

常用数学公式速查手册



目 录

一、高等数学.....	1
(一) 函数、极限、连续.....	1
(二) 一元函数微分学.....	4
(三) 一元函数积分学.....	12
(四) 向量代数和空间解析几何.....	19
(五) 多元函数微分学.....	27
(六) 多元函数积分学.....	33
(七) 无穷级数.....	37
(八) 常微分方程.....	43
二、线性代数.....	48
(一) 行列式.....	48
(二) 矩阵.....	49
(三) 向量.....	51
(四) 线性方程组.....	54
(五) 矩阵的特征值和特征向量.....	55
(六) 二次型.....	57
三、概率论与数理统计.....	60
(一) 随机事件和概率.....	60
(二) 随机变量及其概率分布.....	63
(三) 多维随机变量及其分布.....	65
(四) 随机变量的数字特征.....	68
(五) 大数定律和中心极限定理.....	70
(六) 数理统计的基本概念.....	71
(七) 参数估计.....	73
(八) 假设检验.....	75
四、初等数学公式.....	77
(一) 平面几何.....	82

一、高等数学

(一) 函数、极限、连续

考试内容	公式、定理、概念
函数和隐函数	<p>函数：设有两个变量 x 和 y，变量 x 的定义域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y = f(x)$</p>
基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立：	<p>基本初等函数包括五类函数：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 幂函数：$y = x^{\mu} (\mu \in R)$； 2 指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$； 3 对数函数：$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$； 4 三角函数：如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等； 5 反三角函数：如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等。 <p>初等函数：由常数 C 和基本初等函数经过有限次四则运算与有限此复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数。</p>
数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限与右极限	<p>1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$</p> <p>2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0) = A + a(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$</p> <p>3(保号定理)</p> <p>设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 又 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 \exists 一个 $\delta > 0$,</p> <p>当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 且 $x \neq x_0$ 时, $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$)</p>
无穷小和无穷大的	<p>设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$</p>

<p>概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较</p>	<p>(1)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.</p> <p>(2)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小,</p> <p>(3)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (c \neq 0)$, 则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小,</p> <p>(4)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价的无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$</p> <p>(5)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c (c \neq 0), k > 0$, 则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小</p> <p>常用的等阶无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> $\sin x$ $\arcsin x$ $\tan x$ $\arctan x$ $\ln(1+x)$ $e^x - 1$ </div> <div style="font-size: 3em; margin: 0 10px;">}</div> <div style="text-align: center;"> $\sim x,$ </div> </div> <div style="margin-left: 20px;"> $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ </div> </div> <p>无穷小的性质</p> <p>(1) 有限个无穷小的代数和为无穷小</p> <p>(2) 有限个无穷小的乘积为无穷小</p> <p>(3) 无穷小乘以有界变量为无穷小</p> <p>Th 在同一变化趋势下, 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大</p>
<p>极限的四则运算</p>	<p>$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ 则</p> <p>(1) $\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;</p> <p>(2) $\lim f(x)g(x) = A \cdot B$;</p>

	$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$
<p>极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：</p>	<p>1 (夹逼定理) 设在x_0的邻域内, 恒有$\varphi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$, 且$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A$, 则$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$</p> <p>2 单调有界定理: 单调有界的数列必有极限</p> <p>3 两个重要极限:</p> $(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ <p>重要公式: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$</p> <p>4 几个常用极限特例</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0,$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi, \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x \rightarrow +0^+} x^x = 1,$
<p>函数连续的概念: 函数间断点的类型: 初等函数的连续性: 闭区间上连</p>	<p>连续函数在闭区间上的性质:</p> <p>(1) (连续函数的有界性) 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续, 则$f(x)$在$[a, b]$上有界, 即\exists 常数$M > 0$, 对任意的$x \in [a, b]$, 恒有$f(x) \leq M$.</p>

<p>续函数的性质</p>	<p>(2) (最值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 至少取得最大值与最小值各一次, 即 $\exists \xi, \eta$ 使得:</p> $f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad \xi \in [a, b];$ $f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad \eta \in [a, b].$ <p>(3) (介值定理) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ (或最大值 M 与最小值 m) 之间的任一实数, 则在 $[a, b]$ 上至少 \exists 一个 ξ, 使得 $f(\xi) = \mu$. ($a \leq \xi \leq b$)</p> <p>(4) (零点定理或根的存在性定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少 \exists 一个 ξ, 使得</p> $f(\xi) = 0. \quad (a < \xi < b)$
---------------	---

(二) 一元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
<p>导数和微分的概念 左右导数 导数的几何意义和物理意义</p>	<p>1 导数定义: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (1)</p> <p>或 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (2)</p> <p>2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为: 左导数:</p> $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$

	右导数: $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
函数的可导性与连续性之间的关系, 平面曲线的切线和法线	<p>Th1: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导</p> <p>Th2: 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 反之则不成立. 即函数连续不一定可导.</p> <p>Th3: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$</p> <p>设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处的</p> <p>切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$</p> <p>法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0.$</p>
导数和微分的四则运算, 初等函数的导数,	<p>四则运算法则: 设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 可导则</p> <p>(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ $d(u \pm v) = du \pm dv$</p> <p>(2) $(uv)' = uv' + vu'$ $d(uv) = u dv + v du$</p> <p>(3) $(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0)$ $d(\frac{u}{v}) = \frac{v du - u dv}{v^2}$</p> <p>基本导数与微分表</p> <p>(1) $y = c$ (常数) $y' = 0$ $dy = 0$</p> <p>(2) $y = x^\alpha$ (α 为实数) $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$</p> <p>(3) $y = a^x$ $y' = a^x \ln a$ $dy = a^x \ln a dx$</p> <p>特例 $(e^x)' = e^x$ $d(e^x) = e^x dx$</p> <p>(4) $y' = \frac{1}{x \ln a}$ $dy = \frac{1}{x \ln a} dx$</p> <p>特例 $y = \ln x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$</p> <p>(5) $y = \sin x$ $y' = \cos x$ $d(\sin x) = \cos x dx$</p> <p>(6) $y = \cos x$ $y' = -\sin x$ $d(\cos x) = -\sin x dx$</p> <p>(7) $y = \tan x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ $d(\tan x) = \sec^2 x dx$</p> <p>(8) $y = \cot x$ $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$ $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$</p> <p>(9) $y = \sec x$ $y' = \sec x \tan x$ $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$</p>

	<p>(10) $y = \csc x \quad y' = -\csc x \cot x \quad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$</p> <p>(11) $y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$</p> <p>(12) $y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$</p> <p>(13) $y = \arctan x \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$</p> <p>(14) $y = \operatorname{arccot} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$</p> <p>(15) $y = \operatorname{sh} x \quad y' = \operatorname{ch} x \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$</p> <p>(16) $y = \operatorname{ch} x \quad y' = \operatorname{sh} x \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$</p>
<p>复合函数, 反函数, 隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法,</p>	<p>1 反函数的运算法则: 设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续, 在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$, 则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导, 并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$</p> <p>2 复合函数的运算法则: 若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu = \varphi(x)$) 可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导, 且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$</p> <p>3 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法:</p> <p>(1) 方程两边对 x 求导, 要记住 y 是 x 的函数, 则 y 的函数是 x 的复合函数. 例如 $\frac{1}{y}$, y^2, $\ln y$, e^y 等均是 x 的复合函数. 对 x 求导应按复合函数连锁法则做.</p> <p>(2) 公式法. 由 $F(x, y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, 其中, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数</p> <p>(3) 利用微分形式不变性</p>
高 阶 导	常用高阶导数公式

<p>数，一阶微分形式的不变性，</p>	<p>(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$</p> <p>(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$</p> <p>(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$</p> <p>(4) $(x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$</p> <p>(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$</p> <p>(6) 莱布尼兹公式：若 $u(x), v(x)$ 均 n 阶可导，则</p> $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \text{ 其中 } u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$
<p>微分中值定理，必达法则，泰勒公式</p>	<p>Th1(费马定理)若函数 $f(x)$ 满足条件：</p> <p>(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$，</p> <p>(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0) = 0$</p> <p>Th2 (罗尔定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：</p> <p>(1)在闭区间 $[a, b]$ 上连续；</p> <p>(2)在 (a, b) 内可导，则在 (a, b) 内 \exists 一个 ξ，使 $f'(\xi) = 0$</p> <p>Th3 (拉格朗日中值定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：</p> <p>(1)在 $[a, b]$ 上连续；(2)在 (a, b) 内可导；则在 (a, b) 内 \exists 一个 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$</p> <p>Th4 (柯西中值定理) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：</p> <p>(1)在 $[a, b]$ 上连续；(2)在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$，$g'(x)$ 均存在，且 $g'(x) \neq 0$ 则在 (a, b) 内 \exists 一个 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$</p> <p>洛必达法则：</p> <p>法则 I $(\frac{0}{0})$ 型)设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件：</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0; f(x), g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的邻域内可导}$

(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞). 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 I' ($\frac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0; \exists \text{ 一个 } X > 0, \text{ 当 } |x| > X$$

时, $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞). 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty; \quad f(x), g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的邻域内可}$$

导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞). 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ 同理法则 II' } (\frac{\infty}{\infty} \text{ 型}) \text{ 仿法则 I' 可写出}$$

泰勒公式: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少 \exists 一个 ξ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的

n 阶泰勒余项. 令 $x_0 = 0$, 则 n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x) \\ \dots\dots(1)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, ξ 在 0 与 x 之间.(1)式称为麦克劳林公式

常用五种函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\text{或} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin(\xi + \frac{n+1}{2} \pi)$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + \frac{n+1}{2} \pi)$$

$$\text{或} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

	$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ $+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1} \quad \text{或}$ $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
<p>函数单调性的判别，函数的极值，函数的图形的凹凸性，拐点及渐近线，用函数图形描绘函数最大值和最小值，</p>	<p>1 函数单调性的判断：</p> <p>Th1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内可导，如果对 $\forall x \in (a,b)$，都有 $f'(x) > 0$（或 $f'(x) < 0$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的（或单调减少）</p> <p>Th2 （取极值的必要条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取极值，则 $f'(x_0) = 0$。</p> <p>Th3 （取极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微，且 $f'(x_0) = 0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在。）</p> <p>(1) 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“+”变“-”，则 $f(x_0)$ 为极大值；</p> <p>(2) 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“-”变“+”，则 $f(x_0)$ 为极小值；</p> <p>(3) 若 $f'(x)$ 经过 $x = x_0$ 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值。</p> <p>Th4 (取极值的第二充分条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x) \neq 0$，且 $f'(x_0) = 0$，则 当 $f''(x_0) < 0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；</p> <p style="text-align: center;">当 $f''(x_0) > 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值。</p> <p>注：如果 $f''(x_0) = 0$，此方法失效。</p> <p>2 渐近线的求法：</p>

	<p>(1)水平渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 则 $y = b$ 称为函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线.</p> <p>(2)铅直渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则 $x = x_0$ 称为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.</p> <p>(3)斜渐近线 若 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, 则 $y = ax + b$ 称为 $y = f(x)$ 的斜渐近线</p> <p>3 函数凹凸性的判断:</p> <p>Th1 (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 $f''(x) < 0$ (或 $f''(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的 (或凹的) .</p> <p>Th2 (拐点的判别定理 1) 若在 x_0 处 $f''(x) = 0$, (或 $f''(x)$ 不存在), 当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.</p> <p>Th3 (拐点的判别定理 2) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数, 且 $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点</p>
<p>弧微分, 曲率的概念, 曲率半径</p>	<p>1. 弧微分: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$.</p> <p>2. 曲率: 曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 $k = \frac{ y'' }{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.</p> <p>对于参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $k = \frac{ \varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t) }{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$.</p> <p>3. 曲率半径: 曲线在点 M 处的曲率 $k (k \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系: $\rho = \frac{1}{k}$.</p>

(三) 一元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质	<p>基本性质</p> <p>1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ ($k \neq 0$ 为常数)</p> <p>2 $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_k(x)dx$</p> <p>3 求导: $[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或微分: $d \int f(x)dx = f(x)dx$</p> <p>4 $\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$ (C 是任意常数)</p>
基本积分公式	<p>$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$ ($k \neq -1$)</p> <p>$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$</p> <p>$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$</p> <p>$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$) $\int e^x dx = e^x + C$</p> <p>$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$</p> <p>$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$</p> <p>$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$</p> <p>$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + C$</p> <p>$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + C$</p> <p>$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$</p>

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

重要公式

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 则

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, a 为任意实数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$

$$(3) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \square \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \square \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \square \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \square, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

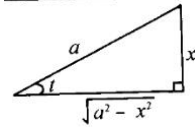
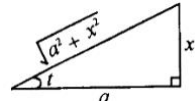
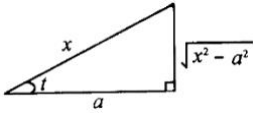
$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mxdx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mxdx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

<p>定积分的概念和基本性质，定积分中值定理</p>	<p>1. 定积分的基本性质</p> <p>(1)定积分只与被积函数和积分限有关，而与积分变量无关，即</p> $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$ <p>(2)$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$</p> <p>(3)$\int_a^b dx = b - a$</p> <p>(4)$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$</p> <p>(5)$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k为常数)</p> <p>(6)$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$</p> <p>(7)比较定理：设 $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.</p> <p>推论：1. 当 $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ 时, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;</p> $2. \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x) dx$ <p>(8)估值定理：设 $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$, 其中 m, M 为常数，则</p> $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ <p>(9)积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上至少 \exists 一个 ξ,</p> $\text{使 } \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ ----- 平均值公式}$
<p>积分上限的函数及其导数，牛顿——</p>	<p>Th1</p> <p>设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$x \in [a, b]$，则变上限积分</p> $F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ 对 } x \text{ 可导}$

<p>莱布尼兹公式</p>	<p>且有 $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$</p> <p>推论1 设 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$, 则 $F'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$.</p> <p>推论2 $\left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right)'_x = f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\phi(x)] \phi'(x)$</p> <p>推论3 $\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) g(x) dt \right)'_x = (g(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt)'_x$ $= g'(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt + g(x) f[\varphi(x)] \varphi'(x)$</p> <p>Th2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x \in [a, b]$, 则 $\int_a^x f(x) dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数</p> <p>Th3 牛顿-莱布尼茨公式: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$</p>
<p>不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法</p>	<p>1 不定积分:</p> <p>分部积分法: $\int u dv = uv - \int v du$ 选择 u, dv 的原则: 积分容易者选作 dv, 求导简单者选为 u</p> <p>换元积分法: 设 $\int f(u) du = F(u) + C$,</p> <p>则 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)$</p> <p><u>设 $u = \varphi(x)$</u> $\int f(u) du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$</p> <p>2. 定积分</p> <p>换元法: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若 $x = \varphi(t)$ 满足:</p> <p>(1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\varphi'(t) \neq 0$.</p> <p>(2) $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(\beta) = b$ 并且当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 上变化时,</p>

有理函数，三角函数的有理式和简单无理函数的积分，广义积分和定积分的应用	$\varphi(t)$ 的值在 $[a, b]$ 上变化，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$ <p>分部积分公式</p> <p>设 $u(x)$，$v(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导函数 $u'(x), v'(x)$, 则</p> $\int_b^a u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big _b^a - \int_b^a v(x)u'(x)dx$ <p>3. 定积分不等式证明中常用的不等式</p> <p>(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (2) $a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$</p> <p>(3) 柯西不等式:</p> $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \left(\int_a^b g^2(x)dx\right),$ <p>其中 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续</p>		
	1. 三角函数代换		
	函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	
	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	
	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	
	<p>有理函数积分</p> <p>(1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln x-a + C$</p>		

	$(2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C (n \neq 1)$
--	---

$$(3) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dx}{[(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}]^n} \xrightarrow[\frac{4q - p^2}{4} = a^2]{\text{令 } x + \frac{p}{2} = u} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}$$

$$(4) \int \frac{x+a}{(x^2 + px + q)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + (a - \frac{p}{2}) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

($p^2 - 4q < 0$)

4. 广义积分

(1) 无穷限的广义积分 (无穷积分)

设 $f(x)$ 连续, 则 $1. \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$

$$2. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

(2) 无界函数的广义积分 (瑕积分)

$$1. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, (\text{当 } x \rightarrow b^- \text{ 时}, f(x) \rightarrow \infty)$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, (\text{当 } x \rightarrow a^+ \text{ 时}, f(x) \rightarrow \infty)$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x) dx$$

(当 $x \rightarrow c$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$)

(四) 向量代数和空间解析几何

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念，向量的线性运算，	<p>1. 向量：既有大小又有方向的量，又称矢量。</p> <p>2. 向量的模：向量 \vec{a} 的大小. 记为 \vec{a}。</p> <p>3. 向量的坐标表示：若向量用坐标表示</p> $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x, y, z\}, \text{ 则 } \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ <p>4 向量的运算法则：</p> <p>I 加减运算 设有矢量 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$，则</p> $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}.$ <p>II. 数乘运算 数乘运算 \triangleq 矢量 \vec{a} 与一数量 λ 之积 $\lambda\vec{a}$，</p> $\lambda\vec{a} = \begin{cases} \lambda\vec{a} \vec{a}^0 & \lambda > 0, \text{即与}\vec{a}\text{同向} \\ \vec{0} & \lambda = 0, \text{即为零矢量} \\ - \lambda\vec{a} \vec{a}^0 & \lambda < 0, \text{即与}\vec{a}\text{反向} \end{cases} \quad \text{设 } \vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \text{ 则}$ $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$
向量的数量积和向量积，向量的混合积，	<p>1 矢量的数积（点积，内积）：</p> <p>矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$。</p> <p>设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$。</p> <p>2 矢量的向量积（叉积，外积）：设有两个向量 \vec{a} 与 \vec{b}，若 \exists 一个矢量 \vec{c}，满足如下条件</p> <p>(1) $\vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\vec{a}, \vec{b})$；</p>

	<p>(2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, 即 \vec{c} 垂直于 \vec{a}, \vec{b} 所确定的平面;</p> <p>(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 成右手系. 则称矢量 \vec{c} 为矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 的矢量积, 记 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.</p> <p>设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则</p> $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$ <p>3 混合积: 设有三个矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 若先作 \vec{a}, \vec{b} 的叉积 $\vec{a} \times \vec{b}$, 再与 \vec{c} 作点积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, 则这样的数积称为矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积, 记为 (a, b, c), 即 $(a, b, c) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.</p> <p>设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$,</p> $\text{则 } (a, b, c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
两向量垂直、平行的条件, 两向量的夹角, 向量的坐标表达式及其运算, 单位向量, 方向数与方向	<p>1 向量之间的位置关系及结论</p> <p>设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$</p> <p>(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;</p> <p>(2) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$;</p>

<p>余弦,</p>	<p>其中 x_2, y_2, z_2 之中有一个“0”，如 $x_2 = 0$，应理解为 $x_1 = 0$；</p> <p>(3) \vec{a}, \vec{b} 不共线 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 λ, μ 使 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$；</p> <p>(4) 矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角，可由下式求出</p> $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$ <p>(5) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 λ, μ, ν，使</p> $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0} \text{ 或者 } (a, b, c) = 0$ <p>2 单位向量：模为 1 的向量. 向量 \vec{a} 的单位向量记作 \vec{a}^0，</p> $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} } = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$ <p>3 向量的方向余弦：</p> $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ <p>其中 α, β, γ 为向量 \vec{a} 与各坐标轴正向的夹角.</p> <p>4 单位向量的方向余弦：显然 $\vec{a}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$，且有</p> $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$
<p>曲面方程和空间曲线方程的概念，平</p>	<p>1 平面方程</p> <p>(1)一般式方程 $Ax + By + Cz + D = 0$，法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$，若</p> <p>方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例</p>

面方程，
直线方程，平面
与平面、
平面与直
线、直线
与直线的
以及平
行、垂直
的条件，
点到平面
和点到直
线的距离

如 平面 $Ax + Cz + D = 0 // y$ 轴

(2) 平面的点法式方程 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 为平面上已知点， $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 为法矢量

(3) 三点式方程
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ 为平面上的三个点

(4) 截距式方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c 分别为平面上坐标轴上

的截距，即平面通过三点

$(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$

2 直线方程

一般式方程(两平面交线):
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1x + D_1 = 0 & \text{平面 } \pi_1 \\ A_2x + B_2y + C_2x + D_2 = 0 & \text{平面 } \pi_2 \end{cases}$$

平面 π_1 与平面 π_2 的法矢量分别为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$,

$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, 直线的方向矢量为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

(2) 标准式方程

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ $M(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上已知点，

$\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为直线的方向矢量

(3) 两点式方程
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线上的两点

$$(4) \text{参数式方程} \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad M(x_0, y_0, z_0) \text{ 为直线上已知}$$

点, $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为直线的方向向量

3 平面间的关系

设有两个平面: 平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 平面 $\pi_2:$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$(1) \text{平面 } \pi_1 // \text{平面 } \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$(2) \text{平面 } \pi_1 \perp \text{平面 } \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

(3) 平面 π_1 与平面 π_2 的夹角 θ , 由下式确定

$$\cos \theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

4 平面与直线间关系

$$\text{直线 } L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\text{平面 } \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(1) L // \pi \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$$

$$(2) L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

(3) L 与 π 的夹角 θ , 由下式确定

$$\sin \theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

5 直线间关系

$$\text{设有两直线: 直线 } L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\text{直线 } L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

	<p>(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$</p> <p>(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$</p> <p>(3) 直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ, 由下式确定</p> $\cos \theta = \frac{ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 }{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ <p>6 点到平面的距离: $M(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为</p> $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ <p>7 点到直线的距离: $M(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ 距离为</p> $d = \frac{ \overrightarrow{M_1 M_0} \times \overrightarrow{M_1 P} }{ \overrightarrow{M_1 P} } = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$
球面, 母线平行于坐标轴的柱面, 旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程,	<p>准线为各种形式的柱面方程的求法</p> <p>(1) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, 母线 // z 轴的柱面方程为</p> $f(x, y) = 0,$ <p>准线为 $\Gamma: \begin{cases} \varphi(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, 母线 // y 轴的柱面方程为</p> $\varphi(x, z) = 0,$

准线为 $\Gamma: \begin{cases} \psi(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, 母线 // x 轴的柱面方程为

$$\psi(y, z) = 0.$$

(2) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 母线的方向矢量为 $\{l, m, n\}$

的柱面方程的求法

首先, 在准线上任取一点 (x, y, z) , 则过点 (x, y, z) 的母线方程

$$\text{为 } \frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}$$

其中 X, Y, Z 为母线上任一点的流动坐标, 消去方程组

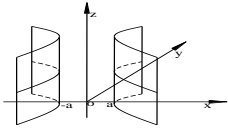
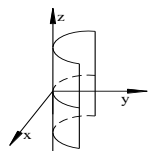
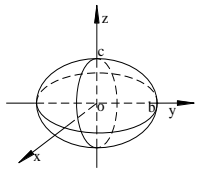
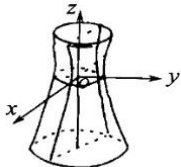
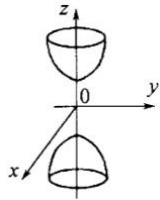
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n} \end{cases}$$

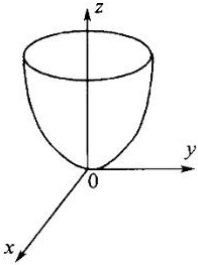
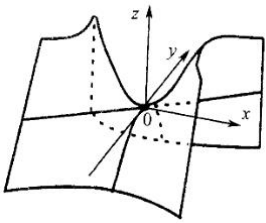
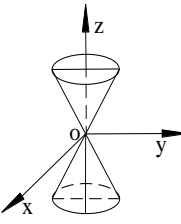
中的 x, y, z 便得所求的柱面方程

常见的柱面方程

常用的二次曲面方程及其图形, 空间曲线的参数方程和

名称	方程	图形
圆柱面	$x^2 + y^2 = R^2$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	

一般方程，空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.	双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
	抛物柱面	$x^2 = 2py, (p > 0)$	
	标准二次方程及其图形		
	名称	方程	图形
	椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c 均为正数)	
	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c 均为正数)	
	双叶双曲面	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c 均为正数)	

	<p>椭圆的抛物面</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ <p>(a, b, p 为正数)</p>	
	<p>双曲抛物面 (又名马鞍面)</p>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ <p>(a, b, p 均为正数)</p>	
	<p>二次锥面</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ <p>(a, b, c 为正数)</p>	

(五) 多元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
<p>多元函数的概念， 二元函数的几何意义， 二元函数的极限和连续的概念，</p>	<p>二元函数 $z = f(x, y)$ 连续，可导（两偏导存在）与可微三者的关系如下： 可导 \leftarrow 可微 \rightarrow 函数连续 “$\leftarrow \rightarrow$” 表示可推出 用全微分定义验证一个可导函数的可微性，只需验证： $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\rho}$ 是否为0</p>
<p>有界闭区域上多元</p>	<p>基本原理</p>

<p>连续函数的性质，多元函数偏导数和全微分，全微分存在的必要条件和充分条件，</p>	<p>Th1(求偏导与次序无关定理)</p> <p>设$z = f(x, y)$的两个混合偏导数$f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$在区域$D$内连续, 则有$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$</p> <p>Th2(可微与偏导存在的关系定理)若$z = f(x, y)$在$P(x, y)$点处可微, 则在该点处$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$必存在, 且有$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$</p> <p>Th3(偏导存在与可微的关系定理)</p> <p>若$z = f(x, y)$的两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$在$P(x, y)$上的某领域内存在, 且在$P(x, y)$连续, 则$z = f(x, y)$在$P(x, y)$点处可微</p>
<p>多元复合函数、隐函数的求导法，二阶偏导数，方向导数和梯度，</p>	<p>1 复合函数微分法</p> $(1) \text{ 设 } z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \phi(x, y), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$ <p>(2) 设$z = f(u, v), u = \varphi(x), v = \phi(x)$,</p> <p>则$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$, 称之为$z$的全导数</p> <p>(3) 设$z = f(x, u, v), u = \varphi(x, y), v = \phi(x, y)$,</p> $\text{则 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$ <p>注：复合函数一定要设中间变量，抽象函数的高阶偏导数，其中间变量用数字 1, 2, 3……表示更简洁.</p> <p>2 隐函数微分法</p> <p>(1) 设$F(x, y) = 0$, 则$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$</p>

$$(2) F(x, y, z) = 0, \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

$$(3) \text{ 设由方程组 } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ 确定的隐函数 } y = y(x), z = z(x),$$

则 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 可通过解关于 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 的线性方程组

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \\ G'_x + G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases} \text{ 来求解}$$

方向导数和梯度

Th1 设 $z = f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 沿任意方向 $l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 存在方向导数且

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta$$

在平面上 l 除了用方向角表示外也可用极角表示:

$l = (\cos \theta, \sin \theta)$, θ 是 l 的极角, $\theta \in [0, 2\pi]$ 此时相应的方向导数的计算公式为 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \theta$

Th2 设三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 则 $u = f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 沿任意方向

$l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 存在方向导数且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cos \beta \\ &\quad + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos \gamma \end{aligned}$$

梯度: $z = f(x, y)$ 在点 M_0 的方向导数计算公式可改写成

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta)$$

$$= \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot l = |\text{grad} f(x_0, y_0)| \cos \langle \text{grad}(f(x_0, y_0)), l \rangle$$

	<p>这里向量 $\text{grad}f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y})$ 成为</p> <p>$z = f(x, y)$ 在点 M_0 的梯度(向量)</p> <p>$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$ 随 l 而变化 $l = \frac{\text{grad}(f(x_0, y_0))}{ \text{grad}(f(x_0, y_0)) }$ 即沿梯度方向时, 方向导数取最大值 $\text{grad} f(x_0, y_0)$</p>
<p>空间曲线的切线和法平面, 曲面的切平面和法线,</p>	<p>1. 曲线的切线及法平面方程</p> <p>(1) 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在 $(x_0, y_0, z_0) \leftrightarrow t = t_0$</p> <p>处的切线方程: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$</p> <p>法平面方程: $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$</p> <p>(2) 空间曲线 Γ 的一般式方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$</p> <p>则在曲线 Γ 的 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的</p> <p>切线方程: $\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big _p} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big _p} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big _p}$</p> <p>法线方程:</p> <p>$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big _p (x-x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big _p (y-y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big _p (z-z_0) = 0$</p> <p>2. 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程</p> <p>(1) 设曲面 Σ 为显式方程 $z = f(x, y)$, 则在 Σ 上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的</p> <p>切平面方程: $\frac{\partial z}{\partial x} \Big _p (x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} \Big _p (y-y_0) - (z-z_0) = 0.$</p>

	<p>法线方程: $\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}\big _p} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}\big _p} = \frac{z-z_0}{-1}$</p> <p>(2) 设曲面 Σ 为隐式方程 $F(x, y, z) = 0$, 则在 Σ 上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的</p> <p>切平面方程: $F'_x \big _p (x-x_0) + F'_y \big _p (y-y_0) + F'_z \big _p (z-z_0) = 0$</p> <p>法线方程: $\frac{x-x_0}{F'_x \big _p} = \frac{y-y_0}{F'_y \big _p} = \frac{z-z_0}{F'_z \big _p}$</p>
<p>二元函数的二阶泰勒公式, 多元函数的极值和条件极值, 多元函数的最大值、最小值及其简单应用</p>	<p>1 多元函数的极值</p> <p>定义:</p> <p>设函数 $z = f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 若对于该邻域内异于 $P(x_0, y_0)$ 点的任一点 $Q(x, y)$ 恒有</p> $f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{ (或 } < f(x_0, y_0) \text{)}$ <p>则称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值 (极大值)</p> <p>Th1 (取极值的必要条件)</p> <p>设 $z = f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 点的一阶偏导数存在, 且 $P(x_0, y_0)$ 是 $z = f(x, y)$ 的极值点, 则</p> $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ <p>Th2 (函数取极值的充分条件)</p> <p>设 $z = f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 点的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$</p> $[f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ <p>则 $P(x_0, y_0)$ 是 $z = f(x, y)$ 的一个极值点</p> <p>(1) 若 $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (或 $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$), 则 $P(x_0, y_0)$ 为极小值点。</p>

(2) 若 $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (或 $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), 则 $P(x_0, y_0)$ 为极大值点。

2 无条件极值

解题程序:

(1) 求出 $z = f(x, y)$ 的驻点 (x_0, y_0) ;

(2) 用 H_2 判别 (x_0, y_0) 是否为极值点: 是, 则 $f(x_0, y_0)$ 为

$z = f(x, y)$ 的极值。

3 条件极值 (拉格朗日乘数法)

1) 由条件 $\varphi(x, y) = 0$, 求 $z = f(x, y)$ 的极值

解题程序:

令 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$;

$$\text{解方程组} \begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{求驻点}(x_0, y_0);$$

$f(x_0, y_0)$ 即为 $f(x, y)$ 的极值 (存在的话)

2) 由条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, 求 $u = f(x, y, z)$ 的极值。解题程序:

令 $F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda \varphi'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda \varphi'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda \varphi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

若 (x_0, y_0, z_0) 为其解 $f(x_0, y_0, z_0)$ 即为 $f(x, y, z)$ 的极值 (若存在的话)

3) 由条件 $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$ 求函数 $u = f(x, y, z)$ 的极值

解题程序:

令 $F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z)$

以下仿 1), 2)

(六) 多元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用	<p>1 二重积分:</p> $I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \text{ 其中 } d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\},$ d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径 ($i = 1, 2, \dots, n$) <p>几何意义:</p> <p>当 $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$ 时, 而二重积分 I 表示以 $z = f(x, y)$ 为曲顶, 以 D 为底的柱体体积。</p> <p>2 三重积分:</p> $I = \iiint_D F(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta v_i, \text{ 其中 } d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\},$ d_i 为 Δv_i 的直径 ($i = 1, 2, \dots, n$) <p>物理意义:</p> <p>三重积分 I 表示体密度为 $\mu = f(x, y, z)$ 的空间形体 Ω 的质量。</p> <p>3 性质(只叙述二重积分的性质, 三重积分类似)</p> <p>(1) $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma, k$ 为常数</p> <p>(2) $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma$</p> <p>(3) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) d\sigma$, 其中 D_i 为 D 的构成子域且任两个子域没有重迭部分 ($i = 1, 2, \dots, m$)</p> <p>(4) $\iint_D d\sigma = A$, 其中 A 为 D 的面积。</p> <p>(5) (比较定理)</p>

若在 D 上恒有 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$

(6)(估值定理) 设 M, m 分别为 $f(x, y)$ 在闭域 D 上的最大与最小值,

A 为 D 的面积, 则 $mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA$

(7)(中值定理) 若 $f(x, y)$ 在闭域 D 上连续, A 为 D 的面积,

则在 D 上至少 \exists 一点 (ξ, η) , 使 $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A$

(8)二重积分的对称性原理

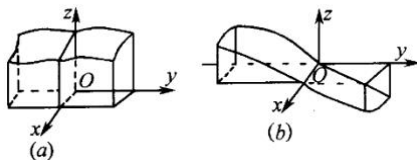
1) 如果积分域 D 关于 x 轴对称, $f(x, y)$ 为 y 的奇偶函数,

则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$

$$= \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数, 即 } f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数, 即 } f(x, -y) = f(x, y), \end{cases}$$

D_1 为 D 在上半平面部分

这个性质的几何意义见图(a)、(b)



2) 如果积分域 D 关于 y 轴对称, $f(x, y)$ 为 x 的奇偶函数,

则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$

$$= \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 的奇函数, 即 } f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数, 即 } f(-x, y) = f(x, y), \end{cases}$$

D_2 为 D 在右半平面部分

3) 如果 D 关于原点对称, $f(x, y)$ 同时为 x, y 的奇偶函数,

	<p>则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$</p> $= \begin{cases} 0, f \text{ 关于 } x, y \text{ 的奇函数, 即 } f(-x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, f \text{ 关于 } x, y \text{ 为偶函数, 即 } f(-x, -y) = f(x, y), \end{cases}$ <p>D_1 为 D 在上半平面部分</p> <p>4) 如果 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$</p> <p>注: 注意到二重积分积分域 D 的对称性及被积函数 $f(x, y)$ 的奇偶性, 一方面可减少计算量, 另一方面可避免出差错, 要特别注意的是仅当积分域 D 的对称性与被积函数 $f(x, y)$ 的奇偶性两者兼得时才能用性质 8.</p>
<p>两类曲线积分的概念、性质及计算, 两类曲线积分的关系, 格林公式, 平面曲线积分与路径无关的条件,</p>	<p>1 平面曲线积分与路径无关的四个等价条件</p> <p>设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数, 则 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关</p> $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in D$ $\Leftrightarrow \oint_L Pdx + Qdy = 0, L \text{ 为一简单分段光滑封闭曲线}$ $\Leftrightarrow \text{存在函数 } u(x, y), (x, y) \in D \text{ 使 } du(x, y) = Pdx + Qdy, \text{ 且}$ $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ <p>2 格林公式: 设平面上的有界闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 连续的一阶偏导数, 则有</p> $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$ <p>或者 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx - Qdy$</p>
<p>二元函数全微分的原函数,</p>	<p>1 高斯(Gauss)公式</p> <p>设 Ω 是空间中的有界闭区域, 由分块光滑的曲面所 S 围成, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 由连续的一阶偏</p>

<p>两类曲面积分的概念、性质及计算，两类曲面积分的关系，高斯公式，斯托克斯公式，</p>	<p>导数，则</p> $\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad \text{或}$ $\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$ <p>这里 S 是 Ω 的整个边界的外侧 (即取外法向)，$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 S 上点 (x, y, z) 处的外法向量的方向余弦。</p> <p>2 斯托克斯公式</p> <p>设 Γ 为分段光滑的又向闭曲线，S 是以 Γ 为边界的分块光滑有向曲面，Γ 的正向与 S 的侧 (即法向量的指向) 符合右手法则，函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有</p> $\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ $\left(\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ dydz & dzdx & dxdy \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \right) \text{或}$ $\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$ $= \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$
<p>散度和旋度的概念及计算，曲线积分和曲面积分的应用</p>	<p>1 散度的计算公式</p> <p>设 $\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$; P, Q, R 均可导，则 \vec{A} 在 $P(x, y, z)$ 点处的散度为 $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$</p> <p>2 旋度的计算公式</p> <p>设有矢量场 $\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$，其中 P, Q, R 均有连续的一阶偏导数，则旋度 $\operatorname{rot} \vec{A}$ 为：</p>

	$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
--	--

(七) 无穷级数

考试内容	对应公式、定理、概念
常数项级数的收敛与发散的概念，收敛级数的和的概念级数的基本性质与收敛的必要条件	<p>1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的性质：</p> <p>(1) 设 $c \neq 0$ 的常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 有相同敛散性</p> <p>(2) 设有两个数级 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$</p> <p>若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$.</p> <p>若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.</p> <p>若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不定.</p> <p>注：添加或去消有限项不影响一个级数的敛散性.</p> <p>设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和</p>
几何级数与 p 级数以及他们的收敛性，正项	<p>正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 的判敛法</p> <p>(1) 比较判敛法：设 $0 \leq u_n \leq v_n$, 若</p>

<p>级数收敛性的判别法，</p>	<p> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 </p> <p>(2) 比较法的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数</p> <p>且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A (v_n \neq 0)$</p> <p>1. 若 $0 \leq A < +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛</p> <p>2. 若 $0 < A \leq +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散</p> <p>两个常用的比较级数</p> <p>i) 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, r < 1 \\ \text{发散}, r \geq 1 \end{cases}$</p> <p>ii) p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, p > 1 \text{ 时} \\ \text{发散}, p \leq 1 \text{ 时} \end{cases}$</p> <p>(3) 比值判别法（达朗贝尔准则）（适用于通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干连乘积形式）</p> <p>设 $u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 来讲</p> <p>若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ $\begin{cases} \rho > 1 \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \\ \rho = 1 \text{ 时}, \text{方法失效} \\ \rho < 1 \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \end{cases}$ </p>
<p>交错级数与莱布尼兹定理，任意项级数的绝对</p>	<p>1. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n > 0)$ 的判别法</p> <p>莱布尼兹准则：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n > 0)$ 满足条件：</p>

<p>收敛与条件收敛,</p>	<p>(1)$u_n \geq u_{n+1}, (n=1, 2, \dots)$; (2)$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则交错级数收敛, 其和 $S \leq u_1$, 其 n 项余和的绝对值 $R_n \leq u_{n+1}$.</p>
<p>函数项级数的收敛域与和函数的概念, 幂级数及其收敛半径, 收敛区间(指开区间)和收敛域, 幂级数的和函数,</p>	<p>1 幂级数: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 收敛半径, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.</p> <p>2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛域的求法步骤:</p> <p>(1)用比值(或根值)法求 $\rho(x)$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ u_{n+1}(x) }{ u_n(x) } = \rho(x) \text{ (或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ u_n(x) } = \rho(x));$ </p> <p>(2)解不等式方程 $\rho(x) < 1$, 求出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛区间 (a, b);</p> <p>(3)考察 $x = a$ (或 $x = b$) 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ (或 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$) 的敛散性</p> <p>(4) 写出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域</p>
<p>幂级数在其收敛区间内的基本性质, 简单幂级数的和函数的求法, 初等幂级数展开式</p>	<p>1 幂级数的四则运算性质: 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x), \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = g(x)$, 其收敛半径分别为 $R_1, R_2, R = \min(R_1, R_2)$, 则对 $\forall x \in (-R, R)$, 有</p> <p>(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n = f(x) \pm g(x)$, 且在 $(-R, R)$ 内绝对收敛</p> <p>(2) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n$ $= f(x)g(x)$</p> <p>(3) 设 $b_0 \neq 0$, 则在 $x = 0$ 的足够小邻域内</p>

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots$$

利用多项式的长除法可得: $C_0 = \frac{a_0}{b_0}, C_1 = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2}, \dots$

2 幂级数的分析性质:

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则在 $(-R, R)$ 内有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $f(x)$ 是连续的。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可逐项微分, 且 $f'_x = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可逐项积分, 且 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

3 函数的幂级数展开

泰勒级数 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一邻域内具有任意阶导数,

$$\begin{aligned} \text{级数: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数。

当 $x_0 = 0$ 时，级数化为
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

称为麦克劳林级数

Th设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 某领域内具有任意阶导数，

则泰勒级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

收敛于 $f(x)$ 的充分条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$,

其中 $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)](x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1$.

4 常见的幂级数展开式：

(1) $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, (-1, 1)$

(2) $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots + (-1)^n u^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, (-1, 1)$

(3) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, (-\infty, +\infty)$

(4) $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, (-\infty, +\infty)$

(5) $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, (-\infty, +\infty)$

(6) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}, (-1, 1)$

(7) $(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2!} u^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} u^n \dots$

(随 a 的不同而不同，但在 $(-1, 1)$ 总有意义)

函数的傅立叶系数与傅立叶级数, 狄利克雷定理, 函数在 $[-l, l]$ 上的傅立叶级数

1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 上可积, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, (n = 1, 2, \dots)$$

称为 $f(x)$ 的傅立叶系数

2 $f(x)$ 的傅立叶系数为系数的三角级数 $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称为 $f(x)$ 的傅立叶级数, 记为 $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

3 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 且在 $[-l, l]$ 上可积, 则以

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

为系数的三角级数 $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$

称为 $f(x)$ 的傅立叶级数, 记为 $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$.

3 狄里赫莱收敛定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足条件:

(1) 除有限个第一类间断点外都连续。

(2) 只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 且有

	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点;} \\ \frac{1}{2} [f(x_0-0) + f(x_0+0)], x_0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点;} \\ \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi+0)], x = \pm\pi. \end{cases}$
函数在 $[0, l]$ 上的正弦级数与余弦级数.	<p>1 $f(x)$ 为 $[0, l]$ 上的非周期函数, 令:</p> $F(x) = \begin{cases} f(x), 0 \leq x \leq l \\ f(-x), -l \leq x < 0 \end{cases} \text{ 则 } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \text{ (余弦级数)}, \text{ 其中: } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \text{ (} n=0, 1, 2, \dots \text{)}$ <p>2 $f(x)$ 为 $[0, l]$ 上的非周期函数, 令:</p> $F(x) = \begin{cases} f(x), 0 \leq x \leq l \\ -f(-x), -l \leq x < 0 \end{cases} \text{ 则 } F(x) \text{ 除 } x=0 \text{ 外在区间 } [-\pi, \pi] \text{ 上}$ <p>为奇函数则 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ (正弦级数), 其中:</p> $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \text{ (} n=1, 2, \dots \text{)}$

(八) 常微分方程

考试内容	对应公式、定理、概念
常微分方程的基本概念, 变量可分离的微分方程	<p>1 常微分方程 含有自变量、未知函数及未知函数的某些导数的方程式称微分方程, 而当未知函数是一元函数时称为常微分方程.</p> <p>2 可分离变量方程 $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$</p>

程	<p>解法：两边同除 $g_1(y)f_2(x) \neq 0$，得 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$</p> $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$
奇次微分方程，一阶线性微分方程，伯努利方程，全微分方程，	<p>1 齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$</p> <p>解法：令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，$y' = u + x \frac{du}{dx}$ 于是，</p> <p>原方程</p> $\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + C$ <p>2 可化为齐次型的方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$</p> <p>解法：(1) 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时</p> $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ 属于 (2)}$ <p>(2). $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ 则</p> $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y)$ <p>令 $a_2x + b_2y = u$，则 $\frac{du}{dx} = a_2 + b_2f(u)$ 属于 (1)</p> <p>(3). $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1, c_2$ 不全为 0 解方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$</p> <p>求交点 (α, β)</p>

	<p>令 $x = X + \alpha, y = Y + \beta$, 则原方程 $\Rightarrow \frac{dy}{dX} = \varphi\left(\frac{X}{Y}\right)$ 属于 (2)</p> <p>3 一阶线性方程 $y' + p(x)y = q(x)$</p> <p>解法：用常数变易法求</p> <p>(1) 求对应齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$</p> <p>(2) 令原方程的解为 $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$</p> <p>(3) 代入原方程整理得</p> $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}$ <p>(4) 原方程通解 $y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C} \right] e^{-\int p(x)dx}$</p> <p>4 贝努里方程 $y' + p(x)y = q(x)y^n$, 其中 $n \neq 0, 1$</p> <p>解法：令 $Z = y^{1-n}$, 则方程 $\Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$,</p> $\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ 属于 3 <p>5 全微分方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 为全微分方程</p> $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 通解为 $\int_{y_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = C$
<p>可用简单的变量代换求解的某些微分方程，可降阶的高阶微分方程，线性微分方程解的性质及解的结</p>	<p>注：这里只限于讨论二阶线性方程，其结论可推广到更高阶的方程，二阶线性方程的一般形式为</p> $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (8.1)$ <p>其中 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数，当右端项 $f(x) \equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程。</p> <p>解的性质与结构(以下性质可推广到任意高阶的线性方程)</p> <p>分以下几种：</p> <p>1 若 $y_1(x), y_2(x)$ 为齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (8.2) 的两</p>

<p>构造定理</p>	<p>个特解, 则其线性组合 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 仍为(8.2)的解, 特别地, 若 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 (即 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda(\text{常数})$), 则(8.2)的通解为 $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$</p> <p>2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为非线性方程(8.1)的两个特解, 则其差 $y_1(x) - y_2(x)$ 为相应齐次方程(8.2)的特解</p> <p>3 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(8.1)的一个特解, $y(x)$ 为齐次方程(8.2)的任意特解, 则其和 $y^*(x) + y(x)$ 为(8.1)的解, 特别地, 若 $y_1(x), y_2(x)$ 为(8.2)两个线性无关的特解, 则(8.1)的通解为 $y(x) = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.</p>
<p>二阶常系数奇次线性微分方程, 高于二阶的某些常系数奇次线性微分方程</p>	<p>1 二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ (1) 其中 p, q 均为常数</p> <p>解法: 特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$</p> <p>(I) 当 λ_1, λ_2 为相异的特征根时, 方程(1)通解为 $y(x) = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$</p> <p>(II) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1x}$</p> <p>(III) 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (复根) 时, 通解为 $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$</p> <p>2 n 阶常系数齐次线性方程</p> <p>此种方程的一般形式为 $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \cdots + p_ny = 0 (*)$, 其中 $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 为常数, 相应的特征方程为 $\lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + p_2\lambda^{(n-2)} + \cdots + p_n = 0$</p> <p>特征根与通解的关系同二阶方程的情形相类似, 具体结果为:</p> <p>(1) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是个 n 相异实根, 则方程(*)的通解为</p>

	$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$ <p>(2) 若 $\lambda = \lambda_0$ 为特征方程的 $k(k \leq n)$ 重实根, 则 $(*)$ 的通解中含有: $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_0 x}$</p> <p>(3) 若 $\alpha + i\beta$ 为特征方程的 $k(2k \leq n)$ 重共轭复根, 则 $(*)$ 的通解中含有:</p> $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$ <p>由于我们不能求出一般的三次以上代数方程的根, 也就是说对于三次以上的特征方程一般不能得到齐特征根, 自然也就不能求出三阶以上常系数齐次线性微分方程的通解, 能够求出的只是某些特殊情形</p>
简单的二阶常系数非奇次线性微分方程, 欧拉方程, 微分方程简单应用	<p>1 二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ (2) 其中 p, q 均为常数</p> <p>解法: 通解的求法程序</p> <p>(1). 求对应齐次方程的通解 $Y(x)$</p> <p>(2). 求出(2)的特解 $y^*(x)$</p> <p>(3). 方程(2)的通解 $y = Y(x) + y^*(x)$</p> <p>方程(2)特解 $y^*(x)$ 的求法有三种: 微分算子法、常数变易法、待定系数法.</p> <p>2 形如 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$ 的方程成为欧拉方程.</p>

二、线性代数

(一) 行列式

考试内容	对应公式、定理、概念
行列式的概念和基本性质、行列式按行(列)展开定理	<p>行列式按行(列)展开定理</p> <p>(1) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} A , i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$</p> <p>或 $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} A , i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$</p> <p>即 $AA^* = A^*A = A E$, 其中</p> $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}) = (A_{ij})^T$ <p>(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $AB = A B = B A = BA$</p> <p>但 $A \pm B = A \pm B$ 不一定成立</p> <p>(3) $kA = k^n A$, A 为 n 阶方阵</p> <p>(4) 设 A 为 n 阶方阵, 则 $A^T = A$; $A^{-1} = A ^{-1}$ (若 A 可逆) $A^* = A ^{n-1}$ ($n \geq 2$)</p> <p>(5) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = A B$, A, B 为方阵,</p> <p>但 $\begin{vmatrix} O & A_{m \times m} \\ B_{n \times n} & O \end{vmatrix} = (-1)^{nm} A B$.</p>

	<p>(6)范德蒙行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$</p> <p>设 A 是 n 阶方阵, $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的 n 个特征值, 则</p> <p>$A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$</p>
--	---

(二) 矩阵

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的概念, 矩阵的线性运算, 矩阵的乘法,	<p>矩阵: $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的表格</p> $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 称}$ <p>为矩阵, 简记为 A, 或 $(a_{ij})_{m \times n}$. 若 $m=n$, 则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵.</p> <p>矩阵的线性运算</p> <p>1 矩阵的加法 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记为 $A+B=C$</p> <p>2 矩阵的数乘 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记为 kA.</p> <p>3 矩阵的乘法 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中</p>

	$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 称为 A 与 B 的乘积的乘积, 记为 $C = AB$
<p>方阵的 幂, 方阵 乘积的行 列式, 矩 阵的转 置, 逆矩 阵的概念 和性质, 矩阵可逆 的充要条 件, 伴随 矩阵,</p>	<p>1 A^T、A^{-1}、A^* 三者之间的关系</p> <p>1) $(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$</p> <p>2) $(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, 但 $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$ 不一定成立,</p> <p>3) $(A^*)^* = A \mid A \mid^{n-2} A (n \geq 3), (AB)^* = B^* A^*,$ $(kA)^* = k^{n-1} A^* (n \geq 2)$. 但 $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$ 不一定成立</p> <p>4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*$</p> <p>2 有关 A^* 的结论</p> <p>1) $AA^* = A^* A = A \mid E$</p> <p>2) $\mid A^* \mid = \mid A \mid^{n-1} (n \geq 2), (kA)^* = k^{n-1} A^*, (A^*)^* = A \mid A \mid^{n-2} A (n \geq 3)$</p> <p>3) 若 A 可逆, 则 $A^* = A \mid A^{-1} \mid, (A^*)^* = \frac{1}{\mid A \mid} A$</p> <p>4) 若 A 为 n 阶方阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$</p> <p>3 有关 A^{-1} 的结论</p> <p>A 可逆 $\Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow \mid A \mid \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;$ $\Leftrightarrow A$ 可以表示为初等矩阵的乘积; $\Leftrightarrow A$ 无零特征值; $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解</p>
<p>矩阵的初 等变换, 初等矩 阵, 矩阵 的秩, 矩 阵等价,</p>	<p>1 有关矩阵秩的结论</p> <p>1) 秩 $r(A) =$ 行秩 = 列秩;</p> <p>2) $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n);$</p> <p>3) $A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1;$</p> <p>4) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B);$</p>

分块矩阵及其运算	<p>5) 初等变换不改变矩阵的秩</p> <p>6) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 特别若 $AB = O$ 则 $r(A) + r(B) \leq n$</p> <p>7) 若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(B)$; 若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(A)$; 若 $r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B)$; 若 $r(A_{m \times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A)$;</p> <p>8) $r(A_{m \times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解</p> <p>2 分块求逆公式</p> $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \quad \text{这里 } A, B \text{ 均为可逆方阵}$
----------	--

(三) 向量

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念, 向量的线性组合和线性表示, 向量的线性	<p>1 有关向量组的线性表示</p> <p>(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.</p> <p>(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 惟一线性表示.</p>

<p>相关与线性无关</p>	<p>(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$</p> <p>2 有关向量组的线性相关性</p> <p>(1) 部分相关，整体相关；整体无关，部分无关.</p> <p>(2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0$, n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$,</p> <p>② $n+1$ 个 n 维向量线性相关.</p> <p>③ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，则添加分量后仍线性无关； 或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关</p>
<p>向量组的极大线性无关组，等价向量组，向量组的秩</p>	<p>1 有关向量组的线性表示</p> <p>(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.</p> <p>(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 惟一线性表示.</p> <p>(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$</p>
<p>向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，向量空间及相关概念</p>	<p>1 设 $r(A_{m \times n}) = r$，则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为：</p> <p>(1) 若 $r(A_{m \times n}) = r = m$，则 A 的行向量组线性无关.</p> <p>(2) 若 $r(A_{m \times n}) = r < m$，则 A 的行向量组线性相关.</p> <p>(3) 若 $r(A_{m \times n}) = r = n$，则 A 的列向量组线性无关.</p>

	(4)若 $r(A_{m \times n}) = r < n$, 则 A 的列向量组线性相关
n 维向量空间的基变换和坐标变换, 过渡矩阵	<p>1 基变换公式及过渡矩阵</p> <p>若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是向量空间 V 的两组基, 则基变换公式为</p> $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) C$ <p>其中 C 是可逆矩阵, 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵</p> <p>2 坐标变换公式</p> <p>若向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 即</p> <p>$\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n$, 则向量坐标变换公式为 $X = CY$ 或 $Y = C^{-1}X$</p> <p>其中 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵</p>
向量的内积, 线性无关向量组的正交规范化方法	<p>内积: $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$</p> <p>Schmidt 正交化</p> <p>若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则可构造 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 使其两两正交, 且 β_i 仅是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 的线性组合 ($i=1, 2, \dots, n$), 再把 β_i 单位化, 记 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{ \beta_i }$, 则 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ 是规范正交向量组. 其中</p>

	$\beta_1 = \alpha_1,$ $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$ $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$ $\dots\dots\dots$ $\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}$
规范正交基, 正交矩阵及其性质	<p>1 正交基及规范正交基</p> <p>向量空间一组基中的向量如果两两正交, 就称为正交基; 若正交基中每个向量都是单位向量, 就称其为规范正交基</p>

(四) 线性方程组

[illegible]

	<p>一解，一般地， $r(A_{m \times n}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解.</p>
非奇次线性方程组有解的充分必要条件，线性方程组解的性质和解的结构	<p>1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，若 $r(A_{m \times n}) = m$，则对 $Ax = b$ 而言必有 $r(A) = r(A:b) = m$，从而 $Ax = b$ 有解.</p> <p>2 设 x_1, x_2, \dots, x_s 为 $Ax = b$ 的解，则 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_s x_s$ 当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 时仍为 $Ax = b$ 的解；但当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 0$ 时，则为 $Ax = 0$ 的解. 特别 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 为 $Ax = b$ 的解；$2x_3 - (x_1 + x_2)$ 为 $Ax = 0$ 的解.</p> <p>3 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}) \Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.</p>
奇次线性方程组的基础解系和通解，解空间，非奇次线性方程组的通解.	<p>1 齐次方程组 $Ax = 0$ 恒有解(必有零解). 当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax = 0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n - r(A)$，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系.</p> <p>2 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，即</p> <p>(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的解；</p> <p>(2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关；</p> <p>(3) $Ax = 0$ 的任一解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出.</p> <p>$k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的通解，其中 k_1, k_2, \dots, k_t 是任意常数.</p>

(五) 矩阵的特征值和特征向量

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的特征值和特征向量	<p>1 设 λ 是 A 的一个特征值，则</p> <p>$kA, aA + bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*$ 有一个特征值分别为</p>

<p>征向量的概念及性质，</p>	<p>$k\lambda, a\lambda + b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{ A }{\lambda}$, 且对应特征向量相同 ($A^T$ 例外) .</p> <p>2 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \prod_{i=1}^n \lambda_i = A$</p> <p>从而 $A \neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值.</p> <p>3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值, 对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 若</p> <p>$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$, 则</p> <p>$A^n\alpha = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \dots + k_sA^n\alpha_s = k_1\lambda_1^n\alpha_1 + k_2\lambda_2^n\alpha_2 + \dots + k_s\lambda_s^n\alpha_s$</p>
<p>相似变换、相似矩阵的概念及性质，</p>	<p>1 若 $A \sim B$, 则</p> <p>(1) $A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*$.</p> <p>(2) $A = B , \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}, r(A) = r(B)$</p> <p>(3) $\lambda E - A = \lambda E - B$, 对 $\forall \lambda$ 成立</p>
<p>矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵，</p>	<p>1 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个 k_i 重根特征值 λ_i, 有 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$</p> <p>2 设 A 可对角化, 则由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 有 $A = P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$</p> <p>3 重要结论</p> <p>(1) 若 $A \sim B, C \sim D$, 则 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$.</p> <p>(2) 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), f(A) = f(B)$, 其中 $f(A)$ 为关于 n 阶方阵 A 的多项式.</p> <p>(3) 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数(重根重复计算) = 秩(A)</p>
<p>实对称矩</p>	<p>1 相似矩阵: 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩</p>

阵的特征值、特征向量及相似对角阵	<p>阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP$ 成立, 则称矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$.</p> <p>2 相似矩阵的性质</p> <p>如果 $A \sim B$ 则有</p> <p>(1) $A^T \sim B^T$</p> <p>(2) $A^{-1} \sim B^{-1}$ (若 A, B 均可逆)</p> <p>(3) $A^k \sim B^k$ (k 为正整数)</p> <p>(4) $\lambda E - A = \lambda E - B$, 从而 A, B 有相同的特征值</p> <p>(5) $A = B$, 从而 A, B 同时可逆或同时不可逆</p> <p>(6) 秩 $(A) = \text{秩}(B)$, $\lambda E - A = \lambda E - B$, A, B 不一定相似</p>
------------------	---

(六) 二次型

考试内容	对应公式、定理、概念
二次型及其矩阵表示, 合同变换与合同矩阵, 二次型的秩	<p>1 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次函数</p> $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ 其中 } a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n), \text{ 称}$ <p>为 n 元二次型, 简称二次型. 若令</p> $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ 这二次型 } f \text{ 可改写成矩阵}$ <p>向量形式 $f = x^T A x$. 其中 A 称为二次型矩阵, 因为</p> <p>$a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.</p>

<p>惯性定理，二次型的标准形和规范形</p>	<p>1 惯性定理</p> <p>对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理.</p> <p>2 标准形</p> <p>二次型 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 经过合同变换 $x = Cy$ 化为</p> $f = x^T A x = y^T C^T A C y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2 \text{ 称为}$ <p>f ($r \leq n$) 的标准形. 在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A)$ (的秩) 唯一确定.</p> <p>3 规范形</p> <p>任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形</p> $f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2, \text{ 其中 } r \text{ 为 } A \text{ 的秩, } p \text{ 为正惯性指数, } r-p \text{ 为负惯性指数, 且规范型唯一.}$
<p>用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性</p>	<p>1 设 A 正定 $\Rightarrow kA (k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定; $A > 0, A$ 可逆;</p> <p>$a_{ii} > 0$, 且 $A_{ii} > 0$</p> <p>2 A, B 正定 $\Rightarrow A+B$ 正定, 但 AB, BA 不一定正定</p> <p>3 A 正定 $\Leftrightarrow f(x) = x^T A x > 0, \forall x \neq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式全大于零</p> <p>$\Leftrightarrow A$ 的所有特征值大于零</p> <p>$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n</p> <p>$\Leftrightarrow \exists$ 可逆阵 P 使 $A = P^T P$</p>

$$\Leftrightarrow \text{存在正交矩阵 } Q, \text{ 使 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0, i=1, 2, \dots, n$. 正定 $\Rightarrow kA (k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定;

$|A| > 0, A$ 可逆; $a_{ii} > 0$, 且 $|A_{ii}| > 0$

三、概率论与数理统计

(一) 随机事件和概率

考试内容	对应概念、定理、公式
随机事件与样本空间, 事件的关系与运算, 完全事件组	<p>1 事件的关系与运算</p> <p>(1)子事件: $A \subset B$, 若 A 发生, 则 B 发生.</p> <p>(2)相等事件: $A=B$, 即 $A \subset B$, 且 $B \subset A$.</p> <p>(3)和事件: $A \cup B$ (或 $A+B$), A 与 B 中至少有一个发生.</p> <p>(4)差事件: $A-B$, A 发生但 B 不发生.</p> <p>(5)积事件: $A \cap B$ (或 AB), A 与 B 同时发生.</p> <p>(6)互斥事件 (互不相容): $A \cap B = \emptyset$.</p> <p>(7)互逆事件 (对立事件): $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = \Omega$, 记 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$</p> <p>2 运算律:</p> <p>(1)交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$</p> <p>(2)结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$</p> <p>(3)分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$</p> <p>3 德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$</p> <p>4 完全事件组: A_1, A_2, \dots, A_n, 两两互斥, 且和事件为必然事件, 即 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.</p>
概率的概念, 概率的基本性质, 古典概率, 几何型概率	<p>1 概率: 事件发生的可能性大小的度量, 其严格定义如下: 概率 $P(\cdot)$ 为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数:</p> <p>(1)对任何事件 A, $P(A) \geq 0$;</p> <p>(2)对必然事件 Ω, $P(\Omega) = 1$;</p>

	<p>(3) 对 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.</p> <p>2 概率的基本性质</p> <p>(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;</p> <p>(2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$;</p> <p>(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$; 特别,</p> <p>当 $B \subset A$ 时, $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 且 $P(B) \leq P(A)$;</p> <p>$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC)$ $- P(AC) + P(ABC)$;</p> <p>(4) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.</p> <p>3 古典型概率: 实验的所有结果只有有限个, 且每个结果发生的可能性相同, 其概率计算公式:</p> $P(A) = \frac{\text{事件}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$ <p>4 几何型概率: 样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域, 且每个样本点的出现具有等可能性, 其概率计算公式:</p> $P(A) = \frac{A\text{的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积、体积)}}$
<p>概率的基本公式, 事件的独立性, 独立重复试验</p>	<p>1 概率的基本公式:</p> <p>(1) 条件概率:</p> $P(B A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$ <p>表示 A 发生的条件下, B 发生的概率</p> <p>(2) 全概率公式:</p>

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i), B_i B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega.$$

$$(3) \text{ Bayes 公式: } P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}, j = 1, 2, \dots, n$$

注：上述公式中事件 B_i 的个数可为可列个。

(4)乘法公式：

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) = P(A_2) P(A_1 | A_2)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

2 事件的独立性

(1) A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

(2) A, B, C 两两独立

$$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); P(BC) = P(B)P(C);$$

$$P(AC) = P(A)P(C);$$

(3) A, B, C 相互独立

$$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); \quad P(BC) = P(B)P(C);$$

$$P(AC) = P(A)P(C); \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

3 独立重复试验：将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p ，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为：

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

4 重要公式与结论

$$(1) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

$$(3) P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$(4) P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$

(5) 条件概率 $P(\square | B)$ 满足概率的所有性质，

	<p>例如: $P(\bar{A}_1 B) = 1 - P(A_1 B)$</p> $P(A_1 \cup A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) - P(A_1 A_2 B)$ $P(A_1 A_2 B) = P(A_1 B)P(A_2 A_1 B)$ <p>(6) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则 $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$,</p> $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$ <p>(7) 互斥、互逆与独立性之间的关系:</p> <p>A 与 B 互逆 $\Rightarrow A$ 与 B 互斥, 但反之不成立, A 与 B 互斥 (或互逆) 且均非零概率事件 $\Rightarrow A$ 与 B 不独立.</p> <p>(8) 若 $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ 相互独立, 则 $f(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 与 $g(B_1, B_2, \dots, B_n)$ 也相互独立, 其中 $f(\square), g(\square)$ 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件, 另外, 概率为 1 (或 0) 的事件与任何事件相互独立.</p>
--	--

(二) 随机变量及其概率分布

考试内容	对应公式、概念、定理
随机变量, 随机变量的分部函数的概念及其性质	<p>1 随机变量及概率分布: 取值带有随机性的变量, 严格地说是定义在样本空间上, 取值于实数的函数称为随机变量, 概率分布通常指分布函数或分布律</p> <p>2 分布函数的概念与性质</p> <p>定义: $F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$</p> <p>性质: (1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (2) $F(x)$ 单调不减</p> <p>(3) 右连续 $F(x+0) = F(x)$ (4) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$</p>
离散型随机变量的概率分布, 连续型随机变量的概率	<p>1 离散型随机变量的概率分布</p> $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots \quad p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ <p>2 连续型随机变量的概率密度</p> <p>概率密度 $f(x)$; 非负可积, 且</p>

密度性质	<p>(1) $f(x) \geq 0$,</p> <p>(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$</p> <p>(3) x为$f(x)$的连续点, 则$f(x) = F'(x)$分布函数$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$</p>
常见随机变量的概率分布, 随机变量函数的概率分布	<p>1 常见分布</p> <p>(1) 0-1 分布: $P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1$</p> <p>(2) 二项分布 $B(n, p)$:</p> $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$ <p>(3) Poisson 分布 $p(\lambda)$:</p> $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ <p>(4) 均匀分布 $U(a, b)$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$</p> <p>(5) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$:</p> $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty$ <p>(6) 指数分布 $E(\lambda)$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$</p> <p>(7) 几何分布 $G(p)$: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, 0 < p < 1, k = 1, 2, \dots$</p> <p>(8) 超几何分布</p> $H(N, M, n): P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$ <p>2 随机变量函数的概率分布</p> <p>(1) 离散型: $P(X = x_i) = p_i, Y = g(X)$ 则</p> $P(Y = y_j) = \sum_{g(x_i)=y_j} P(X = x_i)$ <p>(2) 连续型: $X \sim f_X(x), Y = g(x)$ 则</p>

	$F_y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f_x(x) dx,$ $f_y(y) = F'_y(y)$ <p>3 重要公式与结论</p> <p>(1) $X \sim N(0,1) \Rightarrow \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0) = \frac{1}{2},$ $\Phi(-a) = P(X \leq -a) = 1 - \Phi(a)$</p> <p>(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 且 $P(X \leq a) = \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})$</p> <p>(3) $X \sim E(\lambda) \Rightarrow P(X > s + t X > s) = P(X > t)$</p> <p>(4) $X \sim G(p) \Rightarrow P(X = m + k X > m) = P(X = k)$</p> <p>(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数；连续型随机变量的分布函数为连续函数，但不一定为处处可导函数.</p> <p>(6) 存在既非离散也非连续型随机变量.</p>
--	---

(三) 多维随机变量及其分布

考试内容	对应公式、概念、定理
多维随机变量及其分布，二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布	<p>1 二维随机变量及其联合分布</p> <p>由两个随机变量构成的随机向量 (X, Y)，联合分布为 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$</p> <p>2 二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布、条件分布</p> <p>(1) 联合概率分布律 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}; i, j = 1, 2, \dots$</p> <p>(2) 边缘分布律 $p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots$ $p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots$</p> <p>(3) 条件分布律</p>

	$P\{X = x_i Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y = y_j X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}$
二维连续性随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度	<p>1 联合概率密度 $f(x, y)$:</p> <p>(1) $f(x, y) \geq 0$</p> <p>(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$</p> <p>2 分布函数: $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$</p> <p>3 边缘概率密度:</p> $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ <p>4 条件概率密度: $f_{X Y}(x y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad f_{Y X}(y x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$</p>
随机变量的独立性和不相关性, 常用二维随机变量的分布	<p>1 常见二维随机变量的联合分布</p> <p>(1) 二维均匀分布: $(x, y) \square U(D)$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$</p> <p>(2) 二维正态分布: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$</p> $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ $\square \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$ <p>2 随机变量的独立性和相关性</p> <p>X 和 Y 的相互独立 $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$,</p> <p>$\Leftrightarrow p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}$ (离散型) $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ (连续型)</p> <p>X 和 Y 的相关性: 相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关,</p>

	否则称 X 和 Y 相关
两个及两个以上随机变量简单函数的分布	1 两个随机变量简单函数的概率分布
	(1)离散型:
	$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, Z = g(X, Y)$ 则
	$P(Z = z_k) = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{g(x_i, y_j) = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$
	(2)连续型:
	$(X, Y) \sim f(x, y), Z = g(X, Y)$ 则
	$F_z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy, \quad f_z(z) = F'_z(z)$
	2 重要公式与结论
	(1) 边缘密度公式:
	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$
	(2) $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$
	(3)若 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 则有
	① $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$
	② X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$, 即 X 与 Y 不相关.
	③ $C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2 + 2C_1 C_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho).$
	④ X 关于 $Y=y$ 的条件分布为:
	$N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2)).$
	⑤ Y 关于 $X=x$ 的条件分布为:
	$N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2)).$
	(4)若 X 与 Y 独立, 且分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0)$,
	$C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2).$

	(5)若 X 与 Y 相互独立, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为连续函数, 则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 也相互独立.
--	--

(四) 随机变量的数字特征

考试内容	对应概念、定义、定理、公式
随机变量的数学期望 (均值)、方差和标准差及其性质	<p>1 数学期望</p> <p>离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i$; 连续型:</p> $X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ <p>性质:</p> <p>(1) $E(C) = C, E[E(X)] = E(X)$</p> <p>(2) $E(C_1X + C_2Y) = C_1E(X) + C_2E(Y)$</p> <p>(3)若 X 和 Y 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$</p> <p>(4)$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$</p> <p>2 方差: $D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$</p> <p>3 标准差: $\sqrt{D(X)}$,</p> <p>4 离散型: $D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$</p> <p>5 连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$</p> <p>性质:</p> <p>(1) $D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0$</p> <p>(2)$X$ 与 Y 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$</p> <p>(3) $D(C_1X + C_2Y) = C_1^2 D(X)$</p> <p>(4)一般有</p>

	$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$ <p>(5) $D(X) < E(X - C)^2, C \neq E(X)$</p> <p>(6) $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = C\} = 1$</p>
<p>随机变量函数的数学期望，矩、协方差，相关系数的数字特征</p>	<p>1 随机变量函数的数学期望</p> <p>(1) 对于函数 $Y = g(x)$</p> <p>X 为离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i$; X 为连续型: $X \sim f(x), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$</p> <p>(2) $Z = g(X, Y); (X, Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$;</p> $E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ $(X, Y) \sim f(x, y); E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$ <p>2 协方差 $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$</p> <p>3 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, k 阶原点矩 $E(X^k)$;</p> <p>k 阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^k\}$</p> <p>性质:</p> <p>(1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$</p> <p>(2) $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$</p> <p>(3) $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$</p> <p>(4) $\rho(X, Y) \leq 1$</p> <p>(5) $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$, 其中 $a > 0$</p> <p>$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$, 其中 $a < 0$</p> <p>4 重要公式与结论</p>

	<p>(1) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$</p> <p>(2) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$</p> <p>(3) $\rho(X, Y) \leq 1$, 且</p> <p style="padding-left: 40px;">$\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$, 其中 $a > 0$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$, 其中 $a < 0$</p> <p>(4) 下面 5 个条件互为充要条件:</p> <p>$\rho(X, Y) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow E(X, Y) = E(X)E(Y)$</p> <p>$\Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$</p> <p>$\Leftrightarrow D(X - Y) = D(X) + D(Y)$</p> <p>注: X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件, 但非必要条件.</p>
--	---

(五) 大数定律和中心极限定理

考试内容	对应概念、定理、重要公式
切比雪夫 (Chebyshev) 不等式, 切比雪夫大数定律	<p>1 切比雪夫不等式: $P\{ X - E(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 或</p> <p style="padding-left: 40px;">$P\{ X - E(X) < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$</p> <p>2 切比雪夫大数定律: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 且 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots)$, 则对于任意正数 ε, 有</p> <p style="padding-left: 40px;">$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right < \varepsilon\right\} = 1$</p>
伯努利大数定律, 辛钦 (Khinc)	<p>1 伯努利大数定律</p> <p>设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 同 0-1 分布 $B(1, p)$, 则对任意</p>

<p>hine) 大数定律</p>	<p>正数 ε , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right < \varepsilon \right\} = 1$</p> <p>2 辛钦大数定律</p> <p>设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立同分布, $EX_i = \mu, i=1, 2, \dots$, 则对于任</p> <p>意正数 ε , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right < \varepsilon \right\} = 1$</p>
<p>隶莫弗—拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 定理, 列维—林德伯格 (Levy-Undbe) 定理</p>	<p>1 棣莫弗---拉普斯定理</p> <p>设 $\eta_n \sim B(n, p)$, (即 X_1, X_2, \dots, X_n, 相互独立且同服从 0-1 分布 $\eta_n = \sum_{i=1}^n X_i$) 则有</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ <p>2 列维---林德伯格定理</p> <p>设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立分布,</p> <p>$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (\sigma \neq 0) i=1, 2, \dots$,</p> $\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

(六) 数理统计的基本概念

考试内容	对应公式、概念、定理
<p>总体, 个体, 简单随机样本, 统计量, 样本</p>	<p>总体: 研究对象的全体, 它是一个随机变量, 用 X 表示</p> <p>个体: 组成总体的每个基本元素</p> <p>简单随机样本: 来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n, 称为容量为 n 的</p>

<p>均值, 样本方差和样本矩</p>	<p>简单随机样本, 简称样本</p> <p>统计量: 设 X_1, X_2, \dots, X_n, 是来自总体 X 的一个样本, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本的连续函数, 且 $g(\square)$ 中不含任何未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量</p> <p>样本均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$</p> <p>样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$</p> <p>样本矩: 样本 k 阶原点矩: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k=1, 2, \dots$</p> <p>样本 k 阶中心矩: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k=1, 2, \dots$</p>
<p>χ^2 分布, t 分布, F 分布, 分位数</p>	<p>χ^2 分布: $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$, 其中 X_1, X_2, \dots, X_n, 相互独立, 且同服从 $N(0,1)$</p> <p>t 分布: $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ 其中 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立</p> <p>F 分布: $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$, 其中 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立</p> <p>分位数: 若 $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$, 则称 x_α 为 X 的 α 分位数</p>
<p>正态总体的常用样本分布</p>	<p>1 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,</p> <p>$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则</p> <p>(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 或 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$</p> <p>(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$</p> <p>(3) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$</p>

$$(4) \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

重要公式与结论

(1) 对于 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 有 $E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n$;

(2) 对于 $T \sim t(n)$, 有 $E(T) = 0, D(T) = \frac{n}{n-2} (n > 2)$;

(3) 对于 $F \sim F(m, n)$, 有

$$\frac{1}{F} \sim F(n, m), F_{\alpha/2}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n, m)};$$

(4) 对于任意总体 X , 有

$$E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X), D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}$$

(七) 参数估计

考试内容	对应公式、概念、定理
点估计的概念, 估计量与估计值, 矩估计法, 最大似然估计	<p>1 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计, $g(x)$ 为连续函数, 则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计.</p> <p>2 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似数估计, $g(x)$ 为单调函数, 则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计</p> <p>3 $E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X)$, 即 \bar{X}, S^2 分别为总体 $E(X)$, $D(X)$ 的无偏估计量.</p> <p>4 由大数定律易知 \bar{X}, S^2 也分别是 $E(X)$, $D(X)$ 的一致估量.</p> <p>5 若 $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计.</p>

法				
估计量的评选标准	1 估计量的选取标准：无偏性、有效性、相合性			
区间估计的概念	2 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间， $g(x)$ 为单调增加（或单调减少）函数，则 $(g(\hat{\theta}_1), g(\hat{\theta}_2))$ 或 $(g(\hat{\theta}_2), g(\hat{\theta}_1))$ 为 $g(\theta)$ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间			
单个正态总体的均值和方差的区间估计，两个正态总体的均值差和方差比的区间估计	正态总体均值与方差的置信区间			
	待估参数		抽样分布	
			双侧置信区间	
	μ	σ^2 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}})$ $P\{ \mu \geq \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
		σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
	σ^2	μ 已知	$W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)})$ $P\{W' \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\} = \frac{\alpha}{2}$ $P\{W' \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\} = \frac{\alpha}{2}$
		μ 未知	$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$

		σ_1^2, σ_2^2 已知	$U = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \right. \\ \left. (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$ $P\{ U \geq \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
	μ_1 — μ_2	已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 未知	$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \right. \\ \left. (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$ $P\{ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
		$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left(\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}, \right. \\ \left. F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$ $P\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} = \frac{\alpha}{2}$ $P\{\frac{1}{F} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)\} = \frac{\alpha}{2}$

(八) 假设检验

考试内容	对应公式、概念、定理
显著性检验, 假设	1 假设检验的一般步骤 (1) 确定所要检验的基本假设 H_0 ; (2) 选择检验的统计量, 并要求知道其在一定条件下的分布;

<p>检验的两类错误</p>	<p>(3)对确定的显著性水平 α , 查相应的概率分布, 得临界值, 从而确定否定域;</p> <p>(4)由样本计算统计量, 并判断其是否落入否定域, 从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断</p> <p>2 假设检验的两类错误</p> <p>统计推断是由样本推断总体, 所作的结论不能保证绝对不犯错误, 而只能以较大概率来保证其可靠性.</p> <p>第一类错误是否定了真实的假设, 即假设本来成立, 但被错误地否认了, 成为“弃真”, 检验水平 α 就是犯第一类错误的概率的最大允许值.</p> <p>第二类错误是把本来不成立的假设错误地接受了, 称为“存伪”. 犯这类错误的大小一般用 β 表示, 它的大小要视具体情况而定.</p>			
<p>单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验</p>		<p>原假设 H_0</p>	<p>H_0 下的检验统计量及分布</p>	<p>H_0 的拒绝域</p>
	<p>一个正态总体</p>	<p>$\mu = \mu_0$ (σ^2已知)</p>	<p>$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $\sim N(0,1)$</p>	<p>$u = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$</p>
		<p>$\mu = \mu_0$ (σ^2未知)</p>	<p>$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ $\sim t(n-1)$</p>	<p>$t = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$</p>
		<p>$\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ已知)</p>	<p>$W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2$ $\sim \chi^2(n)$</p>	<p>$w = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $w \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$</p>
		<p>$\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)</p>	<p>$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim \chi^2(n-1)$</p>	<p>$w = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $w \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$</p>

两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$ u = \frac{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta }{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$ t = \frac{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta }{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2 未知)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ $\sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $f \leq F_{\frac{\alpha}{2}}^{-1}(n_2 - 1, n_1 - 1)$

四、初等数学公式

初等代数

1. 乘法公式与因式分解

$$(1)(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(2)(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(3)a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(4)(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(5)a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(6)a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

2. 比例($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$)

$$(1)\text{合比定理} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$(2)\text{分比定理} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$(3)\text{合分比定理} \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$(4)\text{若} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{则令} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = t. \text{于是} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$(5)\text{若} y \text{与} x \text{成正比, 则} y = kx (k \text{为比例系数})$$

$$(6)\text{若} y \text{与} x \text{成反比, 则} y = \frac{k}{x} (k \text{为比例系数})$$

3. 不等式

$$(1) \text{ 设} a > b > 0, n > 0, \text{ 则} a^n > b^n$$

$$(2) \text{ 设} a > b > 0, n \text{ 为正整数, 则} \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

$$(3) \text{ 设} \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ 则} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

(4)非负数的算术平均值不小于其几何平均值，即

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

(5)绝对值不等式

$$1) |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$2) |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$3) |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$4) -|a| \leq a \leq |a|$$

4. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

$$(1) \text{根: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(2) \text{韦达定理: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(3) \text{判别式 } \Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, \text{方程有两不等实根} \\ = 0, \text{方程有两相等实根} \\ < 0, \text{方程有两共轭虚根} \end{cases}$$

5. 一元三次方程的韦达定理:

若 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 , 则

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = q$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$$

6. 指数

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(6) a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

7. 对数 $\log_a N, (a > 0, a \neq 1, N > 0)$

(1) 对数恒等式 $N = a^{\log_a N}$, 更常用 $N = e^{\ln N}$

$$(2) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(4) \log_a (M^n) = n \log_a M$$

$$(5) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

$$(6) \text{换底公式} \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$(7) \log_a 1 = 0$$

$$(8) \log_a a = 1$$

8. 数列

(1) 等差数列

设 a_1 ---- 首项, a_n ---- 通项

d ---- 公差, S_n ---- 前 n 项和

$$1) a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$2) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$$

$$3) \text{ 设 } a, b, c \text{ 成等差数列, 则等差中项 } b = \frac{1}{2}(a + c)$$

(2) 等比数列

设 a_1 ---- 首项, q ---- 公比, a_n ---- 通项, 则

$$1) \text{ 通项 } a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2) \text{ 前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

(3) 常用的几种数列的和

$$1) 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$3) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2$$

$$4) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$4) 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

9. 排列、组合与二项式定理

(1) 排列

$$P_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(m-1)]$$

(2) 全排列

$$P_n^n = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(3) 组合

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质:

$$1) C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$2) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

(4) 二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

(一) 平面几何

1、图形面积

(1) 任意三角形

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ 其中 } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

平行四边形

$$S = bh = ab \sin \varphi$$

(2) 梯形 $S = \text{中位线} \times \text{高}$

$$(3) \text{ 扇形 } S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta$$

2、旋转体

(1) 圆柱

设 R ---底圆半径, H ---柱高, 则

$$1) \text{ 侧面积 } S_{\text{侧}} = 2\pi RH,$$

$$2) \text{ 全面积 } S_{\text{全}} = 2\pi R(H+R)$$

$$3) \text{ 体积 } V = \pi R^2 H$$

(2) 圆锥 ($l = \sqrt{R^2 + H^2}$ 母线)

$$1) \text{ 侧面积 } S_{\text{侧}} = \pi Rl$$

$$2) \text{ 全面积 } S_{\text{全}} = \pi R(l+R)$$

$$3) \text{ 体积 } V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

(3) 球

设 R ----半径, d ----直径, 则

1) 全面积 $S_{\text{全}} = 4\pi R^2$

2) 体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

(4) 球缺(球被一个平面所截而得到的部分)

1) 面积 $S = 2\pi Rh$ (不包括底面)

2) 体积 $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$

3. 棱柱及棱锥

设 S ----底面积, H ----高:

(1) 棱柱体积 $V = SH$

(2) 棱锥体积 $V = \frac{1}{3}SH$

(3) 正棱锥侧面积 $A = \frac{1}{2} \times \text{母线} \times \text{底周长}$

三、平面三角

1. 三角函数间的关系

(1) $\sin \alpha \csc \alpha = 1$

(2) $\cos \alpha \sec \alpha = 1$

(3) $\tan \alpha \cot \alpha = 1$

(4) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(5) $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

(6) $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

(7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

2 倍角三角函数

(1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

(3) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

(4) $\cot 2\alpha = \frac{1 - \cot^2 \alpha}{2 \cot \alpha}$

$$(5) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(6) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

3. 三角函数的和差化积与积化和差公式

$$(1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(2) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(3) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(4) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(5) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$(6) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$(7) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$(8) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

4. 边角关系

(1) 正弦定理

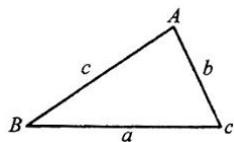
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad R \text{ 为外接圆半径}$$

(2) 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



5. 反三角函数

恒等式

$$(1) \arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})$$

$$(2) \arccos x \pm \arccos y = \arccos(xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$$

$$(3) \arctan x \pm \arctan y = \arctan\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$$

$$(4) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$(5) \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$