

中国科学技术大学

2017 年秋季学期期末考试试卷

考试科目: 量子力学

得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

2018 年 01 月 16 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 某个量子系统的哈密顿量可以表示为

$$H = Aa^\dagger a + B(a^\dagger + a)$$

其中 A 和 B 为实常数, a 和 a^\dagger 分别是关于哈密顿量本征态的降算子和升算子, 与谐振子情形类似. 求出该系统的能量本征值.

问题 2 氢原子的基态 $|100\rangle$ ($n=1, \ell=0, m=0$) 是轨道角动量的 z 分量 L_z 的一个本征态.

- (1) 证明该量子态也是 L_x 和 L_y 的本征态.
- (2) 直接写出涉及不确定度 ΔL_x 和 ΔL_y 的乘积的不等式 (无须证明), 并论证上面的结论与这个不等式并不矛盾, 尽管角动量算符 L_x 和 L_y 彼此并不对易.
- (3) 阐述两个可观测量的互易性与它们拥有共同本征函数的可能性之间的关系 (无须证明). 然后说明 (1) 中的结论与此并不矛盾.

问题 3 考虑自旋为零的粒子在位置空间中的运动. 设粒子波函数的角度部分为

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{56\pi}} \left[1 + 2\sqrt{3}\cos\theta + \frac{3}{2}\sqrt{5}(3\cos^2\theta - 1) \right]$$

- (1) 如果测量系统的角动量, 那么可能的测量值以及相应的几率分别是多少?
- (2) 如果测量角动量的 z 分量, 那么可能的测量值以及相应的几率分别是多少?
- (3) 在此状态下 L_z 和 L^2 的期望值是多少?

问题 4 处于某一均匀但非恒定磁场中的中子, 哈密顿量为

$$H(t) = \hbar\omega_z + \hbar\Omega \sin(\lambda t)\sigma_x$$

其中 ω, Ω 和 λ 是具有相同量纲的实常数, 并且满足 $\omega \gg \Omega \gg \lambda$.

设在初始时刻 $t = 0$ 时, 中子的自旋角动量沿 $+z$ 方向, 给出以后 $t = T > 0$ 时刻中子量子态的近似形式, 并求出该时刻中子自旋沿 $-z$ 方向的几率.

问题 5 根据夸克理论, 介子是正反夸克的束缚体系. 自由夸克始终没有在实验上发现过, 这就是夸克禁闭. 在了解强相互作用理论和强子有关数据以前, 我们希望根据已有的量子力学知识尝试给出关于介子的初步知识 (尽管这与实际可能出入很大), 为此考虑这一简化模型: 一个静质量为 m , 自旋为零的中性粒子在无限高球方势阱中运动, 势阱半径为 a , 在位置表象中, 体系的哈密顿算符定义为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}(\nabla^2)^2$$

其中势能

$$V(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

- (1) 暂且忽略哈密顿量中与光速 c 有关的第三项 (这一项称为相对论修正), 确定体系基态角动量量子数, 说明理由.
- (2) 在忽略相对论修正的情形下计算体系基态波函数和相应的能量.
- (3) 计入哈密顿算符中的相对论修正并将其视为微扰, 计算基态能量的一阶修正.

问题 6 一维运动的 Hamilton 量为 $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$. 将 H 的本征态记作 $|\varphi_n\rangle$, 即 $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$.

- (1) 证明如下关系:

$$\langle\varphi_n|P|\varphi_{n'}\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle,$$

其中 α 是某个依赖于能级差 $E_{n'} - E_n$ 的数. 求出 α .

- (2) 进一步证明如下结果:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 |\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} |\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle|.$$