mu_0| \le c \middle| H_1\right) &= \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{-c+(\mu_0-\mu)}{3/5} \le \frac{\bar{X}-\mu}{3/5} \le \frac{c+(\mu_0-\mu)}{3/5} \middle| H_1\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5}{3}(c-\mu+\mu_0)\right) - \Phi\left(\frac{5}{3}(-c-\mu+\mu_0)\right), \quad \mu \neq \mu_0.\end{aligned}$$

二者之间的关系在于: 其余参数固定的情况下, 当 c 减小时,α 增大但 β 减小, 反之亦然. 二者无法同时取最小.

习题 5.4

设 $X_1, \cdots, X_n$ 取自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的随机样本, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数. 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. 若对检验问题

$$H_0 : \theta \ge 2 \leftrightarrow H_1 : \theta < 2$$

取检验的拒绝域为

$$W = \{(X_1, \cdots, X_n) : X_{(n)} \le 1.5\},$$

试求此检验犯第一类错误的概率的最大值.

解答 直接计算犯第一类错误概率:

$$\alpha = \mathbb{P}(W|H_0) = \mathbb{P}(X_{(n)} \le 1.5|\theta \ge 2) = \left(\frac{3}{2\theta}\right)^n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

习题 5.7

假定某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的长度 (单位: cm) 服从正态分布 $\mathcal{N}(10.5, 0.15^2)$. 今从一批产品中随机抽取 15 段进行测量, 其结果如下:

10.4, 10.6, 10.1, 10.4, 10.5, 10.3, 10.3, 10.2, 10.9, 10.6, 10.8, 10.5, 10.7, 10.2, 10.7.

试问该机工作是否正常 ($\alpha = 0.05$)?

解答 分别在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验均值与方差是否与设定值一致, 在进行其中一个的检验时默认另一个未知. 首先计算均值和样本方差为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{15} \times 157.2 = 10.48, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{14} \times 0.784 = 0.056.$$

先检验均值. 此时假设为

$$H_0: \mu = \mu_0 = 10.5 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 10.5,$$

这是单样本正态均值检验, 方差未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

给定 $\alpha = 0.05$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X} \middle| |T| > t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

代入已知数据:

$$|T| = \left|\frac{10.48 - 10.5}{\sqrt{0.056/15}}\right| \approx \frac{0.0200}{0.0611} \approx 0.327 < 2.1448 \approx t_{14}(0.025),$$

不落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0, 认为均值与 10.5 无显著差异.

再检验方差. 此时假设为

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.15^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq 0.15^2,$$

这是单样本正态方差检验, 均值未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

给定 $\alpha = 0.05$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X} \middle| \chi^2 < \chi_{n-1}^2(1 - \frac{\alpha}{2}) \text{或} \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

代入已知数据:

$$\chi^2 = \frac{(15-1) \times 0.056}{0.0225} = \frac{0.7840}{0.0225} \approx 34.844 > 26.119 \approx \chi_{14}^2(0.025),$$

落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0, 认为方差与 0.0225 有显著差异.

综上, 方差与正常值存在显著差异, 因此认为机器工作不正常, 精度出现问题.

注 本题中检验时约定另外一个量未知, 也可当成另外一个量已知进行检验. 考试时会约定具体是哪种情况.

习题 5.9

根据长期经验和资料分析, 某砖瓦厂生产的砖的抗断强度 X 服从方差为 σ^2 的正态分布, 今从该厂所生产的一批砖中随机抽取 6 块, 测得抗断强度 (单位:kg/cm^2) 如下:

$$32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03.$$

问这一批砖的平均抗断强度可否认为是 32.50kg/cm^2? $(\alpha = 0.01)$

解答 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下检验均值是否与设定值一致, 在进行检验时方差未知. 首先计算样本均值和样本标准差为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{6} \times 186.76 \approx 31.127, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \approx 1.260.$$

此时假设为

$$H_0: \mu = \mu_0 = 32.50 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 32.50,$$

这是单样本正态均值检验, 方差未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

给定 $\alpha = 0.01$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X} \middle| |T| > t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

代入已知数据:

$$|T| = \left|\frac{31.127 - 32.50}{\sqrt{1.260/6}}\right| \approx \frac{1.373}{0.458} \approx 2.998 < 4.0322 \approx t_5(0.005),$$

不落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.01$ 下接受 H_0, 可以认为平均抗断强度为 32.50kg/cm^2.

注 单样本正态检验题目的步骤为: 写出检验问题, 构造检验统计量并写出分布, 写出拒绝域, 代入数据并得出结论. 需要认真读题, 正确写出检验问题. 构造统计量, 写出拒绝域这两步可以直接背诵已知结论或是考试时自行推导.

习题 5.10

测定某种溶液中的水分, 它的 10 个测定值给出 $\bar{X} = 0.452\%, S = 0.037\%$, 设测定值总体为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 试在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

(1) $H_0 : \mu \le 0.5\% \leftrightarrow H_1 : \mu > 0.5\%$;

(2) $H_0 : \sigma \ge 0.04\% \leftrightarrow H_1 : \sigma < 0.04\%$.

解答 先检验均值. 此时假设为

$$H_0 : \mu \le \mu_0 = 0.5\% \leftrightarrow H_1 : \mu > 0.5\%,$$

这是单样本正态均值检验, 方差未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

给定 $\alpha = 0.05$, 单边检验拒绝域为

$$\{\mathbf{X} \,|T > t_{n-1}(\alpha)\}.$$

代入已知数据:

$$T = \frac{0.452 - 0.5}{0.037/\sqrt{10}} \approx \frac{-0.048}{0.0117} \approx -4.102 < 1.8331 \approx t_9(0.05),$$

不落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0, 认为 $\mu \le 0.5\%$.

再检验方差. 此时假设为

$$H_0 : \sigma \ge \sigma_0 = 0.04\% \leftrightarrow H_1 : \sigma < 0.04\%,$$

这是单样本正态方差检验, 均值未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

给定 $\alpha = 0.05$, 单边检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X} \middle| \chi^2 < \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right\}.$$

代入已知数据:

$$\chi^2 = \frac{(10-1) \times 0.037^2}{0.04^2} = \frac{0.012321}{0.0016} \approx 7.701 \ge 3.325 \approx \chi^2_9(0.95),$$

不落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0, 认为 $\sigma \ge 0.04\%$.

习题 5.14

某厂的一批电子产品, 其寿命 T 服从指数分布, 其密度函数为

$$f(t;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left(\frac{t}{\theta}\right) I_{\{t>0\}}.$$

从以往生产情况知平均寿命 $\theta = 2000$ 小时. 为检验当日生产是否稳定, 任取 10 个产品进行寿命试验, 到全部失效时试验停止. 试验得失效寿命数据之和为 30200. 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0 : \theta = 2000 \leftrightarrow H_1 : \theta \ne 2000.$$

解答 我们知道对于指数简单样本本,$S=\sum_{i=1}^n T_i$ 是 θ 的充分统计量,MLE 为 $\hat{\theta}=\bar{T}$, 且 $S\sim\Gamma(n,\frac{1}{\theta})$, 其密度为

$$f_S(s;\theta)=\frac{1}{\Gamma(n)}\theta^{-n}s^{n-1}\exp\left(-\frac{s}{\theta}\right)I_{\{s>0\}},$$

关于充分统计量的似然函数为 $L^*(\theta)=f_S(s;\theta)$. 进而由 PPT3.1 定理可知似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{T})=\lambda^*(S)=\frac{\sup_{\theta=2000}L^*(\theta)}{\sup_{\theta>0}L^*(\theta)}=\frac{L^*(2000)}{L^*(\hat{\theta})}=\frac{\frac{1}{\Gamma(n)}(2000)^{-n}S^{n-1}\exp\left(-\frac{S}{2000}\right)}{\frac{1}{\Gamma(n)}(\hat{\theta})^{-n}S^{n-1}\exp\left(-\frac{S}{\hat{\theta}}\right)}=\left(\frac{S}{2000n}\right)^n\exp\left(-\frac{S}{2000}+n\right).$$

定义统计量 $W=\frac{2S}{2000}=\frac{S}{1000}$. 当 H_0 成立时, 由卡方分布和指数分布的关系可知 $W\sim\chi^2_{2n}=\chi^2_{20}$. 另一方面, 求导可知 $\lambda(\mathbf{T})$ 关于 W 在 $(0,20)$ 单增, 在 $(20,\infty)$ 单减. 因此拒绝域近似等价于 $W\le c_1$ 或 $W\ge c_2$, 进而在给定水平 $\alpha=0.05$ 时, 双侧检验近似的拒绝域为

$$\left\{\mathbf{T}\middle|W\le\chi^2_{20}(0.975)\text{或}W\ge\chi^2_{20}(0.025)\right\}.$$

查表得 $\chi^2_{20}(0.025)=34.1696$,$\chi^2_{20}(0.975)=9.5908$. 由数据,$S=30200$, 故 $W=30.2$, 观测值未落在拒绝域内. 因此在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0, 认为当日生产的平均寿命 θ 与 2000 小时无显著差异.

习题 5.34

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ 指数分布 Exp(λ), 求下列水平为 α 的似然比检验:

(1) $H_0:\lambda=\lambda_0\leftrightarrow H_1:\lambda\ne\lambda_0$,

(2) $H_0:\lambda\le\lambda_0\leftrightarrow H_1:\lambda>\lambda_0$.

解答 本题中似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{X}):=\frac{\sup_{\lambda\in\Theta_0}L(\lambda)}{\sup_{\lambda\in\Theta}L(\lambda)}.$$

先求全参数空间 $\Theta=\{\lambda:\lambda>0\}$ 上似然函数的最大值. 直接写出样本似然函数及全空间上的 MLE 为

$$L(\lambda)=\lambda^n\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^n X_i\right),\qquad \hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}},$$

因此对应的最大似然函数值为

$$L(\hat{\lambda})=\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n\exp\left(-\frac{n\bar{x}}{\bar{x}}\right)=\bar{x}^{-n}e^{-n}.$$

(1) 对于双侧检验 $H_0:\lambda=\lambda_0\leftrightarrow H_1:\lambda\ne\lambda_0$,$\Theta_0=\{\lambda_0\}$, 因此在其上最大似然函数值即为

$$L(\lambda_0)=\lambda_0^n\exp\left(-\lambda_0\sum_{i=1}^n x_i\right)=\lambda_0^n\exp\left(-n\lambda_0\bar{x}\right).$$

故似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{L(\lambda_0)}{L(\hat{\lambda})}=\frac{\lambda_0^n\exp\left(-n\lambda_0\bar{x}\right)}{\bar{x}^{-n}e^{-n}}=(\lambda_0\bar{x})^n\exp(-n(\lambda_0\bar{x}-1)).$$

定义统计量 $W=2n\lambda_0\bar{X}$. 当 H_0 成立时, 由卡方分布和指数分布的关系可知 $W\sim\chi^2_{2n}$. 另一方面, 求导可知 $\lambda(\mathbf{X})$ 关于 W 在 $(0,2n)$ 单增, 在 $(2n,\infty)$ 单减. 因此拒绝域等价于 $W\le c_1$ 或 $W\ge c_2$. 进而在给定水平 α 时, 双侧检验近似的拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\middle|W\le\chi^2_{2n}(1-\frac{\alpha}{2})\text{ 或}W\ge\chi^2_{2n}(\frac{\alpha}{2})\right\}.$$

(2) 对于单侧检验 $H_0:\lambda\le\lambda_0\leftrightarrow H_1:\lambda>\lambda_0$, 此时 $\Theta_0=\{\lambda:\lambda\le\lambda_0\}$. 在 Θ_0 上, 对对数似然函数求导可知

$$\log L(\lambda)=n\log\lambda-\lambda\sum_{i=1}^n X_i,\qquad \frac{\partial\log L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n X_i,$$

进而可知此时似然函数的最大值为

$$\sup_{\lambda\in\Theta_0} L(\lambda)=\begin{cases}L(\hat{\lambda}), & \bar{X}\geq\frac{1}{\lambda_0},\\ L(\lambda_0), & \bar{X}<\frac{1}{\lambda_0}.\end{cases}$$

故似然比统计量为

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{\sup_{\lambda\in\Theta_0}L(\lambda)}{L(\hat{\lambda})}=\begin{cases}1, & \bar{X}\geq\frac{1}{\lambda_0},\\ (\lambda_0\bar{x})^n\exp(-n(\lambda_0\bar{x}-1)), & \bar{X}<\frac{1}{\lambda_0}.\end{cases}$$

定义统计量 $W=2n\lambda_0\bar{X}$. 当 H_0 成立时, 由卡方分布和指数分布的关系可知 $W\sim\chi^2_{2n}$. 另一方面, 求导可知 $\lambda(\mathbf{X})$ 关于 W 在 $(0,2n)$ 单增, 在 $(2n,\infty)$ 为常数 1. 因此拒绝域等价于 $W\leq c$. 进而在给定水平 α 时, 检验近似的拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\middle|W\leq\chi^2_{2n}(\alpha)\right\}.$$

习题 5.35

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自下列指数分布总体的样本:

$$f(x,\mu)=e^{-(x-\mu)},\quad x\geq\mu,-\infty<\mu<\infty.$$

求检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$$

水平为 α 的似然比检验.

解答 先求充分统计量的似然比统计量. 样本联合密度为

$$f(\mathbf{x};\mu)=\prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\mu)}=\exp\left(-\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)\right)I_{\{x_{(1)}\geq\mu\}},$$

故由因子分解定理, 充分统计量为 $T(\mathbf{X})=X_{(1)}$. 关于充分统计量的似然比统计量为

$$\lambda^*(T(\mathbf{x}))=\frac{\sup_{\mu=\mu_0}L^*(\mu)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R}}L^*(\mu)},$$

其中 $L^*(\mu)$ 是关于 $T(\mathbf{X})$ 的似然函数. 我们知道样本取自偏移指数分布, 因此样本最小值仍然服从偏移的指数分布, 即 $X_{(1)}$ 的密度为 $f_{X_{(1)}}(t;\mu)=ne^{-n(t-\mu)}I_{\{t\geq\mu\}}$, 因此

$$L^*(\mu)=n\exp(-n(x_{(1)}-\mu))I_{\{x_{(1)}\geq\mu\}}.$$

在全空间 $\Theta=\{\mu:\mu\in\mathbb{R}\}$ 上, 似然函数在 MLE 处取得最大值. 由密度表达式知,μ 的最大可能值为 $x_{(1)}$, 故 $\hat{\mu}=X_{(1)}$. 代入得 $L^*(\hat{\mu})=n$. 在 $\Theta_0=\{\mu:\mu=\mu_0\}$ 上, 似然函数为 $L^*(\mu_0)=n\exp(-n(x_{(1)}-\mu_0))I_{\{x_{(1)}\geq\mu_0\}}$. 于是由定理知充分统计量的似然比统计量为:

$$\lambda(\mathbf{x})=\lambda^*(T(\mathbf{x}))=\frac{\sup_{\mu=\mu_0}L^*(\mu)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R}}L^*(\mu)}=\begin{cases}\exp(-n(x_{(1)}-\mu_0)), & x_{(1)}\geq\mu_0,\\ 0, & x_{(1)}<\mu_0.\end{cases}$$

定义统计量 $T=X_{(1)}-\mu_0$. 当 H_0 成立时, 由指数分布性质知 $T\sim\mathrm{Exp}(n)$. 另一方面, 求导可知 $\lambda(\mathbf{X})$ 关于 T 在 $(-\infty,0)$ 为常数 0, 在 $(0,\infty)$ 单减. 因此拒绝域等价于 $T<0$ 或 $T\geq c$. 代入指数分布的密度函数, 可知在给定水平 α 时, 检验对应的拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\middle|X_{(1)}<\mu_0\text{或}X_{(1)}\geq\mu_0-\frac{\log\alpha}{n}\right\}.$$

注 当题目中分布族的支撑集和参数有关时, 计算时一定要带上示性函数进行计算.

1.10 PPT3.3

引理 (Neyman-Pearson)

设样本联合概率密度/质量函数为 $f(x;\theta)$, 考虑检验问题:

$$H_0:\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1,$$

如果一个检验对应的拒绝域 R 满足: 对于某个常数 $k>0$,

- 若 $f(x;\theta_1)>kf(x;\theta_0)$, 则 $x\in R$;
- 若 $f(x;\theta_1)<kf(x;\theta_0)$, 则 $x\notin R$,

而且 $P_{\theta_0}(X\in R)=\alpha$, 则此检验是上述检验问题水平为 α 的 UMPT.

推论 (Neyman-Pearson 引理的推论)

设样本联合概率密度/质量函数为 $f(x;\theta)$, 考虑检验问题:

$$H_0:\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1,$$

设 $T(X)$ 是一个关于 θ 的充分统计量,$g(t;\theta)$ 是 T 的概率密度/质量函数, 则任何一个基于 T 的拒绝域 R_T 的检验, 如果满足: 对于某个常数 $k>0$,

- 若 $g(t;\theta_1)>kg(t;\theta_0)$, 则 $t\in R_T$;
- 若 $g(t;\theta_1)<kg(t;\theta_0)$, 则 $t\in R_T^c$,

而且 $P_{\theta_0}(T\in R_T)=\alpha$, 则此检验是上述检验问题水平为 α 的 UMPT.

定理 (Karlin-Rubin)

考虑检验问题:

$$H_0:\theta\le\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0.$$

设 T 是一个关于 θ 的充分统计量, 并且 T 的概率密度/质量函数 $g(t;\theta)(\theta\in\Theta)$ 关于 t 具有非降的 MLR (单调似然比), 则对于任何 t_0, 检验

$$\text{当}T>t_0\text{时拒绝}H_0$$

是一个水平为 α 的 UMPT, 其中 $\alpha=P_{\theta_0}(T>t_0)$.

第 9 页作业 1

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(0,\sigma^2)$,$\sigma^2>0$ 未知, 求检验问题

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2=\sigma_1^2,\quad \text{其中}\sigma_0^2<\sigma_1^2$$

水平为 α 的 UMPT.

解答 写出样本联合密度和似然比分别为

$$f(\mathbf{x};\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right),\qquad \frac{f(\mathbf{x};\sigma_1^2)}{f(\mathbf{x};\sigma_0^2)}=\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

已知 $\sigma_0^2<\sigma_1^2$, 因此 $\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}>0$, 因此似然比是 $\sum_{i=1}^n x_i^2$ 的严格增函数. 由 Neyman-Pearson 引理, 水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如

$$R=\left\{\mathbf{X}\,\middle|\,\frac{f(\mathbf{x};\sigma_1^2)}{f(\mathbf{x};\sigma_0^2)}>k\right\},\qquad \text{且}\mathbb{P}_{\sigma_0^2}(X\in R)=\alpha.$$

由于似然比关于 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 单调增, 因此存在常数 c 使得 $R = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^n X_i^2 > c\}$. 另一方面, 当 H_0 成立时, 由于 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$, 因此由条件 $\alpha = \mathbb{P}_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^n X_i^2 > c)$ 可知 $c = \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha)$, 进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^n X_i^2 > \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha)\text{时拒绝}H_0.$$

第 9 页作业 2

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Poi}(\lambda)$,$\lambda > 0$ 未知, 求检验问题

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \leftrightarrow H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad \text{其中}\lambda_0 < \lambda_1$$

水平为 α 的 UMPT.

解答 写出样本联合质量和似然比分别为

$$f(\mathbf{x};\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)^{-1} e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}, \qquad \frac{f(\mathbf{x};\lambda_1)}{f(\mathbf{x};\lambda_0)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)}.$$

已知 $\lambda_0 < \lambda_1$, 因此 $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1$, 因此似然比是 $\sum_{i=1}^n x_i$ 的严格增函数. 由 Neyman-Pearson 引理, 水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如

$$R = \left\{\mathbf{X}\left|\frac{f(\mathbf{x};\lambda_1)}{f(\mathbf{x};\lambda_0)} > k\right.\right\}, \qquad \text{且}\mathbb{P}_{\lambda_0}(X \in R) = \alpha.$$

由于似然比关于 $\sum_{i=1}^n X_i$ 单调增, 因此存在常数 c 使得 $R = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^n X_i > c\}$. 另一方面, 当 H_0 成立时, 由于 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poi}(n\lambda_0)$, 因此由条件 $\alpha \geq \mathbb{P}_{\lambda_0}(\sum_{i=1}^n X_i > c)$ 可知水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^n X_i \geq c\text{时拒绝}H_0, \qquad \text{其中}c\text{为使得}\sum_{t=c}^\infty e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!} \leq \alpha\text{的最小整数}.$$

注 上面两个例子中构造的统计量均为充分统计量, 因此其实已经用到了 Neyman-Pearson 引理的推论. 对于离散分布, 需要具体写出拒绝域的边界是哪个整数. 这里第二题中, 与前面分布连续时均不同的是, 一般不存在一个整数使得概率恰好为 α, 进而这时求出的水平为 α 的检验一般不为真实水平为 α 的检验. 教材上对于这种离散情况采取了在边界值随机化检验的方法, 即除了上述拒绝域之外, 当 $\sum_{i=1}^n X_i = c-1$ 时以一定概率拒绝 H_0, 使得真实水平严格为 α. 在作业中我们略去相关讨论.

习题 5.41

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0,\theta)$, 试求:

(1) 检验问题 $H_0 : \theta = 1 \leftrightarrow H_1 : \theta = 2$ 检验水平为 α 的 UMPT;

(2) 检验问题 $H_0 : \theta = 1 \leftrightarrow H_1 : \theta = \frac{1}{2}$ 检验水平为 α 的 UMPT.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其密度函数为

$$f(\mathbf{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n} I_{\{x_{(n)}\leq\theta\}} I_{\{x_{(1)}\geq 0\}}, \qquad \frac{f(\mathbf{x};2)}{f(\mathbf{x};1)} = \frac{\frac{1}{2^n} I_{\{x_{(n)}\leq 2\}}}{\frac{1}{1^n} I_{\{x_{(n)}\leq 1\}}} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{I_{\{x_{(n)}\leq 2\}}}{I_{\{x_{(n)}\leq 1\}}}.$$

当 $X_{(n)} \leq 1$ 时, 似然比为 $\frac{1}{2^n}$; 当 $1 < X_{(n)} \leq 2$ 时, 此时似然比定义为 $+\infty$. 因此, 似然比是 $X_{(n)}$ 的单调非减函数. 由 Karlin-Rubin 定理, 水平 α 的 UMPT 的拒绝域形如

$$R = \{\mathbf{X}|X_{(n)} > c\}, \qquad \text{且}\mathbb{P}_{\theta=1}(X \in R) = \alpha.$$

当 H_0 成立时,$X_{(n)}$ 的分布函数为 $f_{X_{(n)}}(x) = x^n I_{\{0\leq x\leq 1\}}$. 因此可知

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=1}(X_{(n)} > c) = 1 - c^n, \qquad \text{解得}c = (1-\alpha)^{\frac{1}{n}},$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}X_{(n)} > (1-\alpha)^{\frac{1}{n}}\text{时拒绝}H_0.$$

(2) 由因子分解定理直接写出充分统计量和其密度函数为

$$f(\mathbf{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n} I_{\{x_{(n)}\leq\theta\}} I_{\{x_{(1)}\geq 0\}}, \qquad \frac{f(\mathbf{x};\frac{1}{2})}{f(\mathbf{x};1)} = \frac{2^n I_{\{x_{(n)}\leq\frac{1}{2}\}}}{1^n I_{\{x_{(n)}\leq 1\}}} = 2^n\cdot\frac{I_{\{x_{(n)}\leq\frac{1}{2}\}}}{I_{\{x_{(n)}\leq 1\}}}.$$

当 $X_{(n)} \leq \frac{1}{2}$ 时, 似然比为 2^n; 当 $\frac{1}{2} < X_{(n)} \leq 1$ 时, 似然比定义为 0. 因此, 似然比是 $X_{(n)}$ 的单调非增函数. 由 Karlin-Rubin 定理, 水平 α 的 UMPT 的拒绝域形如

$$R = \{\mathbf{X}|X_{(n)} < c\}, \qquad \text{且}\mathbb{P}_{\theta=1}(X\in R) = \alpha.$$

当 H_0 成立时,$X_{(n)}$ 的分布函数为 $f_{X_{(n)}}(x) = x^n I_{\{0\leq x\leq 1\}}$. 因此可知

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=1}(X_{(n)} < c) = c^n, \qquad \text{解得}c = \alpha^{\frac{1}{n}},$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}X_{(n)} < \alpha^{\frac{1}{n}}\text{时拒绝}H_0.$$

习题 5.42

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu,1)$, 对水平 α, 试求检验问题

$$H_0:\mu\geq\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu<\mu_0$$

的 UMPT , 其中 μ_0 和 α 给定.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其密度函数为

$$T = \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu,\frac{1}{n}), \qquad f_T(t;\mu) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left(-\frac{n}{2}(t-\mu)^2\right).$$

对于任意的 $\mu_2 > \mu_1$,

$$\frac{f_T(t;\mu_2)}{f_T(t;\mu_1)} = \exp\left(\frac{n}{2}((t-\mu_2)^2-(t-\mu_1)^2)\right) = \exp\left(\frac{n}{2}(\mu_2-\mu_1)(2t-\mu_1-\mu_2)\right),$$

为关于 t 的非降函数, 进而由 Karlin-Rubin 定理知水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如 $R = \{x|T<c\}$. 另一方面, 在 H_0 成立时我们有

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}(T<c) = \mathbb{P}_{\mu_0}(\sqrt{n}(T-\mu_0) < \sqrt{n}(c-\mu_0)) = \Phi(\sqrt{n}(c-\mu_0)), \qquad \text{解得}c = \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\alpha).$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\bar{X} < \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\alpha)\text{时拒绝}H_0.$$

注 在使用 Karlin-Rubin 定理时需要注意不等号的方向. 本题中 H_0 假设的不等号方向与原来定理陈述相反, 因此结论中拒绝域的不等号也和原来定理陈述相反. MLR 是非增/非降也会导致拒绝域不等号反号, 应当多加注意.

习题 5.43

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$Poisson 分布 Poi$(\lambda)$, 对水平 α, 试求检验问题

$$H_0:\lambda\geq\lambda_0 \leftrightarrow H_1:\lambda<\lambda_0$$

的 UMPT, 其中 λ_0 和 α 给定.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其质量函数为

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Poi}(n\lambda), \qquad f_T(t;\lambda) = e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!}.$$

对于任意的 $\lambda_2 > \lambda_1$,

$$\frac{f_T(t;\lambda_2)}{f_T(t;\lambda_1)} = \frac{(n\lambda_2)^t e^{-n\lambda_2}}{(n\lambda_1)^t e^{-n\lambda_1}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t e^{-n(\lambda_2-\lambda_1)},$$

为关于 t 的非降函数, 进而由 Karlin-Rubin 定理知水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如 $R = \{x|T < c\}$. 另一方面, 在 H_0 成立时我们有

$$\alpha \geq \mathbb{P}_{\lambda_0}(T \leq c), \qquad \text{解得}c\text{为使得}\sum_{t=0}^{c} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!} \leq \alpha\text{的最大整数}.$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c\text{时拒绝}H_0.$$

习题 5.44

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$, 对水平 α, 试求检验问题

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的 UMPT, 其中 σ_0^2 和 α 给定.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其密度函数为

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \qquad \frac{1}{\sigma^2}T \sim \chi_n^2, \qquad f_T(t;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} f_{\chi_n^2}(\frac{t}{\sigma^2}) = \frac{1}{\sigma^2 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right) I_{\{t>0\}}.$$

对于任意的 $\sigma_2^2 > \sigma_1^2 > 0$,

$$\frac{f_T(t;\sigma_2^2)}{f_T(t;\sigma_1^2)} = \exp\left(\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right)\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

为关于 t 的非降函数, 进而由 Karlin-Rubin 定理知水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如 $R = \{x|T > c\}$. 另一方面, 在 H_0 成立时我们有

$$\alpha = \mathbb{P}_{\sigma_0^2}(T > c) = \mathbb{P}_{\sigma_0^2}(\frac{1}{\sigma_0^2}T > \frac{1}{\sigma_0^2}c), \qquad \text{解得}c = \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha).$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha)\text{ 时拒绝}H_0.$$

习题 5.45

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p)$, 对水平 α, 试求检验问题

$$H_0 : p \geq \frac{1}{2} \leftrightarrow H_1 : p < \frac{1}{2}$$

的 UMPT, 其中 α 给定.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其质量函数为

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, p), \qquad f_T(t;p) = \binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}.$$

对于任意的 $p_2 > p_1$,

$$\frac{f_T(t;p_2)}{f_T(t;p_1)} = \frac{\binom{n}{t}p_2^t(1-p_2)^{n-t}}{\binom{n}{t}p_1^t(1-p_1)^{n-t}} = \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^t\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^n.$$

由于当 $p_2 > p_1$ 时,$\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} > 1$, 故上述似然比为关于 t 的非降函数, 进而由 Karlin-Rubin 定理知水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如 $R = \{x|T < c\}$. 另一方面, 当 H_0 成立时我们有

$$\alpha \geq \mathbb{P}_{p=\frac{1}{2}}(T \leq c), \qquad \text{解得}c\text{为使得}\sum_{t=0}^{c}\binom{n}{t} \leq 2^n\alpha\text{的最大整数}.$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq c \text{ 时拒绝}H_0.$$

习题 5.47

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$, 对水平 α, 试求检验问题

$$H_0 : \lambda \geq \lambda_0 \leftrightarrow H_1 : \lambda < \lambda_0$$

的 UMPT, 其中 λ_0 和 α 给定.

解答 由因子分解定理直接写出充分统计量和其密度函数为

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda), \qquad f_T(t; \lambda) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} I_{\{t>0\}}.$$

对于任意的 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$,

$$\frac{f_T(t; \lambda_2)}{f_T(t; \lambda_1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \exp\left(-t(\lambda_2 - \lambda_1)\right),$$

为关于 t 的非增函数, 进而由 Karlin-Rubin 定理知水平为 α 的 UMPT 的拒绝域形如 $R = \{x|T > c\}$. 另一方面, 在 H_0 成立时由 Gamma 分布和卡方分布的关系有 $2\lambda_0 T \sim \chi^2_{2n}$, 因此

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}(T > c) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(2\lambda_0 T > 2\lambda_0 c), \qquad \text{解得}c = \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n}(\alpha).$$

进而水平为 α 的 UMPT 为

$$\text{当}\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n}(\alpha) \text{ 时拒绝}H_0.$$

1.11 PPT4.1

习题 4.1

对物体某指标进行 5 次测量, 得其数据为

$$4.781, 4.795, 4.769, 4.792, 4.779.$$

设指标值服从 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma = 0.01$, 试求物体该指标平均值的置信系数为 0.95 的置信区间.

解答 本题为单样本正态均值区间估计. 由于方差已知, 故构造枢轴变量:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

对于给定的置信系数 $1 - \alpha = 0.95$, 有 $\alpha = 0.05$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha, \qquad \text{解得}\mu \in \left[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

查表并代入数据:

$$\bar{X} = \frac{1}{5} \times 23.916 = 4.7832, \quad \sigma = 0.01, \quad n = 5, \quad u_{0.025} = 1.96,$$

因此,μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[4.7832-1.96\times\frac{0.01}{\sqrt{5}},4.7832+1.96\times\frac{0.01}{\sqrt{5}}\right]\approx[4.774,4.792].$$

习题 4.3

设某种电子管的使用寿命服从正态分布, 从中随机抽取 15 个进行试验, 得样本均值为 1950 小时, 样本标准差为 300 小时. 以 95% 的可靠度求整批电子管平均使用寿命的置信区间.

解答 本题为单样本正态均值区间估计. 由于方差未知, 故构造枢轴变量:

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t_{n-1}.$$

对于给定的置信系数 $1-\alpha=0.95$, 有 $\alpha=0.05$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}<t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha,\qquad \text{解得}\mu\in\left[\bar{X}-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

查表并代入数据:

$$\bar{X}=1950,\quad S=300,\quad n=15,\quad t_{14}(0.025)=2.1448,$$

因此,μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]=\left[1950-2.1448\times\frac{300}{\sqrt{15}},1950+2.1448\times\frac{300}{\sqrt{15}}\right]\approx[1784,2116].$$

习题 4.4

设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 取自正态总体 $\mathcal{N}(\mu,16)$, 为使 $[\bar{X}-1,\bar{X}+1]$ 是 μ 的置信系数为 0.90 的置信区间, 样本容量 n 至少应为多少?

解答 本题为单样本正态均值区间估计. 由于方差已知, 故构造枢轴变量:

$$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1).$$

对于给定的置信系数 $1-\alpha=0.90$, 有 $\alpha=0.10$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha,\qquad \text{解得}\mu\in\left[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

由题知 $[\bar{X}-1,\bar{X}+1]$ 是一个置信区间, 因此 $\sqrt{n}\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma$. 代入已知数据:

$$\sigma^2=16,\quad u_{0.05}=1.645,\qquad \text{解得}n\geq 6.58^2=43.2964,$$

因此样本容量 n 至少应为 44.

习题 4.11

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自正态总体 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的样本. 为使 $\frac{1}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$ 成为 σ 的置信系数为 0.95 的 (单侧) 置信上限, 样本容量 n 至少应取多少?

解答 本题为单样本正态方差区间估计. 由于均值未知, 故构造枢轴变量:

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}.$$

对于给定的置信系数 $1-\alpha=0.95$, 有 $\alpha=0.05$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\geq\chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right)=1-\alpha,\qquad \text{解得}\sigma^2\leq\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}.$$

由题知 $\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 σ^2 的一个置信上限, 因此 $\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}$, 即 $\chi^2_{n-1}(1-\alpha)\geq 16$. 查表知 $\chi^2_{26}(0.05)=15.379<16<16.151=\chi^2_{27}(0.05)$, 因此可知 n 至少为 28.

习题 4.14

某电子产品有两种型号. 为了比较它们的某项参数值, 分别从这两种型号电子产品中随机抽取若干个, 测量该项参数值, 得如下数据:

型号甲:10.1, 10.3, 10.4, 9.7, 9.8;

型号乙:12.5, 12.2, 12.1, 12.0, 11.9, 11.8, 12.8.

假设这两种型号的电子产品的该项参数值皆服从正态分布, 而且它们的方差相等. 试求它们的平均参数之差的置信系数为 95% 的置信区间.

解答 本题为两样本正态均值差区间估计. 由于方差相等但未知, 故构造枢轴变量:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\sim t_{m+n-2},\qquad \text{其中}S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S^2_{\text{甲}}+(n-1)S^2_{\text{乙}}}{m+n-2}}.$$

对于给定的置信系数 $1-\alpha=0.95$, 有 $\alpha=0.05$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}<t_{n+m-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha,$$

解得

$$\mu_1-\mu_2\in\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},(\bar{X}-\bar{Y})+t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

查表并代入数据:

$$m=5,\quad \bar{X}=\frac{1}{5}\times 50.3=10.06,\quad S^2_{\text{甲}}=0.093,\quad n=7,\quad \bar{Y}=\frac{1}{7}\times 85.3=12.186,\quad S^2_{\text{乙}}=0.125,$$

$$t_{10}(0.025)=2.2281,\quad \bar{X}-\bar{Y}=-2.126,\quad S_w=0.335,\quad t_{n+m-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=0.437,$$

因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间约为 $[-2.563,-1.689]$.

习题 4.15

设 $X_1,\cdots,X_m$ 是自正态总体 $\mathcal{N}(a,\sigma_1^2)$ 抽取的简单样本,$Y_1,\cdots,Y_n$ 是自正态总体 $\mathcal{N}(b,\sigma_2^2)$ 抽取的简单样本, 且 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 独立.

(1) 当样本容量 $m=n$ 时, 求均值差 $b-a$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(2) 当方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时, 求其均值差 $b-a$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(3) 当均值 a 和 b 已知时, 求方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解答 (1) 当样本容量 $m=n$ 时, 记 $Z_i=Y_i-X_i$. 由于 $X_i\sim\mathcal{N}(a,\sigma_1^2)$,$Y_i\sim\mathcal{N}(b,\sigma_2^2)$ 且相互独立, 故

$$Z_i\sim\mathcal{N}\left(b-a,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right),\qquad \text{且}Z_1,\cdots,Z_n\text{为简单样本}.$$

此时均值差 $b-a$ 的估计转化为单样本正态均值区间估计. 由于方差未知, 故构造枢轴变量:

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{Z}-(b-a))}{S_Z}\sim t_{n-1},\qquad \text{其中}S_Z^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((Y_i-X_i)-(\bar{Y}-\bar{X})\right)^2.$$

对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\sqrt{n}(\bar{Z}-(b-a))}{S_Z} < t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha,$$

解得 $b-a$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{Z}-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}, \bar{Z}+t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{Y}-\bar{X}-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}, \bar{Y}-\bar{X}+t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}\right].$$

(2) 当方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时, 构造枢轴变量, 并对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 利用置信区间的定义求解:

$$U = \frac{(\bar{Y}-\bar{X})-(b-a)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \mathbb{P}\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{Y}-\bar{X})-(b-a)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha,$$

解得 $b-a$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{Y}-\bar{X})-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}, \quad (\bar{Y}-\bar{X})+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right].$$

(3) 当均值 a 和 b 已知时, 记

$$S_{X*}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-a)^2, \qquad S_{Y*}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-b)^2,$$

且二者相互独立. 由正态总体样本方差的性质, 我们有

$$\frac{mS_{X*}^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_m^2, \qquad \frac{nS_{Y*}^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_n^2,$$

且二者独立. 因此构造枢轴变量, 并对于置信水平 $1-\alpha$, 利用置信区间的定义求解:

$$F = \frac{S_{X*}^2/\sigma_1^2}{S_{Y*}^2/\sigma_2^2} \sim F_{m,n}, \qquad \mathbb{P}\left(F_{m,n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{S_{X*}^2/\sigma_1^2}{S_{Y*}^2/\sigma_2^2} < F_{m,n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha,$$

解得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_{X*}^2}{S_{Y*}^2}\cdot\frac{1}{F_{m,n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \frac{S_{X*}^2}{S_{Y*}^2}\cdot\frac{1}{F_{m,n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$

习题 4.19

有两个化验员 A,B, 他们独立地对某种聚合物的含氧量用相同的方法作了 10 次测量, 其测定值的方差 S_A^2 分别为 0.5419 和 0.6065, 设 σ_A^2 和 σ_B^2 分别为 A,B 所测数据总体 (设为正态总体) 的方差, 求 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的 95% 的置信区间.

解答 本题为两样本正态方差比区间估计. 由于均值未知, 故构造枢轴变量:

$$F = \frac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2} = \frac{S_A^2\sigma_B^2}{S_B^2\sigma_A^2} \sim F_{n_A-1,n_B-1}.$$

对于给定的置信系数 $1-\alpha = 0.95$, 有 $\alpha = 0.05$. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(F_{n_A-1,n_B-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{S_A^2\sigma_B^2}{S_B^2\sigma_A^2} < F_{n_A-1,n_B-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha,$$

解得 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{n_A-1,n_B-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{n_A-1,n_B-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$

查表并代入数据:

$$n_A = n_B = 10, \quad S_A^2 = 0.5419, \quad S_B^2 = 0.6065$$

$$F_{9,9}(0.025) = 4.03, \quad F_{9,9}(0.975) = \frac{1}{F_{9,9}(0.025)} = 0.2481, \quad \frac{S_A^2}{S_B^2} = 0.8935,$$

因此,$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的 95% 的置信区间约为 $[0.2217, 3.6008]$.

习题 4.21

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自均匀分布 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的简单样本, 这里 $n \geq 2, -\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, 记 $X_{(1)} < X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ 为其次序统计量. 求

(1) $\theta_2 - \theta_1$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间; (提示: 证明 $[(\theta_2-\theta_1) - (X_{(n)} - X_{(1)})]/(\theta_2 - \theta_1)$ 分布与 θ_1,θ_2 无关)

(2) 求 $[X_{(1)} + X_{(n)} - (\theta_1+\theta_2)]/(X_{(n)} - X_{(1)})$ 的分布;

(3) 求 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解答 (1) 作变换 $Y_i = \frac{X_i - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$, 则 $Y_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0,1)$. 构造枢轴变量:

$$W := \frac{(\theta_2-\theta_1) - (X_{(n)} - X_{(1)})}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{(\theta_2-\theta_1) - (\theta_2-\theta_1)(Y_{(n)} - Y_{(1)})}{\theta_2 - \theta_1} = 1 - (Y_{(n)} - Y_{(1)}).$$

由次序统计量的分布定理知 $Y_{(1)}$ 与 $Y_{(n)}$ 的联合密度为

$$f(y_1, y_n) = n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2} I_{\{0<y_1<y_n<1\}}.$$

作变换 $w = 1-(y_n - y_1)$,$v = y_1$, 则 $y_n = 1 - w + v$, 进一步可计算变换的 Jacobi 行列式及变换后的联合密度为

$$J = \left|\frac{\partial(y_1, y_n)}{\partial(w, v)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad f_{W,V}(w,v) = n(n-1)(1-w)^{n-2} I_{\{0<w<1, 0<v<w\}}.$$

对 v 积分得 W 的边际密度为

$$f_W(w) = \int_0^w n(n-1)(1-w)^{n-2} I_{\{0<w<1,0<v<w\}} \mathrm{d}v = n(n-1)(1-w)^{n-2} w I_{\{0<w<1\}},$$

因此 $W \sim \mathrm{Beta}(2, n-1)$, 分布与 θ_1, θ_2 无关, 为枢轴变量. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Beta}_{2,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(\theta_2-\theta_1) - (X_{(n)} - X_{(1)})}{\theta_2 - \theta_1} \leq \mathrm{Beta}_{2,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha.$$

解得 $\theta_2 - \theta_1$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{1 - \mathrm{Beta}_{2,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{1 - \mathrm{Beta}_{2,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$

(2) 定义如下统计量

$$T := \frac{X_{(1)} + X_{(n)} - (\theta_1+\theta_2)}{X_{(n)} - X_{(1)}} = \frac{Y_{(1)} + Y_{(n)} - 1}{Y_{(n)} - Y_{(1)}}, \qquad U = Y_{(n)} - Y_{(1)}, \quad V = Y_{(1)} + Y_{(n)}.$$

令 $u = y_n - y_1$,$v = y_1 + y_n$, 则 $y_1 = \frac{v-u}{2}$,$y_n = \frac{v+u}{2}$, 进一步可计算变换的 Jacobi 行列式及变换后的联合密度为

$$J = \left|\frac{\partial(y_1, y_n)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \qquad f_{U,V}(u,v) = n(n-1)u^{n-2} \cdot \frac{1}{2} I_{\{0<u<1, u<v<2-u\}}.$$

再令 $t = \frac{v-1}{u}$, 则 $v = 1 + ut$, 进一步可计算变换的 Jacobi 行列式及变换后的联合密度为

$$J = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & u \end{vmatrix} = u, \qquad f_{U,T}(u,t) = f_{U,V}(u, 1+ut)u = \frac{n(n-1)}{2} u^{n-1} I_{\{0<u<1, u<1+ut<2-u\}}.$$

其中, 条件 $u < 1 + ut < 2 - u$ 等价于

$$\begin{cases} u(1-t) < 1, \\ u(1+t) < 1. \end{cases}$$

考虑 t 的不同情况. 当 $-1<t<1$ 时,u 的取值范围为 $(0,\frac{1}{1+|t|})$, 因此对 u 积分得到 T 的边际密度为

$$f_T(t)=\int_0^{\frac{1}{1+|t|}}\frac{n(n-1)}{2}u^{n-1}\mathrm{d}u=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^n.$$

当 $t\geq 1$ 时,u 的取值范围为 $(0,\frac{1}{1+t})$, 因此对 u 积分得到 T 的边际密度为

$$f_T(t)=\int_0^{\frac{1}{1+t}}\frac{n(n-1)}{2}u^{n-1}\mathrm{d}u=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+t}\right)^n=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{1+t}\right)^n.$$

当 $t\leq -1$ 时,u 的取值范围为 $(0,\frac{1}{1-t})$, 因此对 u 积分得到 T 的边际密度为

$$f_T(t)=\int_0^{\frac{1}{1-t}}\frac{n(n-1)}{2}u^{n-1}\mathrm{d}u=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^n.$$

综上,T 的密度函数为

$$f_T(t)=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^n.$$

(3) 以 T 为枢轴变量, 利用置信区间的定义求解. 由于密度函数对称, 故需找到常数 $c>0$ 使得

$$1-\alpha=\mathbb{P}(|T|\leq c)=\int_{-c}^{c}f_T(t)\mathrm{d}t=2\int_0^c\frac{n-1}{2}(1+t)^{-n}\mathrm{d}t=(n-1)\left.\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1}\right|_0^c=1-(1+c)^{-n+1},$$

解得 $c=\alpha^{-\frac{1}{n-1}}-1$. 因此有

$$\mathbb{P}\left(1-\alpha^{-\frac{1}{n-1}}\leq\frac{X_{(1)}+X_{(n)}-(\theta_1+\theta_2)}{X_{(n)}-X_{(1)}}\leq\alpha^{-\frac{1}{n-1}}-1\right)=1-\alpha,$$

解得 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{1}{2}\left(X_{(1)}+X_{(n)}-(\alpha^{-\frac{1}{n-1}}-1)(X_{(n)}-X_{(1)})\right),\frac{1}{2}\left(X_{(1)}+X_{(n)}+(\alpha^{-\frac{1}{n-1}}-1)(X_{(n)}-X_{(1)})\right)\right].$$

注 本题计算量较大, 需要熟练掌握并计算变量替换公式.

习题 4.25

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为从具有密度 $f(x,\theta)=e^{-(x-\theta)}I_{[x>\theta]}$ 的总体中抽取的简单样本, 此处 $-\infty<\theta<+\infty$,θ 未知.

(1) 证明 $X_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关, 并求出此分布. 此处 $X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$. (提示: 记 $X_i'=X_i-\theta,i=1,2,\cdots,n$. 证明 $X_1',\cdots,X_n'$ 的分布皆与 θ 无关, 又注意到 $X_{(1)}-\theta=X_{(1)}'$.)

(2) 求 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解答 (1) 令 $X_i'=X_i-\theta$, 则由 X_i 分布函数形式可知 $X_i'\sim\mathrm{Exp}(1)$, 与 θ 无关. 另一方面,

$$X_{(1)}-\theta=\min\{X_1,\cdots,X_n\}-\theta=\min\{X_1',\cdots,X_n'\}=X_{(1)}'.$$

由指数分布性质知 $X_{(1)}'\sim\mathrm{Exp}(n)$. 因此 $X_{(1)}-\theta\sim\mathrm{Exp}(n)$.

(2) 由卡方分布和指数分布的关系可知 $Z=2n(X_{(1)}-\theta)\sim\chi_2^2$, 分布与参数无关, 进而为枢轴变量. 利用置信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(\chi_2^2(1-\frac{\alpha}{2})\leq 2n(X_{(1)}-\theta)\leq\chi_2^2(\frac{\alpha}{2})\right)=1-\alpha.$$

解得 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[X_{(1)}-\frac{\chi_2^2(\frac{\alpha}{2})}{2n},X_{(1)}-\frac{\chi_2^2(1-\frac{\alpha}{2})}{2n}\right].$$

习题 4.33

对正态总体 $N(\theta,1)$ 作三次观察, 获得样本的具体观察值为 $2,4,3$. 若 θ 的先验分布为正态分布 $N(3,1)$, 求 θ 的可信系数为 0.95 的可信区间.

解答 先写出后验分布的形式. 记样本观测值为 $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 3$, 样本量为 $n = 3$. 后验密度

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \cdot \pi(\theta) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i-\theta)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-3)^2\right).$$

代入数据计算可得

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i-\theta)^2 - \frac{1}{2}(\theta-3)^2\right) = \exp\left(-2\theta^2 + 12\theta - 19\right) \propto \exp\left(-2(\theta-3)^2\right).$$

这说明后验分布 $\theta \mid \mathbf{X}$ 仍为正态分布, 对比可得 $\theta \mid \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(3, \frac{1}{4})$. 构造枢轴变量:

$$Z \mid \mathbf{x} = 2(\theta-3) \mid \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

对于给定的可信系数 $1-\alpha = 0.95$, 有 $\alpha = 0.05$. 利用可信区间的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < 2(\theta-3) < u_{\frac{\alpha}{2}} \middle| \mathbf{x}\right) = 1-\alpha.$$

查表知 $u_{0.025} = 1.96$, 代入解得 θ 的可信系数为 0.95 的可信区间约为

$$[3 - \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{2}, 3 + \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{2}] = [2.02, 3.98].$$

习题 4.34

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是从正态分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 中抽取的随机样本, 若 σ^2 的先验分布是逆 Gamma 分布 $\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$, 求 σ^2 的 0.90 可信上限.

解答 先写出后验分布的形式. 已知 σ^2 的先验为逆 Gamma 分布 $\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$, 其密度函数为

$$\pi(\sigma^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) \propto (\sigma^2)^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right),$$

因此代入计算可得

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\sigma^2)\pi(\sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}\right) \cdot (\sigma^2)^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) \\ &= (\sigma^2)^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left[\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right]\right).\end{aligned}$$

这说明后验分布 $\sigma^2 \mid \mathbf{X} \sim \Gamma^{-1}\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ 仍是逆 Gamma 分布. 由逆 Gamma 分布的性质以及 Gamma 分布和卡方分布的关系可得

$$\frac{1}{\sigma^2} \mid \mathbf{X} \sim \Gamma\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right), \qquad \text{故枢轴变量为}\chi^2 \mid \mathbf{X} = 2\left(\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma^2} \mid \mathbf{X} \sim \chi^2_{2\alpha+n}.$$

对于给定的可信水平 $1-\alpha = 0.90$, 有 $\alpha = 0.10$. 利用可信上限的定义求解:

$$\mathbb{P}\left(2\left(\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma^2} \geq \chi^2_{2\alpha+n}(0.90) \mid \mathbf{X}\right) = 0.90,$$

解得 σ^2 的 0.90 可信上限为

$$\left(0, \frac{2}{\chi^2_{2\alpha+n}(0.90)}\left(\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right].$$

1.12 PPT4.2

习题 5.19

两台机床加工同一零件, 分别取 6 个 9 个零件, 量其长度 $X_i (i = 1, \cdots, 6)$ 和 Y_j $(j = 1, \cdots, 9)$ 后算得 $Q_1^2 = \sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2 = 1.725, Q_2^2 = \sum_{j=1}^9 (Y_j - \bar{Y})^2 = 2.856$. 假定零件长度服从正态分布, 问是否可认为两台机床加工的

零件的方差无显著差异 ($\alpha = 0.02$)?

解答 在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 下检验两正态总体的方差是否相等. 已知样本信息为

$$n_1 = 6, \quad Q_1^2 = \sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X})^2 = 1.725, \quad n_2 = 9, \quad Q_2^2 = \sum_{j=1}^{9}(Y_j - \bar{Y})^2 = 2.856.$$

此时假设为

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

这是两样本正态方差比检验, 均值未知. 构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$F = \frac{Q_1^2/(n_1-1)}{Q_2^2/(n_2-1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}.$$

给定 $\alpha = 0.02$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\middle|F < F_{n_1-1,n_2-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\text{或}F > F_{n_1-1,n_2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

代入已知数据计算样本方差及统计量:

$$S_1^2 = \frac{Q_1^2}{n_1-1} = \frac{1.725}{5} = 0.345, \quad S_2^2 = \frac{Q_2^2}{n_2-1} = \frac{2.856}{8} = 0.357, \quad F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.345}{0.357} = 0.966.$$

查 F 分布分位数表得临界值:

$$F_{5,8}(0.01) = 6.63, \qquad F_{5,8}(0.99) = \frac{1}{F_{8,5}(0.01)} = \frac{1}{10.29} = 0.0972.$$

由于 $0.0972 < 0.966 < 6.63$, 即统计量值未落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.02$ 下接受 H_0, 可以认为两台机床加工的零件方差无显著差异.

习题 5.21

为研究砂肺患者肺功能的变化情况, 某医院对 I,II 期砂肺患者各 33 名测定其肺活量, 得到 I 期患者的肺活量平均数为 2710mL, 标准差为 147mL,II 期患者的肺活量平均数为 2830mL, 标准差为 118mL, 对水平 $\alpha = 0.10$, 试问第 I,II 期患者的肺活量有无显著差异 (假定肺活量服从正态分布)?

解答 假设 I 期患者肺活量服从 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$,II 期患者服从 $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, 两样本相互独立. 在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下检验两正态总体的方差和均值是否相等, 已知样本信息为

$$n_1 = 33, \quad S_1^2 = 147^2, \quad n_2 = 33, \quad S_2^2 = 118^2.$$

先检验方差. 此时假设为

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

这是两样本正态方差比检验, 均值未知. 构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}.$$

给定 $\alpha = 0.10$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{\mathbf{X}\middle|F < F_{n_1-1,n_2-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\text{或}F > F_{n_1-1,n_2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

代入已知数据计算:

$$S_1^2 = 147^2 = 21609, \quad S_2^2 = 118^2 = 13924, \quad F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{21609}{13924} = 1.552.$$

查 F 分布分位数表得临界值:

$$F_{32,32}(0.05) = 1.804, \quad F_{32,32}(0.95) = \frac{1}{F_{32,32}(0.05)} = \frac{1}{1.804} = 0.554.$$

由于 $0.554 < 1.552 < 1.804$, 即统计量值未落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.10$ 下接受 H_{01}, 可以认为两期患者的肺活量方差无显著差异.

再检验均值. 此时假设为

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$

这是两样本正态均值检验, 方差相等但未知. 构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \qquad \text{其中} S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

给定 $\alpha = 0.10$, 双侧检验拒绝域为

$$\left\{ \mathbf{X} \middle| |T| > t_{n_1+n_2-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}.$$

代入已知数据计算:

$$S_1^2 = 147^2 = 21609, \quad S_2^2 = 118^2 = 13924, \quad S_w^2 = \frac{(33-1) \times 21609 + (33-1) \times 13924}{33 + 33 - 2} = 17766.5,$$

$$T = \frac{2710 - 2830}{\sqrt{17766.5} \times \sqrt{\dfrac{1}{33} + \dfrac{1}{33}}} = \frac{-120}{133.29 \times \sqrt{\dfrac{2}{33}}} = -3.657.$$

查 t 分布分位数表得临界值:

$$t_{64}(0.05) = 1.669.$$

由于 $|T| = 3.657 > 1.669$, 即统计量值落在拒绝域内, 因此在 $\alpha = 0.10$ 下拒绝 H_0, 可以认为两期患者的肺活量均值有显著差异. 因此认为第 I,II 期患者的肺活量有显著差异.

注 对于检验均值是否相同的两样本正态检验, 本课程只涉及当方差相等时的情况. 一般情况称为 Behrens-Fisher 问题. 因此本题必须先检验方差, 肯定方差相等的假设后基于此再检验均值.

习题 5.55

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,$\mu$ 和 σ^2 皆未知, 利用假设检验方法导出 σ^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间和置信上, 下限.

解答 对于置信区间, 考虑关于 σ^2 的假设检验问题:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

这是单样本正态方差检验, 均值未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

给定 α, 双边检验的拒绝域为 $\left\{\mathbf{X} \middle| \chi^2 < \chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ 或} \chi^2 > \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$, 因此接受域为

$$\left\{ \mathbf{X} \middle| \chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\},$$

改写不等式, 得到关于 σ_0^2 的接受域:

$$\left\{ \mathbf{X} \middle| \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \right\},$$

因此,σ^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \right].$$

对于置信上限, 考虑关于 σ^2 的假设检验问题:

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2,$$

完全类似上述过程可得 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信上限为 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}$.

对于置信下限, 考虑关于 σ^2 的假设检验问题:

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

完全类似上述过程可得 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)}$.

习题 5.56

设 $X_1, \cdots, X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), Y_1, \cdots, Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且样本 $X_1, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立. 利用假设检验方法求出 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间和置信上, 下限.

解答 对于置信区间, 考虑关于 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的假设检验问题:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0 \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0,$$

这是两样本正态方差比的检验, 均值未知. 因此构造检验统计量并写出其在 H_0 下的分布为:

$$F = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{S_X^2/(\lambda_0\sigma_2^2)}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{S_X^2}{\lambda_0 S_Y^2} \sim F_{m-1,n-1},$$

给定 α, 双边检验的拒绝域为 $\left\{(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \middle| F < F_{m-1,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \text{ 或} F > F_{m-1,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$, 因此接受域为

$$\left\{(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \middle| F_{m-1,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{S_X^2}{\lambda_0 S_Y^2} \leq F_{m-1,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\},$$

改写不等式, 得到关于 λ_0 的接受域:

$$\left\{(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \middle| \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \lambda_0 \leq \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right\},$$

因此,$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$

对于置信上限, 考虑关于 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的假设检验问题:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \lambda_0 \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0,$$

完全类似上述过程可得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信上限为 $\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\alpha)}$.

对于置信下限, 考虑关于 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的假设检验问题:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \lambda_0 \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0,$$

完全类似上述过程可得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}(\alpha)}$.

第 13 页作业 1

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), n \geq 4, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ 均未知, 分别求 μ 和 $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间.

解答 对于 μ, 其为单样本正态均值区间估计. 由于方差未知, 故构造枢轴变量:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

给定置信水平 $1-\alpha$, 由 t 分布的单峰对称性, 最短枢轴区间应取双侧尾概率相等, 即满足:

$$P\left(-t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha,$$

其中 $t_{n-1}(\alpha)$ 是自由度为 $n-1$ 的 t 分布的上 α 分位数. 改写不等式得到 μ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间:

$$\left[\bar{X} - t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

由于 t 分布密度关于 0 对称且单峰, 等尾区间即为最短枢轴区间.

对于 $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$, 其为单样本正态方差区间估计. 由于均值未知, 故构造枢轴变量:

$$\chi^2 = (n-1)S^2\eta \sim \chi^2_{n-1}.$$

给定 $1-\alpha$, 设区间形式为 $[\frac{b}{(n-1)S^2}, \frac{a}{(n-1)S^2}]$ 其中 $0 < a < b$ 满足

$$\mathbb{P}\left(a \le (n-1)S^2\eta \le b\right) = 1 - \alpha.$$

由卡方分布的单峰性, 最短枢轴区间当 $F_{\chi^2_{n-1}}(a) = F_{\chi^2_{n-1}}(b)$ 时取得, 这里 $F_{\chi^2_{n-1}}$ 是 χ^2_{n-1} 的分布函数.

第 13 页作业 2

设 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ 总体 X 的概率密度函数 $f(x;\lambda) = e^{-(x-\lambda)}, x > \lambda$, 参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 未知, 求 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间.

解答 考虑变换 $Y_i = X_i - \lambda$, 则 $Y_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(1)$. 此时 $G = X_{(1)} - \lambda = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\} \sim \text{Exp}(n)$ 为枢轴变量. 给定置信水平 $1-\alpha$, 由指数分布密度函数的单调性, 关于枢轴变量的最短枢轴区间一端应为 0, 即满足:

$$\mathbb{P}\left(0 \le X_{(1)} - \lambda \le c\right) = 1 - \alpha, \qquad \text{解得} c = \frac{\log \alpha}{n}.$$

改写不等式得到 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间为

$$\left[X_{(1)} + \frac{\log \alpha}{n}, X_{(1)}\right].$$

第二章 考试题讲解

2.1 2024 期末

2.1.1 24Final 1.

我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x|\theta) = \theta^{-1} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}, \quad x \geq \theta$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

(a) 该分布族是指数族吗？说明理由。

(b) 求出该分布族的一个充分统计量（$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 除外）。

(c) 给出参数的矩估计 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_L$。

解答 **(a)** 该分布族不是指数族。指数族分布要求支撑集不依赖于未知参数 θ。对于本题，支撑集为 $\{x \mid x \geq \theta\} = [\theta, +\infty)$。由于边界含有参数 θ，故不满足指数族的定义。

(b) 写出样本的似然函数：

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i - \theta}{\theta}} \mathbb{I}(x_i \geq \theta) = \theta^{-n} \exp\left(-\frac{\sum x_i}{\theta} + n\right) \mathbb{I}(x_{(1)} \geq \theta),$$

其中 $x_{(1)} = \min(x_1, \ldots, x_n)$。易于看出由因子分解定理，充分统计量为二维统计量：

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_{(1)}\right).$$

（似然函数可分解成这两部分的函数）

(c) 1. 矩估计 (MOM): 令 $Y = X - \theta$，则 $Y \sim \text{Exp}(\theta)$，故 $E[Y] = \theta$。

$$E[X] = E[Y + \theta] = E[Y] + \theta = 2\theta.$$

令样本均值等于总体矩 $\bar{X} = 2\hat{\theta}_M$，解得：

$$\hat{\theta}_M = \frac{\bar{X}}{2}.$$

2. 极大似然估计 (MLE): 对数似然函数（忽略常数项）：

$$l(\theta) = -n \ln \theta - \frac{\sum x_i}{\theta} + n, \quad \text{定义域: } 0 < \theta \leq x_{(1)}.$$

对 θ 求导：

$$\frac{dl}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}(\bar{x} - \theta).$$

由于通常情况下 $\bar{x} > x_{(1)}$，故在区间 $(0, x_{(1)}]$ 上导数恒大于 0，函数单调递增。因此最大值在边界处取得：

$$\hat{\theta}_L = X_{(1)}.$$

2.1.2 24Final 2.

一家工厂有一个机床，厂家声称该机床一小时至少能生产 20 件产品。为检验其声明是否合理，统计局随机抽样 25 个机床一小时生产的产品数量，得到件数的均值为 17，方差为 $S_X^2 = 36$。

(a) 设计一假设检验问题，来判断该厂家的声明是否合理。置信水平 0.90，需要带入具体数值。

(b) 根据 (a) 中得到的假设检验，求一个置信系数为 0.90 的置信上限，同样需要带入具体值。

解答 **(a)** 建立假设：我们希望检验厂家的声明是否可信。若数据显著表明产量不足，则认为声明不合理。

$$H_0 : \mu \geq 20 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu < 20$$

由于方差未知且样本量较小，使用单样本 t 检验统计量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{17 - 20}{\sqrt{36}/\sqrt{25}} = \frac{-3}{6/5} = -2.5.$$

置信水平 0.90 对应显著性水平 $\alpha = 0.10$。这是左侧检验，拒绝域为 $t < -t_{0.10}(24)$。查表得 $t_{0.10}(24) \approx 1.318$。因为 $-2.5 < -1.318$，落在拒绝域内。**结论：** 拒绝 H_0，认为厂家的声明不合理。

(b) 对应于左侧检验的置信上限 U 公式为（使得 $P(\mu \leq U) = 1 - \alpha$）：

$$U = \bar{x} + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

代入数值：

$$U = 17 + 1.318 \times 1.2 = 17 + 1.5816 \approx 18.58.$$

即 μ 的单侧置信区间为 $(-\infty, 18.58]$。

2.1.3 24Final 3.

我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x|\theta) = 2\theta^2 x^{-3}, \quad x > \theta$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

(a) 该分布族是否有充分完全统计量？说明理由。

(b) 统计量 $X_{(1)}$ 与 $\frac{X_{(n)}}{X_{(1)}}$ 独立吗？请说明理由。

解答 **(a)** 似然函数为：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta^2 x_i^{-3}\mathbb{I}(x_i > \theta) = 2^n\theta^{2n}\left(\prod x_i\right)^{-3}\mathbb{I}(x_{(1)} > \theta).$$

由因子分解定理，$X_{(1)}$ 是充分统计量。进一步分析：我们试图证明 $X_{(1)}$ 是完全的，仅需要证明：对于任意可测函数 g，如果 $E_\theta[g(X_{(1)})] = 0$ 对所有 $\theta > 0$ 恒成立，则 $g(X_{(1)}) = 0$ 几乎处处成立。首先求单个样本 X 的累积分布函数 (CDF)：

$$F_X(x) = \int_\theta^x 2\theta^2 t^{-3} dt = \left[-\theta^2 t^{-2}\right]_\theta^x = 1 - \theta^2 x^{-2}, \quad (x > \theta)$$

然后求最小值 $X_{(1)}$ 的 CDF：

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} > x) \\ &= 1 - [P(X > x)]^n \\ &= 1 - [\theta^2 x^{-2}]^n \\ &= 1 - \theta^{2n} x^{-2n}, \quad (x > \theta) \end{aligned}$$

对 x 求导得到 $X_{(1)}$ 的概率密度函数 (PDF)：

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx}(1 - \theta^{2n}x^{-2n}) = 2n\theta^{2n}x^{-(2n+1)}, \quad (x > \theta)$$

假设 $E_\theta[g(X_{(1)})] = 0$ 对任意 $\theta > 0$ 成立，即：

$$\int_\theta^\infty g(x) \cdot f_{X_{(1)}}(x)\, dx = 0$$

代入 PDF 表达式：

$$\int_\theta^\infty g(x) \cdot 2n\theta^{2n}x^{-(2n+1)}\, dx = 0$$

由于 $2n\theta^{2n} \neq 0$，我们可以将其移项消除（或者提到积分号外约掉）：

$$\theta^{2n} \int_\theta^\infty g(x)x^{-(2n+1)}\, dx = 0 \implies \int_\theta^\infty g(x)x^{-(2n+1)}\, dx = 0$$

这是一个关于积分下限 θ 的函数恒等于 0。为了找出 $g(x)$ 的性质，我们对参数 θ 求导（应用变限积分求导法则/微积分基本定理）：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_\theta^\infty g(x)x^{-(2n+1)}\, dx\right) = \frac{d}{d\theta}(0)$$

注意积分下限是 θ，根据求导公式 $\frac{d}{d\theta}\int_\theta^a f(x)dx = -f(\theta)$，我们得到：

$$-g(\theta)\cdot\theta^{-(2n+1)} = 0$$

因为 $\theta > 0$，项 $\theta^{-(2n+1)} \neq 0$，所以必须有：

$$g(\theta) = 0$$

这对所有的 θ 都成立。故 $X_{(1)}$ 完全，$X_{(1)}$ 就是我们找的充分完全统计量

(b) 独立。**证明：** 利用 Basu 定理。$T = X_{(1)}$ 是参数 θ 的充分完全统计量。令 $Z_i = X_i/\theta$，则 Z_i 的分布密度为 $f_Z(z) = 2z^{-3}, z > 1$，不含参数 θ。又因为统计量 $V = \frac{X_{(n)}}{X_{(1)}} = \frac{\theta Z_{(n)}}{\theta Z_{(1)}} = \frac{Z_{(n)}}{Z_{(1)}}$ 的分布仅依赖于 Z，与 θ 无关，因此 V 是辅助统计量。根据 Basu 定理，充分完全统计量与辅助统计量独立。

2.1.4 24Final 4.

我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

(a) 求 θ 的一个充分完全统计量。

(b) $\eta = \theta + \theta^2$ 有 UMVUE 吗？说明理由。

解答 (a) 将密度函数写为指数族形式：

$$f(x|\theta) = \exp\left(-\frac{1}{\theta}|x| - \ln(2\theta)\right)$$

联合密度：

$$f(\boldsymbol{x}|\theta) = \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n |x_i| - n\ln(2\theta)\right)$$

由此可知，$T = \sum_{i=1}^n |X_i|$ 是自然参数 $-\frac{1}{\theta}$ 的充分统计量。由于指数族在自然参数空间内包含开集，故 T 也是完全统计量。

(b) 有，由于存在充分完全统计量 T，根据 Lehmann-Scheffé 定理，我们只需找到 η 的一个无偏估计量 $\phi(T)$。

已知 $|X_i| \sim \text{Exp}(\theta)$，根据指数分布的可加性：

$$T = \sum_{i=1}^n |X_i| \sim \text{Gamma}(n, \theta)$$

其期望与方差为：$E[T] = n\theta, \quad Var(T) = n\theta^2$。由此得二阶矩：

$$E[T^2] = Var(T) + (E[T])^2 = n\theta^2 + n^2\theta^2 = n(n+1)\theta^2$$

构造无偏估计：

- 对于 θ：取 $\hat{\theta} = \frac{T}{n}$，则 $E[\hat{\theta}] = \theta$。
- 对于 θ^2：取 $\widehat{\theta^2} = \frac{T^2}{n(n+1)}$，则 $E[\widehat{\theta^2}] = \theta^2$。

综上，η 的 UMVUE 为：

$$\hat{\eta}_{UMVUE} = \frac{T}{n} + \frac{T^2}{n(n+1)}$$

2.1.5 24Final 5.

我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x|\theta) = 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}e^{-\theta x^2}, \quad x > 0$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。求假设检验：

$$H_0 : \theta \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta < 1$$

水平为 α 的似然比检验，并求出对应的功效函数。

解答

$$L(\theta) = 2^n \pi^{-n/2} \theta^{n/2} \exp\left(-\theta \sum x_i^2\right)$$

令 $W = \sum_{i=1}^n X_i^2$。对数似然 $\ln L \propto \frac{n}{2}\ln\theta - \theta W$。无约束 MLE 为 $\hat{\theta} = \frac{n}{2W}$。似然函数 $g(\theta) = \theta^{n/2}e^{-\theta W}$ 先增后减，峰值在 $\hat{\theta}$。

- 若 $\hat{\theta} \geq 1$ (支持 H_0)，则受限最大值在 $\hat{\theta}$ 处取得，$\lambda = 1$，不拒绝。
- 若 $\hat{\theta} < 1$ (支持 H_1)，则 H_0 区域内的最大值在边界 $\theta = 1$ 处取得。

似然比 $\lambda = \frac{L(1)}{L(\hat{\theta})}$。当 $\hat{\theta}$ 越小 (越远离 1) 时，λ 越小。这等价于当 $\hat{\theta} < k$ 时拒绝，即 $W > C$ 时拒绝 H_0。令 $Y = \sqrt{2\theta}X$，则 $Y^2 = 2\theta X^2 \sim \chi_1^2$。故统计量 $2\theta W \sim \chi_n^2$。

拒绝域： 在边界 $\theta = 1$ 处控制错误率 α：

$$P_{\theta=1}(W > C) = P(2(1)W > 2C) = \alpha \implies 2C = \chi_\alpha^2(n)$$

拒绝域为 $W > \frac{1}{2}\chi_\alpha^2(n)$（$\chi_\alpha^2(n)$ 为上分位点）。

功效函数 $\beta(\theta)$：

$$\beta(\theta) = P_\theta(W > C) = P_\theta\left(\frac{2\theta W}{2\theta} > C\right) = P\left(\frac{\chi_n^2}{2\theta} > \frac{\chi_\alpha^2(n)}{2}\right)$$

$$\beta(\theta) = P\left(\chi_n^2 > \theta \cdot \chi_\alpha^2(n)\right)$$

2.1.6 24Final 6.

我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

(a) 证明 $-\ln X \sim \text{Exp}(\theta)$。

(b) 求假设检验问题：

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta < \frac{1}{2}$$

水平为 α 的 UMPT。

(c) 反转 (b) 中得到的假设检验，给出一个置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解答 (a) 令 $Y=-\ln X$，则 $x=e^{-y}$，雅可比 $|J|=e^{-y}$。

$$f_Y(y)=f_X(e^{-y})|J|=\theta(e^{-y})^{\theta-1}\cdot e^{-y}=\theta e^{-\theta y},\quad y>0$$

此为参数为 θ 的指数分布

(b) 这是指数族分布，具有单调似然比 (MLR) 性质。充分统计量 $T=\sum_{i=1}^n(-\ln X_i)$。对于 $H_1:\theta<\theta_0$，由于 $E[Y]=1/\theta$ 单调递减，θ 越小，Y 越大，T 越大。因此 UMPT 的拒绝域形式为 $T>K$。

确定临界值：已知 $2\theta Y_i\sim\chi_2^2$，故 $2\theta T\sim\chi_{2n}^2$。在 $H_0(\theta=1/2)$ 下，$T\sim\chi_{2n}^2$。

拒绝域为：$T>\chi_\alpha^2(2n)$。

(c) 利用上面假设检验的拒绝域 $T>\chi_\alpha^2(2n)$。反解可得：

$$2\theta T\leq\chi_\alpha^2(2n)$$

解出 θ：

$$\theta\leq\frac{\chi_\alpha^2(2n)}{2T}$$

其中 $T=-\sum_{i=1}^n\ln X_i$。

2.2 2024 期中部分

2.2.1 第四题：

题目： 简单样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 抽取自如下离散分布族：

$$P_\theta(X=k)=\theta(1-\theta)^{k-1},\quad k=1,2,...$$

其中 $0<\theta<1$ 是未知参数，其有先验分布 $U(0,1)$。

1. 求后验分布 $\pi(\theta|x)$。
2. 求 θ 和 $\eta=\theta^2$ 的贝叶斯估计 $\hat{\theta}_B,\hat{\eta}_B$。

解答 **(1)**

样本的似然函数 $L(\theta)$ 为：

$$\begin{aligned}L(\theta)&=\prod_{i=1}^n(X_i=x_i)\\&=\prod_{i=1}^n\theta(1-\theta)^{x_i-1}\\&=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i-n}\end{aligned}$$

先验分布 $\pi(\theta)$ 为 $U(0,1)$，即 Beta$(1,1)$：

$$\pi(\theta)=1,\quad 0<\theta<1$$

根据贝叶斯公式，后验分布正比于似然乘以先验：

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x)&\propto L(\theta)\cdot\pi(\theta)\\&\propto\theta^n(1-\theta)^{\sum x_i-n}\cdot 1\\&\propto\theta^{(n+1)-1}(1-\theta)^{(\sum x_i-n+1)-1}\end{aligned}$$

这正是 Beta 分布的核。因此，后验分布为：

$$\theta|x\sim\text{Beta}\left(\alpha=n+1,\beta=\sum_{i=1}^n x_i-n+1\right)$$

(2)

在平方损失函数下，贝叶斯估计量为后验分布的期望。

对于 θ，利用 Beta 分布 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ 的期望公式 $E = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$：

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_B = [\theta|x] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\
&= \frac{n+1}{(n+1) + (\sum x_i - n + 1)} \\
&= \frac{n+1}{\sum_{i=1}^n x_i + 2}
\end{aligned}
$$

对于 $\eta = \theta^2$，即求后验分布的二阶原点矩 $E[\theta^2|x]$。利用 Beta 分布的二阶矩公式 $E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$：

$$
\hat{\eta}_B = E[\theta^2|x] = \frac{(n+1)(n+2)}{(\sum x_i + 2)(\sum x_i + 3)}
$$

2.2.2 第五题:

题目: 有如下指数分布族:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

其中 $\lambda > 0$ 为未知参数。

1. 计算 Fisher 信息量 $I(\lambda)$。
2. $g(\lambda) = \lambda^{-1}$ 无偏估计的方差下界存在吗? 若存在说明理由并算出该下界, 若不存在也请说明理由。
3. $g(\lambda)$ 的 UMVUE 是否存在? 若存在请求出, 并算出其效率。
4. 设 $\varphi(X) = I(X_1 > \tau)$ 而 $h(\lambda) = E_\lambda[\varphi(X)]$。求 $\varphi(X)$ 的效率。

解答 (1)

对数似然函数 (针对单个样本) 为:

$$\ln f(x|\lambda) = \ln \lambda - \lambda x$$

求一阶导数 (Score function):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

Fisher 信息量定义为:

$$I_1(\lambda) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x|\lambda)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{\lambda} - X\right)^2\right] = Var(X)$$

对于指数分布, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$。若基于样本量 n, 总 Fisher 信息量为:

$$I_n(\lambda) = nI_1(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}$$

(2)

存在。指数分布族满足正则条件。目标函数 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, 其导数为 $g'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$。Cramer-Rao Lower Bound 为:

$$\text{CRLB} = \frac{[g'(\lambda)]^2}{I_n(\lambda)} = \frac{(-\lambda^{-2})^2}{n\lambda^{-2}} = \frac{\lambda^{-4}}{n\lambda^{-2}} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

(3)

我们知道样本均值 $\bar{X}$ 是 $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。指数分布属于指数族, $\sum X_i$ 是充分完备统计量, 因此 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ 也是充分完备统计量的函数。根据 Lehmann-Scheffé 定理, $\hat{g} = \bar{X}$ 是 $g(\lambda) = \lambda^{-1}$ 的唯一最小方差无偏估计 (UMVUE)。

计算其方差:

$$Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{1/\lambda^2}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

效率 (Efficiency) 定义为 CRLB 与方差之比:

$$\text{Eff}(\bar{X}) = \frac{\text{CRLB}}{Var(\bar{X})} = \frac{\frac{1}{n\lambda^2}}{\frac{1}{n\lambda^2}} = 1$$

故 $\bar{X}$ 是有效估计量。

(4)

被估参数:

$$h(\lambda) = E[\varphi(X)] = P(X_1 > \tau) = \int_\tau^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda\tau}$$

估计量 $\varphi(X)$ 是伯努利变量, 其方差为:

$$Var(\varphi(X)) = h(\lambda)(1 - h(\lambda)) = e^{-\lambda\tau}(1 - e^{-\lambda\tau})$$

计算 $h(\lambda)$ 的 CRLB。由于 $\varphi(X)$ 仅依赖于 X_1 (样本量 $n = 1$ 的情况), 我们使用 $I_1(\lambda)$ 计算下界 (或者理解

为相对于该单一观测的效率）：

$$h'(\lambda) = -\tau e^{-\lambda\tau}$$

$$\text{CRLB} = \frac{[h'(\lambda)]^2}{I_1(\lambda)} = \frac{(-\tau e^{-\lambda\tau})^2}{1/\lambda^2} = \lambda^2\tau^2 e^{-2\lambda\tau}$$

效率为：

$$\text{Eff}(\varphi) = \frac{\lambda^2\tau^2 e^{-2\lambda\tau}}{e^{-\lambda\tau}(1-e^{-\lambda\tau})} = \frac{\lambda^2\tau^2 e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}$$

2.2.3 问题 6

题目： 我们有如下双参数的均匀分布族 $\{U(\theta_1,\theta_2) \mid \theta_1 < \theta_2\}$。

1. 求出 θ_1 和 θ_2 的一个充分完全统计量。
2. 求出 θ_1 和 θ_2 各自的 UMVUE。

解答 **(1)**

概率密度函数为：

$$f(x|\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, \quad \theta_1 \le x \le \theta_2$$

似然函数为：

$$L(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \cdot I(\theta_1 \le X_{(1)}) \cdot I(X_{(n)} \le \theta_2)$$

其中 $X_{(1)} = \min(X_i)$，$X_{(n)} = \max(X_i)$。根据因子分解定理，二维统计量 $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ 是 (θ_1,θ_2) 的充分统计量。下证其完全性。我们需要证明：对于任意可测函数 $g(u,v)$，若对所有的 $\theta_1 < \theta_2$ 都有 $E[g(X_{(1)}, X_{(n)})] = 0$，则 $g(X_{(1)}, X_{(n)}) = 0$ 几乎处处成立。对于 $U(\theta_1,\theta_2)$，次序统计量 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 的联合 PDF 为：

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(u,v) = \begin{cases} \frac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 < u < v < \theta_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

假设 $E[g(X_{(1)}, X_{(n)})] = 0$，即：

$$\iint_{\theta_1<u<v<\theta_2} g(u,v)\frac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{(\theta_2-\theta_1)^n}\,du\,dv = 0$$

由于 $\frac{n(n-1)}{(\theta_2-\theta_1)^n} \ne 0$，我们可以将其约去，得到核心积分方程：

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{\theta_1}^{v} g(u,v)(v-u)^{n-2}\,du\right]dv = 0$$

该方程对任意 $\theta_1 < \theta_2$ 恒成立。我们可以将积分看作关于上限 θ_2 和下限 θ_1 的函数。

对 θ_2 求导: 利用变限积分求导法则，对上式关于 θ_2 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{\theta_1}^{v} g(u,v)(v-u)^{n-2}\,du\right]dv\right) = 0$$

根据 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$，我们将被积函数中的 v 替换为 θ_2：

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(u,\theta_2)(\theta_2-u)^{n-2}\,du = 0$$

上式对任意 θ_1,θ_2 成立。

对 θ_1 求导: 现在我们对上式关于 θ_1 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(u,\theta_2)(\theta_2-u)^{n-2}\,du\right) = 0$$

根据 $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$，我们将被积函数中的 u 替换为 θ_1，并加负号：

$$-g(\theta_1,\theta_2)(\theta_2-\theta_1)^{n-2} = 0$$

由于 $\theta_1 < \theta_2$，项 $(\theta_2-\theta_1)^{n-2} \ne 0$。因此必须有：

$$g(\theta_1,\theta_2) = 0$$

这说明函数 g 在其定义域内几乎处处为 0。故 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 是充分且完全的

(2)

我们需要找到 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的线性组合，使其期望分别为 θ_1 和 θ_2。已知均匀分布次序统计量的期望为（将

X 视为 $\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1)U$，其中 $U \sim U(0,1)$）：

$$E[X_{(1)}] = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta_1 + \frac{1}{n+1}\theta_2$$

$$E[X_{(n)}] = \theta_1 + \frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\theta_1 + \frac{n}{n+1}\theta_2$$

我们解这个关于 θ_1, θ_2 的线性方程组。由第一个式子得：$(n+1)E[X_{(1)}] = n\theta_1 + \theta_2 \quad$ (A) 由第二个式子得：$(n+1)E[X_{(n)}] = \theta_1 + n\theta_2 \quad$ (B)

计算 $n \times (A) - (B)$ 消去 θ_2：

$$n(n+1)E[X_{(1)}] - (n+1)E[X_{(n)}] = n^2\theta_1 + n\theta_2 - \theta_1 - n\theta_2$$

$$(n+1)[nE[X_{(1)}] - E[X_{(n)}]] = (n^2 - 1)\theta_1$$

$$(n+1)[nE[X_{(1)}] - E[X_{(n)}]] = (n+1)(n-1)\theta_1$$

$$\theta_1 = E\left[\frac{nX_{(1)} - X_{(n)}}{n-1}\right]$$

同理，利用对称性或计算 $(A) - n \times (B)$ 可得 θ_2 的估计。

因此，θ_1 和 θ_2 的 UMVUE 分别为：

$$\hat{\theta}_1 = \frac{nX_{(1)} - X_{(n)}}{n-1}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{nX_{(n)} - X_{(1)}}{n-1}$$