

## 2025 秋时间和空间期末考试

注意事项：

1. 本次考试为半开卷考试，仅允许携带讲义、作业与笔记；

### 解答题

1. 在参考系  $S$  中，一个质量为  $m$  的粒子从  $x = 0$  处以速度  $v$  ( $0 < v < 1$ ) 沿长为  $L$  的杆向  $+x$  运动。

(1) 求在粒子参考系中杆的长度；

(2) 粒子在运动过程中与一个静止的、质量远大于粒子的“小车”相撞，碰撞后粒子以速度  $u$  向  $-x$  方向飞回，小车因质量  $M \gg m$  而获得一个很小的速度  $w$  向  $+x$  方向运动。碰撞过程四动量守恒，可以视为完全弹性碰撞，小车速度  $w \ll 1$ 。

求证：粒子损失的能量等于小车获得的动能 ( $\approx \frac{1}{2}Mw^2$ )。

(3) 在以下两个方案中，分别写出花费的固有时与  $L, u, v$  之间的关系，并比较哪个方案花费的固有时更短：

- 方案 A：粒子以速度  $v$  沿杆运动到达杆的另一端。 $x = L$  后，立即以速度  $v$  对称飞回  $x = 0$ ；
- 方案 B：粒子在  $L$  与小车碰撞后，以速度  $u$  飞回  $x = 0$ 。

2. 考虑如下时空中的引力红移效应. 时空度规的线元由下式给出:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\alpha GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

假设有两个标准光源  $G_1$  和  $G_2$ , 分别位于径向坐标  $r_1$  和  $r_2$  处. 位于  $G_1$  信号在  $r_2$  处被接收, 频率为  $f_1$ ,  $G_2$  的频率为  $f_2$ , 求  $\frac{f_1}{f_2}$ .

3. 对于半径为  $R$  的球面：

- (1) 写出球面的度规；
- (2) 利用非欧几何的面积公式计算球的表面积；
- (3) 证明球面的大圆是测地线，即满足测地线方程.

4. 宇宙的年龄为  $t_0$ , 若宇宙是一个静止的、平直的宇宙, 则我们能接收到的最近的信息构成一个半径为  $ct_0$  的球面. 现在考虑膨胀的宇宙:

- (1) 在 Robertson-Walker 度规中,  $t = 0$  时刻从  $r = r_h$  处发出的光子在  $t = t_0$  时刻到达观察者位置  $r = 0$ , 求  $r_h$ ; (用尺度因子  $a$  与  $t_0$  表示)
- (2) 求物理距离  $R_h$  与  $r_h$  之间的关系;
- (3) 若宇宙是中只包含压强为零的物质, 求  $R_h$ . (用  $t_0$  与光速  $c$  表示)