

1. 对谐振子, 定义  $S(r) = \exp(\frac{1}{2}r(a^2 + (a^\dagger)^2))$ , 证明其为标度变换, 即  $S^\dagger(r)XS(r)$  正比于  $X$ , 而  $S^\dagger(r)PS(r)$  正比于  $P$ , 比例系数互为倒数。

2. 考虑  $H = \frac{P^2}{2m} - \gamma X$ 。

(1) 写出相互作用绘景下的态矢量  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  和时间演化算符  $\tilde{U}(t)$  满足的微分方程。

(2) 已知  $\tilde{U}(t) = \exp(-\frac{i\alpha(t)}{\hbar})\exp(\frac{i\gamma Pt^2}{2m\hbar})\exp(\frac{i\gamma Xt}{\hbar})$ , 请确定  $\alpha(t)$  并给出 Schrodinger 绘景中的时间演化算符  $U(t)$ 。

3. 氢原子在 z 方向匀强磁场中, 比原先哈密顿量多出  $J_z + S_z$ , 给定初态, 问演化后在某能级的概率。(具体忘了, C.S.C.O 中是  $J^2$  和  $J_z$  而非  $L_z$  和  $S_z$ , 应该是用 Clebsch-Gordan 系数换表象做?)

4. 2024 秋最后一题, 先问严格解再问微扰, 并比较。

5. 若时间反演算符  $\Theta$  满足  $\Theta|z+\rangle = e^{i\alpha_+}|z-\rangle$  且  $\Theta|z-\rangle = e^{i\alpha_-}|z+\rangle$ , 我们希望  $\Theta|n\pm\rangle \propto |n\mp\rangle$ , 给出  $\alpha_\pm$  应该满足的关系。

6. 定义平移算子  $\mathbf{K} = \mathbf{P} - q\mathbf{A} + q\mathbf{B} \times \mathbf{R}$ , 且  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{R}$ ,  $q < 0$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , 求  $K_i$  与  $K_j$  的对易关系, 并证明  $U(\mathbf{a}) = \exp(-\frac{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{K}}{\hbar})$  之间并不一定对易, 具体地有  $U(\mathbf{a})U(\mathbf{b}) = U(\mathbf{b})U(\mathbf{a})\exp(-\frac{i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z}{l^2})$ , 其中  $l = \sqrt{-\frac{\hbar}{qB}}$ 。