

【答题中可能用到的数学关系:

- 积分表达式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(p)\zeta(p),$$

其中 $\Gamma(p)$ 是欧拉 Γ 函数, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ 是黎曼 ζ 函数。

- 半径为 R 的 d 维球面面积是 $S_d R^{d-1}$, 其中 S_d 是常数。】

一、一温度为 T 的固体里有 N 个无相互作用的原子核。每个原子核自旋为 1, 因此可以用自旋量子数 $m = -1, 0, 1$ 来标记其量子态。由于固体里的内建电磁场, 当原子核自旋为 $m = \pm 1$ 时能量为 ε , $m = 0$ 时能量为零。

1. 求单个原子核的配分函数。
2. 求该系统 (指该 N 个无相互作用的原子核构成的系统, 下同) 的内能以及内能涨落。
3. 求该系统的热容, 并写出低温和高温极限。
4. 请给出热容高、低温极限的物理解释。

二、 体积为 V 的容器里有 N 个相互作用很弱的原子。外磁场为 H 时, 单个原子的能量近似为 $\sigma\mu H + \mathbf{p}^2/(2m)$, 其中 \mathbf{p} , m 和 μ 分别是原子的动量, 质量和磁矩; $\sigma = \pm 1$ 是自旋量子数。

1. 温度为 T 时系统的熵。
2. 保持体积不变, 求把磁场绝热可逆地从 H 降为 0 后的系统温度 T_f 。
3. 求经过一次上述绝热去磁能够达到的最低温度。

三、在低温下少量 ^3He 原子可以溶解在液态 ^4He 里。当 ^3He 的粒子数密度 n 超过临界溶度 n_c 时会出现相分离，有一部分 ^3He 仍然溶于 ^4He 里，其它则析出形成液态 ^3He 。请利用如下简化模型解释这一现象： ^3He 原子是自旋为 $1/2$ 的费米子。当处于液态 ^3He 里时， ^3He 原子的单粒子能量可以近似为 $p^2/2m^*$ ，其中 m^* 和 p 分别是有效质量和动量；当溶于 ^4He 时， ^3He 原子的单粒子能量可以近似为 $V_0 + p^2/2m^*$ ，其中 $V_0 < 0$ 描述 ^3He 和 ^4He 之间的吸引作用。除 V_0 之外，不考虑其它相互作用，并假设温度为 0 K 。

1. 请根据 ^3He 原子在各个态上的分布解释 n 很小时 ^3He 原子完全溶于液态 ^4He 里这一现象，并求出此时的费米能 ε_F 。
2. 当 ε_F 大于零之后会出现相分离。请解释这一现象，并求出 n_c 。
3. 出现相分离后，请写出两相里 ^3He 原子密度之间的关系。

四、分子束外延生长中需要把样品置于高温炉中，生长过程可以当成是炉中气体原子在样品表面的吸附过程。温度为 T 的高温炉里有 A、B 两种气体原子，其原子质量分别是 m_A 和 m_B 。假设一样品表面有 N 个吸附位置，每个位置最多吸附一个原子。当一个位置吸附 A 或者 B 原子时能量分别为 $-\varepsilon_A$ 和 $-\varepsilon_B$ ，没有吸附原子时能量为零。

1. 假设高温炉中 A、B 两种气体的化学势分别是 μ_A 和 μ_B ，求样品表面的巨正则配分函数。
2. 求表面吸附的 A 和 B 原子的个数。
3. 假设炉中的气体可以当成无相互作用的经典粒子，请确定 A、B 气体分压 p_A 、 p_B 和化学势 μ_A 、 μ_B 之间的关系。
4. 如果要在表面形成稳定的化合物 AB_2 ，不考虑化合物的形成能，这两种气体分压需要满足什么条件？

五、磁学系统的低能激发可以用磁振子描述。磁振子是自旋为零的玻色子，其粒子数不守恒。动量为 \mathbf{p} 的磁振子能量 $\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|^s$ ，其中 c 和 s 为常数，由磁有序类型决定。已知体系温度为 T ，不考虑磁振子间的相互作用。

1. 求单位“体积”的 d 维材料里磁振子的单粒子态密度 $\Omega(\varepsilon)$ 。
2. 求单位“体积”的磁振子的平均粒子数。
3. 求单位“体积”的磁振子的平均能量。
4. 求单位“体积”的磁振子的热容。