

中国科学技术大学 2026 年 1 月 21 日 14:00 - 16:20

2025 秋宇宙大尺度结构期末考试

注意事项：

1. 本次考试为开卷考试.

解答题

1. 写出暗能量存在的观测证据，至少三个 (6 分).

2. 由于巡天几何的复杂性，我们常常用下面方法计算星系的两点关联函数 $\xi(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1$ ，

其中 $DD(r)\Delta(r)$ 是距离在 $r - \frac{1}{2}\Delta r$ 和 $r + \frac{1}{2}\Delta r$ 之间的真实观测到的星系对数目，而 $RR(r)\Delta r$ 是其中随机样本的星系数目. 请在写出至少两种两点关联函数的计算方法 (4 分)，并说明我们如何处理星系巡天中的观测效应 (4 分).

3. 我们利用流体力学中的连续性方程、欧拉方程和泊松方程，可以描述物质成分扰动的演化。已知某成分满足 $P = w\rho$ (光速 $c = 1$, w 为常数)，我们知道其扰动演化可以写为：

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}(1+w)(1+3w)\delta + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla\Phi.$$

其中 δ 是密度扰动, a 是尺度因子, G 是引力常数, $\bar{\rho}$ 是平均密度, $c_s = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ 是声速, Φ 是引力势. 请计算在足够大尺度下扰动的演化. (10 分, 提示: $\rho a^{3(1+w)}$ 是常数, 考虑 Einstein de-Sitter 宇宙.)

4. Coma 星系团是一个典型的星系团，我们将其视为一个暗物质晕，其质量和半径分别为 M_{200m} 和 R_{200m} . 请根据球塌缩模型，证明 Coma 星系团的平均密度为宇宙平均密度的 200 倍 (10 分)，并利用线性理论，计算 Coma 星系团外附近区域的速度场分布 (10 分).

5. 已知扰动的傅立叶变换可以写为:

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x.$$

对于 A 和 B 两种星系, 我们可以计算他们的两点关联函数 $\xi_{AB}(r) = \langle \delta_A(\mathbf{x}) \delta_B(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ 和功率谱 $P_{AB}(k) = \frac{1}{V} \langle \delta_A(\mathbf{k}) \delta_B(-\mathbf{k}) \rangle$. 请证明 $\xi_{AB}(r)$ 和功率谱 $P_{AB}(k)$ 之间的关系 (10 分).

6. PS 理论可以很好的描述暗物质晕的质量 Cloud in Cloud 问题, 请从轨迹理论出发, 描述我们是如何解决这个两倍因子问题的 (10 分).

7. 已知某中粒子的物理的 (proper) 数密度随红移的演化为 $n(z) = n_0(1+z)^3$. 若该粒子平均截面为 σ , 请证明从视线方向观测该粒子在单位红移内的平均数量满足:

$$\frac{d\mathcal{N}}{dz} = n_0 \sigma \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)^2}{E(z)}.$$

其中 $E(z) = [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$ (10 分).

8. 纤维 (filament) 是宇宙中的高密度区域, 会吸引周围的气体掉入纤维中, 气体通过激波加热纤维到温度 T . 设垂直于纤维方向的潮汐力的特征值为 λ , 证明 $T \propto \lambda^2$ (8 分).
9. 假如我们观测了一个天区内的速度场, 在已知宇宙学的情况下, 请描述我们可以用什么方法来重构密度场 (10 分), 并写出这个过程可能会遇到哪些问题且尝试给出解决方案 (10 分).