

中国科学技术大学 2023 年 1 月

2022 秋广义相对论期末考试

注意事项：

1. 本次考试为开卷考试，知识范围不局限于广义相对论；
2. 本文档根据评课社区回忆内容结合课程进行 AI 生成，并非真题，模型：Gemini 3；

解答题

2022 年，事件视界望远镜（EHT）发布了银河系中心黑洞 Sgr A* 的首张照片（如下图所示）。已知 Sgr A* 的质量约为 $M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$ ，距离地球约为 $D = 8\text{kpc}$ 。

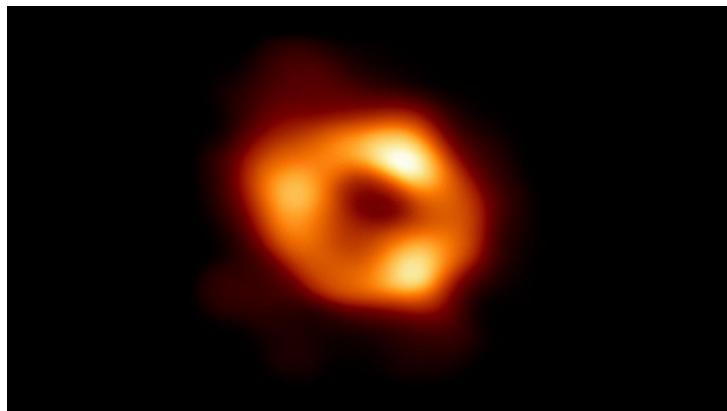


图 1：银河系中心超大质量黑洞 Sgr A* 的影像

请回答以下问题：

第一部分：史瓦西黑洞 (Schwarzschild Black Hole)

假设 Sgr A* 是一个不带自转的史瓦西黑洞.

- (1) 写出史瓦西黑洞的视界半径 (Schwarzschild Radius) R_s 的表达式 (用 G, M, c 表示) , 并估算其数值 (以太阳半径或天文单位为参考, 数量级正确即可) .
- (2) 即使黑洞不发光, 我们也能看到一个明亮的光环 (光子层) 包围着中心的暗区 (黑洞阴影) . 计算史瓦西黑洞的黑洞阴影 (Black Hole Shadow) 在无穷远处观测者眼中的视半径 b_{shadow} . (提示: 利用光子在有效势中的临界碰撞参数 $b_c = 3\sqrt{3}M$) .
- (3) 考虑引力红移效应. 若一个发射源静止在 $r = 4GM/c^2$ 处发射频率为 ν_e 的光子, 求无穷远处观测者接收到的频率 ν_∞ 与 ν_e 的比值.
- (4) 假设有物质通过吸积盘落入黑洞. 在史瓦西度规下, 最内稳定圆轨道 (ISCO) 位于 $r_{\text{ISCO}} = 6GM/c^2$. 若粒子从无穷远静止开始下落, 盘旋至 ISCO 处并将结合能全部释放, 计算该过程的质能转化效率 η . (已知 ISCO 处粒子的比能量为 $E/m = \sqrt{8/9}$) .

第二部分：克尔黑洞 (Kerr Black Hole)

实际上，天体通常具有角动量。现在假设 Sgr A* 是一个旋转的克尔黑洞，角动量为 J 。

- (5) 写出克尔黑洞事件视界半径 r_+ 的表达式（用 M 和单位质量角动量 $a = J/M$ 表示）。
- (6) 什么是极限克尔黑洞 (Extreme Kerr Black Hole)? 此时自转参量 a 满足什么条件? 其视界半径是多少?
- (7) 简述与史瓦西黑洞相比，快速旋转的克尔黑洞的阴影形状会发生什么定性的变化? (提示: 考虑参考系拖曳效应及多普勒效应导致的亮度不对称)。

第三部分：引力波辐射 (Gravitational Waves)

现在考虑一个理想化的模型：在 Sgr A* 黑洞（视为中心固定的大质量质点 M ）周围，有三个质量均为 m 的气体云团（视为质点，且 $m \ll M$ ）。这三个云团分布在一个等边三角形的三个顶点上，且该等边三角形的中心即为黑洞。系统在同一平面内绕黑洞作圆周运动，云团到黑洞的距离均为 R 。

- (8) 根据广义相对论，引力波辐射主要源于质量分布的四极矩变化。请解释：为什么一个轴对称的物体（如完美的球体或椭球体）绕其对称轴旋转时，**不会产生引力波辐射**？
- (9) 利用牛顿力学（或史瓦西度规的弱场近似），写出这三个云团绕黑洞运动的角速度 ω 。
(提示：需考虑中心黑洞的引力以及三个云团之间的互引力，若 $m \ll M$ ，可忽略云团间互引力做近似，或者列出完整表达式)。
- (10) 建立合适的坐标系（如令黑洞位于原点，云团在 xy 平面内）。写出该三质点系统的**质量四极矩张量** $Q_{ij} = \sum m(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$ 的表达式。
- (11) 根据四极辐射公式 $P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle$ ，计算该系统辐射的**引力波功率** P 以及引力波振幅。
(提示：利用三角函数求和性质： $\sum_{n=0}^2 \cos[2(\omega t + 2\pi n/3)] = ?$)

第四部分：总结与展望

- (12) 结合第一张黑洞照片 (EHT) 以及上述物理知识，简要谈谈你对“黑洞不仅是数学解，而是真实存在的物理实体”的理解。