

【答题中可能用到的数学关系:

- 积分表达式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(p)\zeta(p),$$

其中  $\Gamma(p)$  是欧拉  $\Gamma$  函数,  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$  是黎曼  $\zeta$  函数。

- 半径为  $R$  的  $d$  维球面面积是  $S_d R^{d-1}$ , 其中  $S_d$  是常数。】
- 一、一温度为  $T$  的固体里有  $N$  个无相互作用的原子核。每个原子核自旋为 1, 因此可以用自旋量子数  $m = -1, 0, 1$  来标记其量子态。由于固体里的内建电磁场, 当原子核自旋为  $m = \pm 1$  时能量为  $\varepsilon$ ,  $m = 0$  时能量为零。
1. 求单个原子核的配分函数。
  2. 求该系统 (指该  $N$  个无相互作用的原子核构成的系统, 下同) 的内能以及内能涨落。
  3. 求该系统的热容, 并写出低温和高温极限。
  4. 请给出热容高、低温极限的物理解释。

( 装订线内不要答题 )

- 二、体积为  $V$  的容器里有  $N$  个相互作用很弱的原子。外磁场为  $H$  时，单个原子的能量近似为  $\sigma\mu H + p^2/(2m)$ ，其中  $p$ ， $m$  和  $\mu$  分别是是原子的动量，质量和磁矩； $\sigma = \pm 1$  是自旋量子数。
1. 温度为  $T$  时系统的熵。
  2. 保持体积不变，求把磁场绝热可逆地从  $H$  降为 0 后的系统温度  $T_f$ 。
  3. 求经过一次上述绝热去磁能够达到的最低温度。

三、在低温下少量<sup>3</sup>He原子可以溶解在液态<sup>4</sup>He里。当<sup>3</sup>He的粒子数密度n超过临界浓度 $n_c$ 时会出现相分离，有一部分<sup>3</sup>He仍然溶于<sup>4</sup>He里，其它则析出形成液态<sup>3</sup>He。请利用如下简化模型解释这一现象：<sup>3</sup>He原子是自旋为1/2的费米子。当处于液态<sup>3</sup>He里时，<sup>3</sup>He原子的单粒子能量可以近似为 $p^2/2m^*$ ，其中 $m^*$ 和p分别是有效质量和动量；当溶于<sup>4</sup>He时，<sup>3</sup>He原子的单粒子能量可以近似为 $V_0 + p^2/2m^*$ ，其中 $V_0 < 0$ 描述<sup>3</sup>He和<sup>4</sup>He之间的吸引作用。除 $V_0$ 之外，不考虑其它相互作用，并假设温度为0 K。

1. 请根据<sup>3</sup>He原子在各个态上的分布解释n很小时<sup>3</sup>He原子完全溶于液态<sup>4</sup>He里这一现象，并求出此时的费米能 $\epsilon_F$ 。
2. 当 $\epsilon_F$ 大于零之后会出现相分离。请解释这一现象，并求出 $n_c$ 。
3. 出现相分离后，请写出两相里<sup>3</sup>He原子密度之间的关系。

四、分子束外延生长中需要把样品置于高温炉中，生长过程可以当成是炉中气体原子在样品表面的吸附过程。温度为  $T$  的高温炉里有 A、B 两种气体原子，其原子质量分别是  $m_A$  和  $m_B$ 。假设一样品表面有 N 个吸附位置，每个位置最多吸附一个原子。当一个位置吸附 A 或者 B 原子时能量分别为  $-\varepsilon_A$  和  $-\varepsilon_B$ ，没有吸附原子时能量为零。

1. 假设高温炉中 A、B 两种气体的化学势分别是  $\mu_A$  和  $\mu_B$ ，求样品表面的巨正则配分函数。
2. 求表面吸附的 A 和 B 原子的个数。
3. 假设炉中的气体可以当成无相互作用的经典粒子，请确定 A、B 气体分压  $p_A$ 、 $p_B$  和化学势  $\mu_A$ 、 $\mu_B$  之间的关系。
4. 如果要在表面形成稳定的化合物  $AB_2$ ，不考虑化合物的形成能，这两种气体分压需要满足什么条件？

( 装订线内不要答题 )

五、磁学系统的低能激发可以用磁振子描述。磁振子是自旋为零的玻色子，其粒子数不守恒。动量为  $\mathbf{p}$  的磁振子能量  $\epsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|^s$ ，其中  $c$  和  $s$  为常数，由磁有序类型决定。已知体系温度为  $T$ ，不考虑磁振子间的相互作用。

1. 求单位“体积”的  $d$  维材料里磁振子的单粒子态密度  $\Omega(\varepsilon)$ 。
2. 求单位“体积”的磁振子的平均粒子数。
3. 求单位“体积”的磁振子的平均能量。
4. 求单位“体积”的磁振子的热容。