2022 春热学 A 期末考试试卷

2022 年 6 月

一.(10 分) 写出以下物理量的数量级.

常温下微观分子的平均热运动能是 ___eV，凝聚态物质中分子之间的相互作用能在 ___ 至 ___eV 范围，作用力大小约在 ___pN 左右，而分子所受重力是 ___pN. 与这些微观量相对应，宏观液体的表面张力系数约 ___N/m，水和液态铁的化热分别为约 ___kJ/mol 和 ___kJ/mol，这两个汽化热中体积膨胀部分的占比分别是 ___ 分之几和 ___ 分之几.(最后两空选十百千三字之一填入)

解：$10^{-2}\,\mathrm{eV}$,$1\,\mathrm{eV}-10^{-1}\,\mathrm{eV}$,$10^{1}\,\mathrm{pN}$,$10^{-12}\,\mathrm{pN}$,$10^{-2}\,\mathrm{N/m}$,$10^{1}\,\mathrm{kJ/mol}$,$10^{2}\,\mathrm{kJ/mol}$, 十, 十.

二.(14 分) 容器 A 的容积为 $V_A = 250\,\mathrm{cm}^3$，里面贮有空气，压强为 $p_A = 400\,\mathrm{mmHg}$，温度为 $t_A = 100\,°\mathrm{C}$. 容器 B 的容积为 $V_B = 400\,\mathrm{cm}^3$，里面的空气压强为 $p_B = 150\,\mathrm{mmHg}$，温度为 $t_B = -20\,°\mathrm{C}$.A、B 之间由带活塞的细管相连. 问当连通 A、B 之间的活塞打开后，两容器中空气的平衡压强和温度各是多少?

解：两部分按理想气体处理，则摩尔数分别是

$$\gamma_A = \frac{p_A V_A}{RT_A}, \gamma_b = \frac{p_B V_B}{RT_B}.$$

容器、细管都视为刚性绝热的，则平衡前后总内能不变，即

$$\Delta U = \gamma_A c_V (T - T_A) + \gamma_B c_V (T - T_B)$$

将两摩尔数代入后可解得

$$T = \frac{p_A V_A + p_B V_B}{\frac{p_A V_A}{T_A} + \frac{p_B V_B}{T_B}}$$

再根据混合气体平衡态的理想气体方程

$$p(V_A + V_B) = (\gamma_A + \gamma_B) RT$$

求得

$$p = \frac{p_A V_A + p_B V_B}{V_A + V_B}$$

代入数值后的计算结果是 $p = 246\,\mathrm{mmHg}$ 和 $T = 317\,\mathrm{K}$ 即 $44\,°\mathrm{C}$.

三.(10 分) 已知某 PV 系统的内能为 $U = AP^2V$，式中 A 为常数.

(1) 试求该系统在 $P-V$ 图上绝热过程的曲线方程；

(2) 若该系统等温压缩系数 $\kappa_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T$ 为已知，试求该系统在 $P-V$ 图上等温过程曲线的斜率.

解：由系统内能 $U = AP^2V$，微分可得 $U = AP^2\,\mathrm{d}V + 2APV\,\mathrm{d}P$

对于绝热过程，由热一律有

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V = P(1+AP)\,\mathrm{d}V + 2APV\,\mathrm{d}P = 0.$$

变换后

$$\frac{\mathrm{d}P}{AP+1} = -\frac{\mathrm{d}V}{2AV}$$

积分可知

$$(P+\frac{1}{A})V^{1/2} = const.$$

对于等温过程，其过程曲线在 $P-V$ 图上的斜率

$$(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V})_{isothermal} = (\frac{\partial P}{\partial V})_T = -\frac{1}{\kappa_T V}$$

四.(12 分)0.1 mole 氦气和 0.2 mole 氮气 (视其为刚性双原子分子) 的混合理想气体，初始平衡温度 $T_0 = 300\,\mathrm{K}$，体积 $V_0 = 4\,\mathrm{L}$. 将其准静态绝热压缩至终了体积 $V_f = 2\,\mathrm{L}$. 求系统的终了平衡温度 T 和两部分气体各自的熵变，为何其中之一呈现“异常”的熵变?

解：这里混合气体的比热比不同，无法利用准静态绝热过程方程.

现立足于整个系统在该过程中的总熵变为零，$\Delta S = 0$.

其中两部分气体的熵变各是

$$\Delta S_{He} = \gamma_{He} c_{vHe} \ln\frac{T_f}{T_0} + \gamma_{He} R \ln\frac{V_f}{V_0}$$

和

$$\Delta S_N = \gamma_N c_{vN} \ln\frac{T_f}{T_0} + \gamma_N R \ln\frac{V_f}{V_0}$$

总熵变为零可改为

$$\frac{3}{2}\ln\frac{T_f}{T_0} + \ln\frac{V_f}{V_0} + 2\times\frac{5}{2}\ln\frac{T_f}{T_0} + 2\ln\frac{V_f}{V_0} = 0$$

即

$$(\frac{T_f}{T_0})^{\frac{13}{2}}(\frac{V_f}{V_0})^3 = 1$$

解得 $T = 413\,\mathrm{K}$.

两部分熵变 $\Delta S_{He} = -0.021R$，$\Delta S_N = 0.021R$.

其中氦气部分的熵值减小. 这是因为氮气分子的自由度更大，热运动速度 (动能) 的分布更宽，在升温相同的情况下其熵增会更大. 本例情况下，由于总熵变为零，只能是氮气熵增氦气熵减.

五.(12 分)1.5 匹功率 P 的空调机在冬季给约 10 平方米的房屋作热泵供暖. 室内温度设定在 T_i($\sim 27\,^\circ\mathrm{C}$ 即 $300\,\mathrm{K}$ 左右)，室外温度是 T，这时室内向室外单位时间漏热量是 $\alpha(T_i - T)$.

(1) 求当室外温度 T 低至何值时，空调功率全开也无法维持室温 T_i? 用 P、T_i 和 α 表示；

(2) 由热传导傅里叶定律写出 α 与墙壁热导率的关系，可自行添加相关参量；

(3) 根据热导率的微观理论公式，估算墙壁热导率的数量级；

(4) 再由对墙壁面积、厚度等的日常经验值估算最低室外温度的数值.

解：这是房间供、漏热相等的恒流问题

(1) 供热方面：制冷系数

$$\varepsilon = \frac{T}{T_i - T}$$

单位时间供热量是

$$(1+\varepsilon)P = \frac{T_i}{T_i - T}P$$

单位时间漏热量是 $\alpha(T_i - T)$，正常采暖要求供热不小于漏热，即

$$\frac{T_i}{T_i - T}P \geq \alpha(T_i - T)$$

解得

$$T \geq T_i - \sqrt{\frac{P}{\alpha}T_i}$$

(2) 傅里叶公式

$$\mathrm{d}Q = -\kappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\Delta S\,\mathrm{d}t$$

所以单位时间漏热量

$$\alpha(T_i - T) = \kappa\frac{T_i - T}{d}\Delta S$$

即

$$\alpha = \kappa\frac{\Delta S}{d}$$

其中 ΔS 是房间表面积，d 是墙壁厚度，κ 是墙壁热导率.

(3) 热导率公式

$$\kappa = \frac{1}{3}c_v v_s \bar{\lambda}$$

水泥墙壁是典型的绝缘体，依靠声子传热. 常温常压下近似地比热约 $3R$(杜隆-帕蒂律)、声速 $\frac{10^2}{m/s}$ 和声子自由程 $10\times10^1\,\mathrm{nm}$. 其中要把 $c_{mol} = 3R$ 转换成单位体积比热 c_v

$$c_v = \frac{c_{mol}}{10\times10^{-6}}\mathrm{J/(K\cdot m^3)}$$

即 $\kappa \sim 10^0\mathrm{J/(K\cdot m)}$.

(4)10 平米的房间，墙壁总面积取约 50 平米，墙壁厚度取约 20 厘米. 得到 α 的数量级是 $10^0\mathrm{W/K}$. 功率 1.5 匹约等于 $1\,\mathrm{kW}$，由 (1) 式得到

$$T \geq T_i - \sqrt{\frac{P}{\alpha}T_i} = 245\,\mathrm{K}$$

即 $-28\,^\circ\mathrm{C}$.

六.(12 分) 某物体的定压热容 C_p 可以视作常数，初始温度为 T_1. 将其与温度为 T_2 的无穷大热源热接触，最后达到热平衡，过程中压强保持不变.

(1) 分别求出该过程中物体和热源的熵变，以及总熵变；

(2) 证明无论 T_1 和 T_2 的高低，总熵变都是正值.

解：不妨设 $T_1 < T_2$. 物体升温的熵变是

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

吸热

$$Q_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

热源的放热量相等不过是负值，熵变是

$$\Delta S_2 = -\frac{C_p(T_2 - T_1)}{T_2}$$

总熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{C_p(T_2 - T_1)}{T_2}$$

设 $x = \frac{T_2}{T_1}$ 与总熵变可以写成 $\Delta S \propto \ln x - (1 - \frac{1}{x})$，第一、二项的斜率分别是 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$.T_1、T_2 相等时 $x = 1$，前后两项都等于零；$T_1 < T_2$ 时，$x > 1$，两项都大于零，但第一项的斜率大于第二项，前者更大，所以差值 $\Delta S > 0$；$T_1 > T_2$ 时，$x < 1$，两项都小于零，但第二项的斜率大于第一项，所以比第一项更小于零，即绝对值大于第一项，因此差值 $\Delta S > 0$. 即无论二温度高低，都是熵增过程.

七.(8 分) 求理想气体中 x 方向速度分量 $v_x \geq 0$ 的分子的平均速度和平均速率. 气体温度为 T，分子质量为 m.

解：显然这个平均速度只有 x 方向的分量，另两个方向的被抵消了.

x 方向速度分量的权重是 $e^{-\frac{1}{2}mv_x^2/k_BT}$，该平均值为

$$< v_x >_{half} = \frac{\int_0^\infty v_x e^{-\frac{1}{2}mv_x^2/k_BT}\,\mathrm{d}v_x}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}mv_x^2/k_BT}\,\mathrm{d}v_x} = \sqrt{\frac{2k_BT}{\pi m}}$$

关于平均速率.x 方向正负两半分子的平均速率显然是相等的，设等于 v_{half}. 若总分子数是 N，根据平均值的定义，总平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Sigma v_i}{N} = \frac{\frac{N}{2}v_{half} + \frac{N}{2}v_{half}}{N} = v_{half}$$

所以一半分子的平均速率和总平均速率相等，为 $\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$.

八.(10 分) 绝热容器内原存有一定量的橄榄油，其质量为 M，比热为 c，体积为 V，温度为 T_i. 现通过容器顶部小孔喷入总质量、比热、总体积、温度都相同的橄榄油滴，假设这些小油滴的半径均为 r，表面张力系数 σ 为常数. 油滴溶入原先的液面时，释放的能量全部转换为热量，使油温升高至 T_f. 推导 T_f 的表达式，并做出合理估值.

解：热容量 $C = Mc$.

油滴半径 r，体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$，喷入的 N 个油滴总体积为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 N$，N 个油滴表面积 $4\pi r^2 N$.

汇入平液面后，表面积减小，释放的能量

$$\Delta U = 4\pi r^2 N\sigma = \frac{3\sigma V}{r}$$

产生热量

$$Q = \Delta U = \frac{3\sigma V}{r} = 2Mc\Delta T$$

温度变化为

$$\Delta T = \frac{3\sigma V}{r}\frac{1}{2Mc} = T_f - T$$

得到

$$T_f = T + \frac{3\sigma V}{2Mcr}$$

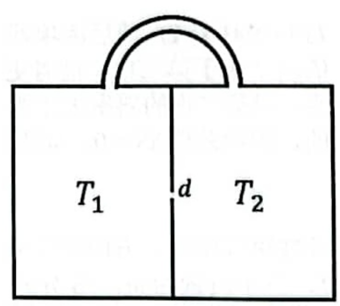
由

$$\Delta T = \frac{3\sigma V}{r}\frac{1}{2Mc} = \frac{3\sigma}{2\rho cr}$$

油的密度 $\rho \sim 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，比热 $c \sim 10^3\,\mathrm{J/kg\cdot K}$，$\sigma \sim 10^{-1}\,\mathrm{J/m^2}$，如果 r 取 $10^{-6}\,\mathrm{m}$ 的话，升温零点几 K.

九.(12 分) 如图所示，两个等体积的腔室由绝热壁隔开，内含同种理想气体，但处于不同温度 T_1 和 T_2(可假设 $T_1 < T_2$). 最初这两个腔室由一根可忽略体积的细弯管连接，其直径远大于两侧气体的平均自由程，并建立了平衡 (同时保持 T_1 和 T_2). 然后将弯管移除，密封腔室，但在中间的绝热壁上打开一个小孔，其直径 d 小于任一腔室气体的平均自由程. 如果两个室中气体的总质量为 M，证明在建立新的平衡之前，通过小孔从一室转移到另一室的质量

$$\Delta M = \frac{\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}\frac{\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}+\sqrt{T_1}}M.$$



解：设气体总摩尔数 ν，初始时左、右腔室气体分别为 ν_1 和 ν_2，最终平衡时则为 ν_1' 和 ν_2' 且

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2'(1)$$

开始时左、右腔室内气体分别达到热力学平衡，并通过弯管达到压强平衡，即 $P_1 = P_2$，由于 $V_1 = V_2$ ，由理想气体状态方程 $PV = \nu RT$，知

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2(2)$$

联立 (1)、(2) 式可得

$$\nu_1 = \frac{T_2}{T_1+T_2}\nu, \nu_2 = \frac{T_1}{T_1+T_2}\nu$$

因 d 在宏观上足够小，最终左、右腔室将分别处于平衡态，但系统整体不平衡. 当孔径 d 小于任一腔室气体的平均自由程时，运动到小孔内的分子和其他分子不发生碰撞，直接以泄流方式通过小孔. 隔板两侧气体在 dt 时间内泄流分子数分别为 $\Delta N_1 = \frac{n_1\bar{v}_1}{4}\frac{\pi d^2}{4}dt$(由左向右)，和 $\Delta N_2 = \frac{n_2\bar{v}_2}{4}\frac{\pi d^2}{4}dt$(由右向左).

有两侧分子数密度 (或压强) 恒定，此时有

$$\Delta N_1 = \Delta N_2$$

由 $\Delta N_1 = \Delta N_2$ 可知

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}$$

由分子平均运行速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$，有

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$$\nu_1'\sqrt{T_1} = \nu_2'\sqrt{T_2}(3)$$

联立 (1)、(3) 式解得

$$\nu_1' = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}\nu, \nu_2' = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}\nu$$

则从初态和末态平衡过程中，在不同腔室间转移的气体分子数为

$$|\nu_1' - \nu_1| = |\nu_2' - \nu_2| = \frac{\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}\frac{\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}+\sqrt{T_1}}\nu$$

乘以分子质量即得所需证明结果.