

中国科学技术大学
****-****学年第一学期 期中测试卷

课程名称: 理论力学 A
开课院系: 物理学院
姓名: _____

课程代码: _____
考试形式: 闭 卷
学 号: _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

答题要求:

考试时间为两小时, 以教室的挂钟为准。

请把解答书写在试卷留空处。若正面空间不够, 可以在试卷背面继续作答。

不交草稿纸。

一、 设在阳光暴晒下, 马路上方空气折射率随高度 y 的变化规律为

$$n(y) = n_0(1 + Ay), \quad A = 0.8 \times 10^{-6} \text{m}^{-1}$$

一人站在马路上向前看, 最远能看到水平距离多大的地面? 设此人眼睛离地面高度为 1.6m, 利用费马原理求此距离。

二、 质量为 m 、摆长为 l 的两个单摆, 悬挂在同一水平线上 (x -轴) 相距 d 的两个固定点。两个摆锤带有等量电荷 Q 。

取垂直向下为 y -轴, 摆锤被限制在 xy -平面内运动。求系统在微振动时的自然频率和模态矩阵。

三、 带点粒子在静电场、静磁场中运动，拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\varphi(\vec{r}) + q\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

其中势函数是齐次函数，

$$\varphi(\lambda\vec{r}) \equiv \lambda^a \varphi(\vec{r}), \quad \vec{A}(\lambda\vec{r}) \equiv \lambda^b \vec{A}(\vec{r})$$

(1) 还需满足什么条件，尺度变换

$$t' = \lambda^2 t, \quad \vec{r}'(t') = \lambda \vec{r}(t)$$

才是准对称变换？

(2) 当势函数满足 (1) 中的条件时，求诺特守恒量。

四、 已知一个物理系统的广义坐标为

$$q_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

拉格朗日函数为 $L(t, q, \dot{q})$ 。

如果把时间 t 也看作广义坐标，

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} t$$

为了描述系统的演化过程，引进形式参数 τ 。现在有 $n+1$ 个广义坐标，

$$q_\mu = q_\mu(\tau), \quad \mu = 0, 1, \dots, n.$$

在这种描述下：

- (1) 求拉格朗日函数 $\Lambda(\tau, q, \frac{dq}{d\tau})$ 。
- (2) 写出拉格朗日方程。
- (3) 求广义能量积分。

五、长度为 l 、密度为 ρ 的均匀无弹性鞭子，在直角坐标系中，任意时刻 t 时的形状为

$$\vec{r} = \vec{r}(t, s)$$

其中 $s \in [0, l]$ 为弧长参数。

鞭子的一端被握在手中强迫运动，

$$\vec{r}(t, 0) = \vec{a}(t)$$

其中 $\vec{a}(t)$ 为已知函数。

利用哈密顿原理，求鞭子的运动方程和自然边界条件。