

中国科学技术大学 2026 年 1 月 20 日 9:30 - 12:00

2025 秋广义相对论期末考试

注意事项：

1. 本次考试为开卷考试.

解答题

1. (15 分 +15 分) 课上我们讨论了光子在引力场中自由运动的引力红移现象，下面我们可以讨论一下有质量粒子的引力红移现象.

(1) 考虑一个静止在史瓦西度规 (Schwarzschild Metric) 中的有质量粒子，其质量为 m ，从 $r = r_0$ 处有静止开始运动，运动到 $r = r_1$ 处. 求 r_1 处观测者测量到的粒子的能量大小.

提示：用观测量理论.

(2) 粒子从无穷远处由静止开始运动，在外力的作用下损失能量，最终到达最小稳定轨道半径处景致，求粒子损失的总能量.

提示：考虑无穷远处观测者测量到的能量，计算粒子初末能量差.

2. (5 分 +10 分 +5 分) 在黎曼几何中:

- (1) 什么是黎曼几何中的张量?
- (2) 利用张量的定义, 说明克里斯朵夫符号 (Christoffel Symbols) $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ 是或不是张量;
- (3) 证明测地线方程是张量方程.

3. (30 分) 质量为 m 的粒子从无穷远处落入一个质量为 M 的史瓦西黑洞 (Schwarzschild Black Hole), $m \ll M$, 计算粒子落入黑洞的过程中引力辐射出的总能量.

提示: 利用四极矩辐射公式, m 的运动轨迹用牛顿力学近似.

4. (5 分 +10 分 +5 分) 考虑一个 Kerr 黑洞:

- (1) 写出 Kerr 黑洞的事件视界;
- (2) 证明外视界 $r = r_+$ 是零超曲面, 即满足零曲面方程;
- (3) Kerr 度规有两个 Killing 矢量 $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 和 $\psi^\mu = (0, 0, 0, 1)$, 构造一个新的矢量 $x^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \psi^\mu$, 其中 $\Omega_H = \frac{a}{a^2 + r_+^2}$, 证明 x^μ 在外视界面上是一个零矢量, 即长度为零.

提示:

- 度规选为:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2.$$

其中:

$$\begin{aligned}\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \\ g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \quad g_{t\phi} = -\frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ g_{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

- 证明第三问的命题前, 可以先证明如下恒等式, 再由恒等式证明命题:

$$g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -\Delta \sin^2 \theta.$$