

中国科学技术大学 2025 秋

## 量子力学B 易为班 期末考试

### 注意事项:

1. 本试卷为基于评课社区用户上传的手写回忆版排版而成的，对解答题的排版进行了一定的调整。

1. 第二主族原子  $^{137}\text{Yb}$ , 其核自旋为  $I = \frac{5}{2}$ 。

- (1) 写出其基态  $(5_s)^2$  及第一激发态  $(5_s 5_p)$  所有可能的跃迁项  $(^{2S+1}L_J)$ 。
- (2) 考虑超精细结构，写出其第一激发态在零磁场下的各简并子空间维度。

2. 已知对一个自由电子的  $z$  分量进行测量，结果为  $\pm\hbar$ 。

- (1) 加接一个测量自旋的  $y$  分量，可能得到的结果及概率分布如何？
- (2) 如果上一问测量自旋的方向和  $z$  轴成  $\theta$  角，可能的测量值及分布如何？

3. 两个自旋  $1/2$  的电子，处于一维谐振子基态和第一激发态上，同时考虑空间和自旋态。按总自旋分类，写出该两电子体系所有可能的量子态（记谐振子基态和第一激发态为  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ ）。

4. 考虑 2 个自旋  $1/2$  的电子，定义算符

$$\hat{P}_{12} = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2),$$

其中  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$  是泡利矩阵， $\hat{P}_{12}$  的下标表示作用在第几个电子上。

- (1) 利用总自旋算符  $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$  表示  $\hat{P}_{12}$ ，并求  $\hat{P}_{12}$  的本征值和本征态。
- (2) 计算  $\hat{P}_1|\uparrow\downarrow\rangle$  和  $\hat{P}_2|\uparrow\uparrow\rangle$ ，其中  $|\uparrow\downarrow\rangle$  表示第一个电子处于  $z$  方向自旋上态，第二个电子处于  $z$  方向自旋下态。 $|\uparrow\uparrow\rangle$  含义类似。

5. 请推导并写出轨道角动量算符  $\hat{\mathbf{L}}$  在  $l = 2$  子空间内的矩阵表示，取力学量完备集为  $\{\hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ 。

6. 考虑一个轨道角动量  $L = 1$  与自旋  $1/2$  的耦合体系。设其哈密顿量为

$$\hat{H} = A\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + BL_x\vec{S}_x,$$

其中  $B \ll A$  (假设  $A, B$  均为正实数)。

- (1) 利用微扰论求体系在  $J = \frac{1}{2}$  小空间内各级能量，并精确到  $B$  的一阶小量。
- (2) 写出并计算对  $|J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle$  态的能量二阶修正有贡献的矩阵元 (不需计算能量修正本身)。

已知：

$$|J = \frac{3}{2}, m_J\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J + \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J - \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2}\rangle$$

$$|J = \frac{1}{2}, m_J\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J + \frac{1}{2}, m_S = -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J - \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2}\rangle$$

其中  $m_J$ 、 $m_L$  和  $m_S$  分别为  $\hat{J}_z$ 、 $\hat{L}_z$  和  $\hat{S}_z$  的量子数。总角动量定义为：

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

7. 一个自旋  $1/2$  的粒子处于沿  $z$  方向的磁场中，磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的。忽略质心运动自由度后的哈密顿量在合适的单位下可写作

$$\hat{H} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{z},$$

- (1) 若存在一个小的扰动磁场  $\mathbf{B}' = B_1 \hat{e}_x$ ，其中  $B_1 \ll B_0$ ，求系统基态的移动，并精确到  $B_1$  的最低阶修正。
- (2) 如果系统于零时刻处于  $z$  方向自旋下态，利用一阶含时微扰论，求此后  $t$  时刻系统跃迁到  $z$  方向自旋上态的概率 (写出积分表达式即可)。
- (3) 上一问的时间演化中，系统能否在某时刻处于自旋上态？为什么？