

中国科学技术大学 2023 年 1 月

2022 秋时间和空间期末考试

注意事项：

1. 本次考试为半开卷考试，仅允许携带讲义、作业与笔记；
2. 本文档根据评课社区回忆内容结合课程进行 AI 生成，并非真题，模型：Gemini 3.

解答题

1. 在相对论与宇宙学中，光谱的频移（红移或蓝移）是探索宇宙的重要工具。请分别阐述以下三种红移产生的物理机制，并写出其近似公式或定义式：
 - (1) 多普勒红移 (Doppler Redshift)
 - (2) 引力红移 (Gravitational Redshift)
 - (3) 宇宙学红移 (Cosmological Redshift)

2. 黎曼几何是广义相对论的数学语言。判断一个空间是否弯曲，关键在于计算黎曼曲率张量。
考虑一个一维流形 (1D Manifold)，其线元由下式给出：

$$ds^2 = g_{11}(x)dx^2$$

其中 x 为流形上的唯一坐标， $g_{11}(x)$ 为 x 的任意平滑正函数。

- (1) 写出黎曼曲率张量 $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 关于指标交换的对称性质（至少写出关于后两个指标的交换性质）。(10 分)
- (2) 利用上述对称性证明：任何一维流形都是平坦的（即其黎曼曲率张量分量恒为零）。(20 分)

3. 假设宇宙是平坦的 ($k = 0$) 且宇宙学常数 $\Lambda = 0$ 。此时，描述宇宙动力学的弗里德曼方程 (Friedmann Equation) 为：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

其中 $a(t)$ 为标度因子， ρ 为能量密度。请针对以下两种宇宙模型进行计算：

- 模型 A (辐射主导)：物态方程 $P = \frac{1}{3}\rho c^2$ ，能量密度演化满足 $\rho \propto a^{-4}$ 。

- 模型 B (物质主导)：物态方程 $P \approx 0$ ，能量密度演化满足 $\rho \propto a^{-3}$ 。

(1) 分别求解上述两个模型中，标度因子 $a(t)$ 随时间 t 的幂律关系 (即求出 $a(t) \propto t^q$ 中的指数 q)。(20 分)

(2) 定义哈勃常数 $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}|_{t=t_0}$ 。分别计算两个模型中，宇宙当前的年龄 t_0 与哈勃时间 $1/H_0$ 的数值关系。(20 分)