

中 国 科 学 技 术 大 学
2018 年秋季学期期中考试试卷

考试科目: 量子力学 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

2018 年 11 月 14 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 设 \mathbb{C}^n 空间上的酉变换可以表示为 $U = A + iB$, 其中 A 和 B 是厄密矩阵.

1. 证明 $A^2 + B^2 = \mathbb{1}$, 并且 $[A, B] = 0$.
2. 酉变换又可以写为 $U = e^{iH}$, 其中 H 是厄密矩阵. 分析 H 和 A, B 之间的联系.

问题 2 考虑 \mathbb{C}^n 中的纯态 $|\psi\rangle$. 在力学量 A 的表象中, $|\psi\rangle$ 可以表示为

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |\alpha_j\rangle, \quad c_j = \langle \alpha_j | \psi \rangle, \quad \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = 1$$

其中 $|\alpha_j\rangle$ 是 A 的本征态, 相应的本征值为 a_j .

现在希望通过实验观测确定 $|\psi\rangle$ 的具体形式, 即各个系数 c_j . 由于 $c_j = |c_j|e^{i\phi_j}$, 因此有待确定的实参数有 $2n$ 个. 但是, 考虑归一化条件, 并且允许整体相位上的差异, 就只需要确定 $2n - 2$ 个实参数. 其中 $|c_j|$ 容易得到, 因为

$$|c_j|^2 = \text{测量结果为 } a_j \text{ 的几率}$$

而几率需要无穷多个样本才能体现, 所以, 暂且假设有无穷多个处于相同状态 $|\psi\rangle$ 的量子系统.

显然, 测量力学量 A 无法得到各个幅角 ϕ_j 的值, 于是考虑另外一个力学量 B , 当然, A 和 B 是不对易的.

说明如何通过对 A 和 B 的测量确定未知的量子态 $|\psi\rangle$.

问题 3 在上题中, 假设可以有无穷多个处于相同状态的量子系统, 从操作意义上说, 相当于可以对未知量子态进行克隆. 为了进行量子态的克隆, 需要两个量子系统. 第一个, 记作 A 系统, 承载着我们希望克隆的量子态 $|\psi\rangle$, 它的形式是未知的. 第二个, 记作 B 系统. 我们可以将它的初态制备成某个 $|\varphi\rangle$. 假设描述 A 系统的 Hilbert 空间 \mathcal{H}^A 和描述 B 系统的 Hilbert 空间 \mathcal{H}^B 的维数相同, 它们是同构的.

量子克隆过程应该满足这样的要求: 对于 A 系统任意的 $|\psi\rangle$ 和 B 系统的初态 $|\varphi\rangle$, 有

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \xrightarrow{U} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

其中 U 是 $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ 上的酉变换.

根据变换的线性性, 证明不可能存在上述过程.

问题 4 考虑两个双值量子系统 A 和 B 构成的两体系统, 描述它们 Hilbert 空间分别是 $\mathcal{H}^A = \mathbb{C}^2$ 和 $\mathcal{H}^B = \mathbb{C}^2$. 在 $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ 空间中, 可以把两体量子纯态表示为

$$|\Psi\rangle = \cos \alpha |00\rangle + \sin \alpha |11\rangle$$

相应的密度矩阵记作 $\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. 考虑 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 的情形.

1. 说明部分转置后的结果 Ψ^{T_A} 不是真正的量子态.
2. 对 A 系统测量 σ_x , 并且对测量结果不作选择. 写出测量后的量子态 ρ .
3. 对 ρ 作部分转置 T_A , 其结果 ρ^{T_A} 符合密度矩阵的要求吗?

问题 5 量子态 ρ 的 von Neumann 熵定义为

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i$$

其中 λ_i 是 ρ 的本征值.

1. 对处于量子态 ρ 的量子系统测量力学量 A , 对测量结果不作选择, 测量后的量子态记作 ρ' . 给出熵 $S(\rho')$ 的表达式, 比较 $S(\rho)$ 和 $S(\rho')$ 的大小.
2. 举一个例子说明, 在量子态的一般演化过程中, $\rho \rightarrow \rho'$, 熵可以减小, 即 $S(\rho) > S(\rho')$.

问题 6 两个自旋为 $1/2$ 的粒子 A 和 B 组成两体量子系统. 在空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 中两体系统的初态是

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

让两体系统在如下哈密顿量的支配下随时间演化,

$$H = \frac{\hbar\omega_1}{2} \sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_2}{2} \sigma_z^B$$

1. 写出 t 时刻两体系统的量子态 $|\Psi(t)\rangle$.
2. 计算在 t 时刻的期望值 $\langle \sigma^A \rangle$ 和 $\langle \sigma^B \rangle$.