中 国 科 学 技 术 大 学

2015 年秋季学期期末考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

2016 年 01 月 14 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 一个量子系统由两个可区分的自旋为 1/2 的粒子组成. 实验测得两个粒子的自旋角动量在 z 方向上的投影相反.

(a) 写下系统可能的量子态.

(b) 如果测量系统的总自旋在 z 方向上的分量 S_z, 那么得到的可能的值和相应几率是多少?

(c) 如果又测到粒子 1 自旋向上 (z 方向) 的几率是 0.4, 则粒子 2 自旋向上的几率是多少?

问题 2 设某一体系的 Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \lambda L^2 + \omega L_z$$

其中 m 为质量, ω 为频率, λ 为某一常量. 系统的动量为 $\boldsymbol{P}$, 并且 $P^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$. 位置向量算子记作 $\boldsymbol{R}$, 且 $R^2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R} = X^2 + Y^2 + Z^2$. $\boldsymbol{L}$ 为系统的轨道角动量, $L^2 = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}$, 轨道角动量在 z 方向上的分量记作 L_z.

(a) 请问在力学量 $H, P_x, P_y, P_z, P^2, L_x, L_y, L_z, L^2$ 以及宇称 Π 中, 哪些是守恒量?

(b) 试给出关于 $\boldsymbol{L}$ 的 Heisenberg 方程，并由此求 $\boldsymbol{L}$ 随时间变化的规律.

问题 3 考虑自旋为 1 的粒子, 即自旋角动量量子数为 $s = 1$. 实验中观测到它的三个分量的期望值是

$$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = 0, \quad \langle S_z \rangle = a\hbar$$

其中 $0 \leqslant a \leqslant 1$. 但是, 这些条件尚不足以确定该粒子的量子态. 针对纯态情形, 以及当 $a = 0$, $a = 1$ 两种情况, 写出符合测量上述测量结果的所有可能量子态的形式. 允许量子态有整体相位的差异.

问题 4 在量子操作的实验中, 有时候需要将两个粒子的量子态互换.

考虑两个两能级系统 A 和 B, 它们的状态分别是 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$. 量子态互换之后, A 的状态变为 $|\varphi\rangle$, B 的状态变为 $|\psi\rangle$.

- 写出该情形下量子态互换操作的矩阵形式.
- 如果我们可以在 A 和 B 之间建立二者的相互作用, 其形式是

$$H_{\text{int}} = g\hbar \boldsymbol{\sigma}^A \cdot \boldsymbol{\sigma}^B = g\hbar\big(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z\big)$$

  其中 g 是实常数, $\sigma_{x,y,z}$ 为 Pauli 矩阵. 如何利用这样的相互作用实现量子态的互换? 允许互换后的量子态有整体相因子的差别.

问题 5 考虑微观粒子在一维位置空间中的运动, 可以定义关联函数:

$$C(t) = \langle X(t)X(0)\rangle$$

这里, $X(t)$ 是 Heisenberg 绘景中 t 时刻的位置算子, $\langle\cdot\rangle$ 表示期望值. 对于一维谐振子的基态, 计算上述关联函数.

问题 6 一个质量为 m 的无自旋粒子被约束在 xOy 平面内运动, 它的 Hamilton 量是

$$H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2)$$

这也就是频率为 ω 的两维谐振子.

考虑微扰项

$$H' = \lambda\hbar\omega\left(\frac{L_z^2}{\hbar^2} - 2\right), \quad \lambda \ll 1$$

其中 L_z 是 z 方向上的轨道角动量. 计算微扰项 H' 对 H_0 的第二激发态的能级修正.