武漢理工大學

数学建模暑期培训论文

第 2 题

基于时间表组合优化的考试安排模型

第 4 组

姓名	方向
周斯琴	编程
左志豪	编程
费舒波	建模
杨　琛	建模
田德虎	建模
谢校康	建模

2014 年 8 月 13 日

基于时间表组合优化的考试安排模型

摘要

本文针对三种情况下的考试安排问题，建立了不同背景下的基于时间表（TTP）法的组合优化模型，并用枚举法和多约束规划方法进行求解。

对于问题一，考虑两个教室与科目连考条件下的考试安排问题，建立了以三维变量为决策变量的组合优化模型。首先，使用三维 0-1 变量 X_{ikr} 对每个同学所考科目的所在场次进行描述，并根据附件 1 所给数据和实际考试情况建立相应的约束条件，在优化计算前对考试科目所在场地的安排方案进行一次模拟，得到合理的科目-教室安排，再在每种情况下代入优化模型计算；其次，为了解决约束过多的情况，对不同约束条件进行转换，每次进行松弛处理直到得到可行解，求解过程利用 LINGO 软件进行，并对可行解进行约束检验和人工干预，得到一个最优安排。

对于问题二，考虑三个教室与转场条件下的考试安排问题，在第一问的基础上，转换决策变量并优化枚举过程，在检验环节加强人工干预，建立了结合计算机模拟的组合优化模型。首先，考虑 3 个考场下的科目-教室安排情况的优化筛选机制，达到减少枚举次数的目的，利用 0-1 变量 w_{ij} 对模拟过程进行描述，加入“单科目定场地”的约束条件对不同场地的平均考试次数进行优化，定“3 个考场考试时间的方差最小”为目标进行模拟组合，使用 MATLAB 软件求解，得到最优的前 10 种方案。接着，将 79 位考生以“考同样的科目”为标准分类，在问题一模型的基础上，用三维决策变量 X_{ikr} 描述某类考生所考科目的场次，X_{ikr} 表示该次该科目此类考生的人数，根据附件 1 的数据与实际考试情况建立约束条件，先得出不考虑转场条件下的考试安排，再统一加入最大时间间隔 6 分钟，最后对得到的安排进行模拟仿真，优化每个时间间隔，并检验与实际的冲突情况，得到合理的最优考试安排。

对于问题三，考虑两个教室的考位是连续安排问题，在第一问的基础上，建立了有二分图思想的单目标规划模型。首先，将场次的概念模糊化，使每个考位从考试开始到结束尽可能少地空闲，达到本次考试时间最短的目的。建立一个考生和所选考题的二维矩阵，取它的每一列与每个考场应考考题的交集，再将这个交集代入程序中，得出每个考场的合理安排。其次，该模型中，枚举方法和组合优化思想相结合，加入多维决策变量，制定模拟与筛选原则，使得每次安排的组合数减少并充分利用了所给数据条件，在最后对方案进行检验与人工干预，使结果更合理。

关键词：时间表法　组合优化　隐枚举　人工干预　二分图

一、问题重述

2014 年某专业职业技能考试一共有 5 道考题，其中，第一道题为必考题，其余四道题为选考题，考生在完成第一题之外还应在四道选考题中选考两道题。目前已知考生总数为 79 人，且每位考生所选的考题已经在附件 1 中列出。现有 A、B 两个考场可供考试，A、B 考场所能容纳的人数分别为 24 人和 32 人。为方便管理，同一个专业技能考题不能同时安排在两个考场，每个考场同时进行的考题数目也没有最大限制，且每个考场的考试科目和数目一旦确定就不能更改。

问题一：假设必考题考试时间为 45 分钟，选考题考试时间为 30 分钟，且考生不得提前离开考场的前提下，合理安排考场分布和考试顺序，使考试时间最短。

问题二：假设增加一个能容纳 20 人的 C 考场，结合考场之间的往返时间（附件 2）和问题一，合理安排考场分布和考试顺序。

问题三：在考生能够提前离开考场的前提下，结合问题一，合理安排每个考生的考试方式。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一需要把 5 个科目合适地分配给 A、B 两个考场，并结合每个科目所选数量进行考次的安排。对于考场安排问题，现有很多研究是从考场角度出发结合考生信息进行考场安排，但考虑到若仅从考场角度进行安排，很难保证每个考生与其他考生不冲突。为此，可以根据时间表分配[1]思想，从每个考生出发，建立所选科目、场次、考生的三维空间向量，以这三个指标为依据建立三维空间 0-1 矩阵。在一定的原则下对科目分布进行枚举，对于每一种情况建立整数规划模型，运用 lingo 进行优化求解，得到场次最少情况下考生所选的科目及场次的信息，对此结果分析，过滤掉不合要求的解，在最优解的信息中计算得到每个科目的考场分布和每个考场中各场次的安排，此安排就是最短时间下的考场分布和安排实验顺序。

通过分析，问题一建立基于时间表原理的 0-1 整数规划模型[2]，求解最短时间下的考场分布和考试顺序。

2.2 问题二的分析

问题二在第一问的基础上增加了一个场地，这使得科目的安排可能性增大，理论上可以使考试时间缩短；同时转场时间的加入使得安排场次的同时需要顾及到每次考试的开考方式，这里我们假定每次考试考完之后都加入一定的时间间隔，使得转场的同学有时间赶赴下一场考试，再开始下一轮的考试。在建立模型时可以承用模型一的框架，只是根据考生的题目的选择类型，将考生分为 5 类，通过建立关于考生数量的整数规划模型分析考试安排过程。在建立优化模型之

前，加入一次对每个科目教室安排的方案的模拟，得到较为合理的安排方案，作为建模前的准备。

得到若干不同的方案之后，对每一个方案进行场次安排的优化计算。在设置考试场次的时候先不考虑每一次考试之间的具体时间间隔，先将其人为地定为最大转场所需时间 6 分钟，保证每次安排的考试考生可以在规定时间内到达。在场次安排得出之后，进行一次仿真计算，若得到某一次所需时间间隔小于 6 分钟，则将其替换为最小时间间隔，以此作为第二次的优化过程。经过两次优化（对考试场次安排与对时间间隔安排）之后，得出合理的方法，取最优解

问题二考虑转场时间，根据时间表原理，建立关于人数的整数规划模型，求解最短时间下的考场分布和考试顺序。

2.3 问题三的分析

由于每个考生可以提前完成考试并离开考场，下一位考生可以提前进场并进行考试。故本题考场编排的原则为：每个考生应在连续的时间、连续的场次中完成所有考试；由于题目要求要使考试所用时间最短，所以在整个考试过程中使考位的冗余数尽可能最小，即要使每个考场的考位在考试开始到所有考生考试结束的过程中，尽可能多地不空闲。因此考试时间、考场 A、B 的容量、每个科目考试的最长时间以及每个科目的考生人数等都是需要考虑的因素。综上所述，对于问题三，考虑建立一个考场安排模型[3]，对每个考生和所选课题建立一个 79×3 的矩阵，根据每个考生所选择的科目得出考生的考位和考试时间，对每个考生的考试进行排序，从而得出 A、B 考场的最优化考试安排。

三、模型假设

1、问题一中假设不同考场的转场时间为 0；
2、问题一中假设每个考场内的每场考试时长以该次考试时间最长的科目来定；
3、假设每位考生都能根据考场安排做出合理的考场及场次选择；
4、问题二中考试时间间隔不多于最大转场时间；
5、问题三中假设不同科目能混考，即不同科目在同一考场的考试位置无要求；
6、问题三中假设前一位考生考完离场至下一位考生进场考试的时间忽略不计。

四、符号说明

符号	含义
X_{ikr}	考场 A 中第 r 个考生选择科目 i 在第 k 场次考试
X_{jqr}	考场 B 中第 r 个考生选择科目 j 在第 q 场次考试
y_i	科目 i 所选人次数
M_{ipg}	考场 A 中第 g 类考生选择科目 i 在第 p 场次考试的人数
M_{jpg}	考场 B 中第 g 类考生选择科目 j 在第 q 场次考试的人数
M_{krg}	考场 C 中第 g 类考生选择科目 k 在第 r 场次考试的人数
N_k	根据科目选择情况分得的五类考生中第 k 类的人数
w_{ij}	科目 j 分配在第 i 个考场
P_{i}	第 i 位考生所要考的题
D_{ji}	第 j 个考生在 i 考场考查所要考的题
t_{ip}	第 p 位考试在第 i 台机器上的使用时间
J	每个考场中所有机位的总的剩余时间
a_{pk}	第 p 位考生第 k 科的考试

五、模型的建立和求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 建模相关原理

（1）0-1 整数规划

数学规划中的变量限制为整数，且取值只能为 0、1 时，称为 0-1 整数规划[5]，一般建立线性整数规划模型，整数规划的最优解不能按照实数最优解简单取整而得到，可以通过过滤隐枚举法和分枝隐枚举法求解。0-1 整数规划属于优化问题，可以用 lingo 编程求解，当原线性规划最优解全为整数时，整数规划最优解与线性规划最优解一致，否则整数规划无最优解，此时可以通过一些智能算法求得其局部最优解作为最终的结果。

（2）时间表问题

“时间表问题”[6][7]是一类多元受限的不确定性调度问题。它在工程实施、交通营运、竞赛安排、军事指挥、课表生成等诸多领域中有着广泛的应用。

给定 n 个项目和 m 个资源，用 C_{ij} 表示将第 i 个项目分配给第 j 个资源的"代价"，则"时间表问题"即是这样的问题：它决定一个从项目到资源的最有分配，使得总的"代价"最小且能满足 k 个附加条件。即：

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}x_{ij}(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1,1\le i\le n) \quad (1)$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}r_{ijk}x_{ij}\le b_k(1\le k\le K) \quad (2)$$

其中，

$$x_{ij}=\begin{cases}1，\text{如果项目i分配给资源j；}\\0，\text{否则。}\end{cases}$$

r_{ijk} 是第 k 个附加的"代价"。

该"时间表问题"一般而言是 NP-完全性问题[5][6]，不存在多项式复杂性解法。

5.1.2 建模准备

题目中要求考试安排的总时间最少，所以两个考场应尽量同时利用，即每个考场所安排的场次要相当。模型中对于 0 和 5、1 和 4 的科题目分配不予考虑，而对于较为特殊的题目 1 给予单独考虑，若将题目 1 分配至考场 A 中，则根据题目 1 所选人数可知，必须安排四场为时 45 分钟的考试，总时间 180 分钟，所以若要时间安排小于 180 分钟，需将题目 1 安排在 B 考场，然后将 5 个题目按照 2 和 3 分配，有 C_5^2 =10 种安排，下面枚举每一种题目分配，并建立模型进行求解。

5.1.3 模型的建立

以每个考生为中心，建立一个三维矩阵 X_{ikr},其中，i 为考场的科目安排，k 为每个科目的考试场次，r 为学生人数。建立基于时间表的 0-1 整数规划模型。

目标函数为：

$$\min T=\max(T_a,T_b) \quad (3)$$

场次数最少即对应时间最短，此目标函数可以通过优化场次数来优化考试时间

约束条件为：

$$\sum_{r=1}^{79}\sum_{k=1}^{m}X_{ikr}=y_i \quad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{79}\sum_{q=1}^{m} X_{jqr} = y_j \tag{5}$$

其中 m、n 为各考场的场次数，y_i 为每个科目考试的总人次，

$$\sum_{r=1}^{79}\sum_{i} X_{ikr} \le 24, (k = 1, 2, ..., m) \tag{6}$$

$$\sum_{r=1}^{79}\sum_{j} X_{jqr} \le 32, (q = 1, 2, ..., n) \tag{7}$$

此式要求各考场每个场次的考试人数小于教室容量。

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i} X_{ikr} + \sum_{q=1}^{n}\sum_{j} X_{jqr} = 3, (r = 1, 2, ..., 79) \tag{8}$$

此式要求每个考生一共都只参加三次考试。

$$X_{1kr} + \sum_{i\neq 1} X_{ikr} + \sum_{i\neq 1} X_{i(\mathrm{k}+1)r} = 1, (r = 1, 2, ..., 79) \tag{9}$$

此式要求每个考生在同一批次考试中只能参加一个科目的考试。

$$\sum_{k=1}^{m} X_{1kr} + \sum_{q=1}^{n} X_{1qr} = 1, (r = 1, 2, ..., 79) \tag{10}$$

此式保证科目一必考。

5.1.4 模型的求解

在模型求解的过程中，由于 m、n 为变量，而 lingo 无法解决多变量问题，故对 m、n 值采用枚举的做法，结合之前分析，m、n 可取 4、5、6 三个值，即模型需计算 10×3 种情况。而这样 lingo 编程依然得不到有效解，分析原因，模型中给出的约束条件较多，且多为等式约束条件，所以考虑降低条件的约束性。求解中，将公示（9）的约束条件改为：

$$\sum_{i} X_{ikr} \le 1 \quad (\mathrm{k}=1,2,\cdots,\ \mathrm{m};\quad \mathrm{r}=1,2,\cdots 79) \tag{11}$$

$$\sum_{j} X_{jqr} \le 1 \quad (\mathrm{q}=1,2,\cdots,\mathrm{n};\quad \mathrm{r}=1,2,\cdots 79) \tag{12}$$

在新的约束条件下得到十种场次总数不同的解，每一种枚举条件下得到的是 5×m（n）×79 的三维空间矩阵，令该向量在 i-o-k 平面进行投影，即求得

$$\sum_{r=1}^{79} X_{ikr}$$

可以得到每一考场中的考场分布和安排实验顺序，计算出每个考场安排考试的总时间，选择较大的即为最终时间。在十种有效解中，可得到在 m=5，n=4 的条件下时间最短，为 165 分钟，经检验该解符合原约束条件。具体的考场及考次的安排情况如下表：

表 1 最短时间下不同科目的考场及场次安排表

	场次 1	场次 2	场次 3	场次 4	场次 5	所在教室
技能题 1	15	32	32	0	0	B
技能题 2	17	0	0	32	0	B
技能题 3	3	2	2	2	5	A
技能题 4	15	17	15	6	5	A
技能题 5	6	5	7	5	14	A

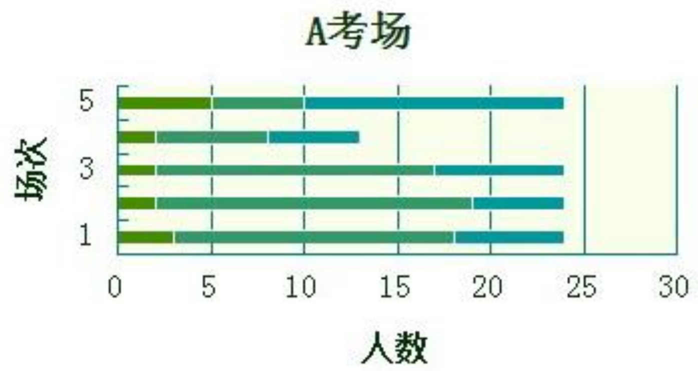

图 1　A 考场考试安排情况

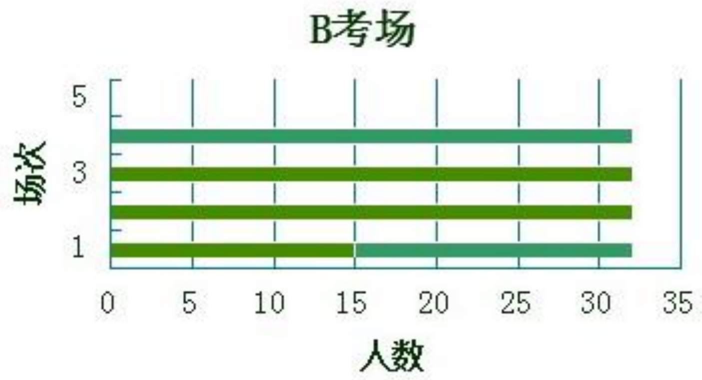

图 2　B 考场考试安排情况

5.1.5 结果分析

结果如表 1 所示，科目 1、2 安排在考场 B，科目 3、4、5 安排在考场 A，A 考场安排 5 场考试，每个场次所考科目类型及考生数量确定，由表可知，B 考场的四场考试全部排满，考场座位利用率达到 100%，A 考场只有第四场考试没

有安排满，总利用率达到 90.8%，可见这种安排的效果是比较好的。虽然没有给每位考生具体安排，但这个结果是在严格的约束条件下解出来的，只要考生能做出合理的选择，可以保证所有考生无冲突地进行完所有科目的考试，在考场高效利用的条件下得到最短时间 165 分钟是比较合理的，也说明模型相对是比较成功的。

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 建模准备

建立模型之前先对科目的教室安排方案进行一次模拟安排和方案筛选，得到较为合理的方案作为模型的求解范围和优化对象。具体模拟的方法如下：

1、设计 3 行乘 5 列的矩阵:行表示 A,B,C 三个考场，列表示 1,2,3,4,5 科目，每一个矩阵元素 w_{ij} 代表科目在考场安排情况，为 0-1 变量，0 表示科目 j 不在考场 i 进行考试，1 则表示该科目在这个考场进行考试;

表 2 科目—考场安排模拟矩阵 1

科目 / 考场	1	2	3	4	5
A(1)	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}
B(2)	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	w_{25}
C(3)	w_{31}	w_{32}	w_{33}	w_{34}	w_{35}

2、建立模拟机制的约束条件：

（1）、保证每个科目只被安排在一个考场内：

$$\sum_{i=1}^{3} w_{ij} = 1(i = 1,2,3) \qquad (13)$$

（2）、由于没有同时选择技能考试科目 3 和 4 的同学，则尽量将这两门考试安排在不同的考场中：

$$\sum_{j=3、4} w_{ij} \le 1(\mathrm{i} = 1,2,3) \qquad (14)$$

（3）、每次安排使得三个考场的平均最小考场次数尽量均匀：

对矩阵 1 每一行进行抽取得到一个行向量： $A(w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15})$ ，$B(w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}, w_{25})$，$C(w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34}, w_{35})$；每一技能科目报考人数向量为：$Y(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$，对于每一次安排的每一个教室中的考试人次数即为（以 A 为例）：

$$A \cdot Y$$

此方案中 A 考场平均最小的场次数为：

$$a = \frac{A \cdot Y}{|A|} \ (|A| \text{为考场} A \text{的容量}) \qquad (15)$$

最后得到三个考场的平均考次数a,b,c，建立如下条件来约束模拟：

$$\min f = DVAR(a,b,c) \tag{16}$$

得到一系列可行解，在里面选取三个考场平均考次数方差最小的前 10 个作为模拟的样本，得到如下结果：

方案一：

1	2	3	4	5	考场
0	1	0	0	1	A
1	0	1	0	0	B
0	0	0	1	0	C

A(2，5);B(1，3);C(4)

方案二：

1	2	3	4	5	考场
0	1	1	0	0	A
1	0	0	0	1	B
0	0	0	1	0	C

A(2，3);B(1，5);C(4)

方案三：

1	2	3	4	5	考场
0	0	0	1	0	A
1	0	0	0	1	B
0	1	1	0	0	C

A(4);B(1，5);C(2，3)

方案四：

1	2	3	4	5	考场
0	0	0	1	1	A
1	0	1	0	0	B
0	1	0	0	0	C

A(4，5);B(1，3);C(2)

方案五：

1	2	3	4	5	考场
0	0	0	1	0	A
1	1	0	0	0	B
0	0	1	0	1	C

A(4);B(1，2);C(3，5)

方案六：

1	2	3	4	5	考场
0	0	0	1	0	A
1	0	1	0	1	B
0	1	0	0	0	C

A(4);B(1，3，5);C(2)

方案七：

1	2	3	4	5	考场
0	1	0	0	0	A
1	0	1	0	1	B
0	0	0	1	0	C

A(2);B(1，3，5);C(4)

方案八：

1	2	3	4	5	考场
0	0	1	0	1	A
1	0	0	1	0	B
0	1	0	0	0	C

A(3，5);B(1，4);C(2)

方案九：

1	2	3	4	5	考场
0	1	0	0	0	A
1	0	0	1	0	B
0	0	1	0	1	C

A(2);B(1，4);C(3，5)

方案十：

1	2	3	4	5	考场
0	1	1	0	0	A
1	0	0	1	0	B
0	0	0	0	1	C

A(2，3);B(1，4);C(5)

5.2.2 模型的建立

根据考生的题目的选择类型，将考生分为 5 类，以每一类人为中心，建立关于考生数量的三维矩阵 M_{ipg} ,其中，i 为考场的科目安排，p 为每个科目的考试场次，r 考生类型。基于时间表原理建立关于人数的整数规划模型[8]。

目标函数为：

$$\min T = \max(T_a, T_b, T_c) \tag{17}$$

场次数最少即对应时间最短，此目标函数可以通过优化场次数来优化考试时间

约束条件为：

$$\sum_{i}\sum_{g=1}^{5} M_{ipg} \le 24 \quad (\text{p}=1,2,\cdots,\text{n}) \tag{18}$$

此式要求在每一场次在 A 考场考的总人数小于该考场容量。

$$\sum_{j}\sum_{g=1}^{5} M_{iqg} \le 32 \quad (\text{q}=1,2,\cdots,\text{n}) \tag{19}$$

此式要求在每一场次在 B 考场考的总人数小于该考场容量。

$$\sum_{k}\sum_{g=1}^{5} M_{krg} \le 20 \qquad (\text{r}=,2,\cdots,\text{n}) \tag{20}$$

此式要求在每一场次在 C 考场考的总人数小于该考场容量。

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{p=1}^{n} M_{ipg} = 3N_k, (\text{k} = 1, 2, \cdots, 5) \tag{21}$$

此式要求不同选择的科目及场次总和为每类考生的总人次。

$$\sum_{g=1}^{5}\sum_{p=1}^{n} M_{ipg} = 3y_k, (i = 1, 2, \cdots, 5) \tag{22}$$

此式要求不同类考生在各个场次选择的每个科目总和为该科目所选的总人次。

5.2.3 模型的求解

对于所安排的十种方案中的每一种，均用此模型求解，用 lingo 编程求出来十种结果，计算出来每种方案的总时间，进行比较选出最短时间下的安排：

表 3 方案三的求解结果

场次 科目	1	2	3	4	5	考场
技能题1	27	23	29	0	0	B
技能题2	24	11	14	0	0	A
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	20	18	20	0	0	C
技能题5	0	13	0	24	0	A

表 4 方案六的求解结果

场次 科目	1	2	3	4	5	考场
技能题1	27	23	29	0	0	B
技能题2	20	20	9	0	0	C
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	24	11	23	0	0	A
技能题5	0	13	0	24	0	A

通过比较发现，方案三和方案六所需的总时间最短，为 147 分钟，现加入人工干预，对这两种方案的时间间隔进行优化。建模过程中所有间隔均取的最大值，现就具体的安排方案进行优化，间隔小于 6 分钟替换掉，6 分钟包含在 45 分钟考试和 30 分钟考试之间的该间隔变为 0.可以得到，方案三中在 B 考场的第一二场次无需安排时间间隔，而在二三场考试间加一个 6 分钟的时间间隔，即方案的总时间为 141 分钟，为该模型的最优解。

5.2.4 结果分析

由于该模型沿用了问题一中的思想，即约束条件已经保证考生考场安排可以不存在冲突，要求考生根据自己的选择做出合适的考试安排，141 分钟的时间远小于问题中的时间，与加入一考场的原因有关，而模型进行了两次优化，保证了时间间隔做到最优化，考场利用率也很高，所以由此结果看模型相对是比较成的。

5.3 问题三模型的建立和求解

5.3.1 建模准备

按照题目要求，本题考场编排的原则为：从考试开考至结束起，考位尽可能不空闲，编号为 1-79 的考生依次按照需考科目进入考场 A 完成实验 3、4、5，然后到考场 B 参加实验 1、2，当 A 考位满时，考生可先选择在考场 B 中完成实验 1、2，按考生编号依次安排完所有考生。当考位已满时，比较所有考位中结束时间最早的，安排下一个考生在此考位上参加实验，修改全局信息，使整个考试过程中考位总的冗余数最小；一个机位从考试开始到使用这个机位考试的所有考生的考试结束，机位在使用过程中不能空闲．考点机位，考试科目，考生人数，各科考试所报人数及考生编号等是需要考虑的主要因素．

5.3.2 模型的建立

在问题一得到的最短时间下求解问题三，A 考场应考 3、4、5 题，B 考场应考 1、2 题。建立基于二分图的单目标优化模型[9][10]

集合 P_{i} 表示第 i 位考生所要考的题；

$D_{1\mathrm{i}}=P_{\mathrm{i}}\cap\{1,2\}$ 表示第 i 个考生在 A 考场所要考的题；

$D_{2\mathrm{i}}=P_{\mathrm{i}}\cap\{3,4,5\}$ 表示第 i 个考生在 B 考查所要考的题。

A 考场中有 24 个考位，B 考场中有 32 个机位，79 个考生参加 5 科考试.各科的考试时间分布为 a_k，（0≤k≤5）.第 p 位考生总的考试时间为 τ_p，且满足 $\tau_p=\sum^{k} a_{pk}$，0≤p≤79.这里，a_{pk} 表示第 p 位考生第 k 科的考试时间.设第 i 个考位的占用时间为 t_i，且满足 $t_i=\sum_{p=1} t_{ip}$，0≤i≤m，这里 t_{ip} 为第 p 位考生在第 i 个考位上的占用时间

$$t_{ip}=\begin{cases}\tau_p & \text{考生p在考位i上}\\ 0 & \text{考生p不在考位i上}\end{cases}\left(T_{\mathrm{i}}=\left\{\mathrm{t_i}\middle|0\le\mathrm{i}\le\mathrm{m}\right\}\right). \tag{23}$$

其中 τ_{p} 由计算机根据二项分布随机生成.

定义一个最大的总的考试时间 t，表示总的考试时间不可能超过这个时间.

$$\mathrm{t}=\begin{cases}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{na_k}\theta/\mathrm{m} & (\text{若n/m为整数})\\ \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}}\left(\left|\mathrm{n}/\mathrm{m}\right|+1\right)\mathrm{a_k} & (\text{若n/m为小数}).\end{cases} \tag{24}$$

第 p 位考生与第 i 个机位的匹配概率[11]为

$$p_{p\,i}=\left(t-t_i-\tau_p\right)/\ , \tag{25}$$

完成所有考试所占用的整个考查所有考位的总的时间为

$$T_1=\max_{1\le i\le m} mt_i=\max_{1\le i\le m}\sum_{p=1}^{m} mt_{ip}\ , \tag{26}$$

所有考位的总的实际使用为 $T_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}t_{ip}$，则所有考位的总的剩余时间为

$J=T_1-T_2$.

要使机位使用效率最高，考位冗余数最少，也就是使所有的考位的总使用时间与所有考位的实际工作时间差 J 最小，建立优化模型如下

$$\begin{cases}\min J=\max\limits_{1\le i\le m}\sum_{p=1}^{n}mt_{ip}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}t_{ip}, \\ st.\min a_k\le t_{ip}\le\sum_{k=1}^{k}a_k\end{cases} \tag{27}$$

根据上述模型，将 A 考场和 B 考场分别代表的一个二元组〈考生，对应考场的科目〉即〈i，D_{i}〉，提交给计算机，再给计算机一个要求：同一个考生的不同实验时间没有重叠，即可得出合理的实验安排。

5.3.3 模型的求解及结果分析

由于每个考生每次考试的时间都是未知的，是一个随机数，所以模型求解时可以将产生的一系列随机数（随机数的个数等于各个考题的人数和）代入程序中，再运行程序，使得到一个最优的考生考位时间的安排.

每个人所选的每个考题所用的时间产生的一系列随机数见附录一，得到的每个考场每个考位从第一个人开始做到最后一个人离开的时间为：

表 5 每个考场各个位置上的考试总时间表

考场＼座位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A考场	73	67	73	68	83	70	72	76	87	67	89	72	89	76	79	77
B考场	84	83	75	86	84	69	75	68	92	83	80	93	89	65	65	65

考场＼座位	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
A考场	75	70	73	66	77	67	72	78								
B考场	65	76	69	67	93	65	71	72	65	69	95	72	65	69	99	72

根据图表中的结果分析，考位中使用时间最长的是 99 分钟，最短的是 65 分钟，都远小于第一问中求解出的 165 分种，可以看出像这样可以使得每个考位的空闲时间最短时，一个人做完后另一个人马上进去做，会使得每个座位的利用率最高，且各个考位最后一个人离开的时间也接近，结果是比较合理的，所以本模型的建立也比较合理。

六、 模型的评价和推广

问题一建立了基于时间表原理的 0-1 整数规划模型，该模型的创新之处在于运用时间表分配思想，以每个考生为中心建立三维空间向量，将比较复杂的考生参选考试冲突的问题转换为一系列约束条件的约束，通过场次数目优化来对时间

进行优化。根据模型求得结果来看，考场位置利用率高，时间也较短，证明模型是比较成功的。缺点是优化模型的约束条件较多，方程无最优解，求解中放宽其中一个约束条件，得到可行解，带入原约束条件中验证。该模型如果利用遗传算法等人工智能算法求解可能会得到更优化的结果。

问题二建立了关于人数的整数规划模型，该模型沿用问题一的思想，将考生分为 5 种类型，以每种类型为中心建立空间向量。该模型的优点是在建模前根据合适的原则定义了模拟机制，得到了合理的科目在考场安排的枚举数，又针对考试场次安排与时间间隔安排进行了两次优化，在场次安排优化结束后加入人工干预，可以进一步对时间间隔优化，这样就解决了一次优化中转场过于复杂的难题，模型具有很高的可行性和合理性。

问题三由于该模型没有考虑同一考生的不同科目考试时间重叠的情况，这就会导致得出的结果不尽符合要求，因此在得出结果之后还需人工对上述情况进行手动排除，这就对求解增加了难度。故在该模型的基础上，将每个考生的科目和每一科目的考试时间和场次考虑进去，让计算机自动筛选出同一考生的不同科目考试时间重叠的情况，从而使得最后的结果更加准确和更具有可信度。

七、参考文献

[1] H.Abridge,Clomputer Display of Curred Surfaces Gourand,IEEE Trans.C-20(6): 623,June,1971

[2] 邹润奇,鲁丽萍.一类考场座位安排算法的研究[J].计算机工程与设计,2009,26（6）:1514-1515

[3] 段海滨．蚁群算法理论及应用研究的进展[J]．控制与决策，2004，19(12)：1321-1326

[4] 宣华，蒋东兴，郭大勇，邹向荣．高校教务管理技术支持的创新与发展．高等工程教育研究，2005（6）

[5] 司守奎，孙玺菁.数学建模算法与应用.北京：国防工业出版社，2013 年，345-350

[6] 黄干平，陈洛资.解“时间表问题”（TTP）的启发式算法,1997

[7] Diane Zak. Programming With Microsoft Visual Basic 6.0.Thomson.2006（12）

[8] Russell S，Norvig P.人工智能——一种现代方法[M].姜哲，金奕

[**9**] Dorigo M，Gambarde 儿 a I。M．Ant coIonied for the traveling salesman problem[J]．Bio systems，1997，43：73-81．

[10] 基于蚁群算法的电子化考试考场座位编排方法.北京理工大学机电工程学院，2007.3

[11] Kaji T. Approach byant tabu agents fortraveIing salesman problem[J]Proceedings of the IEEE International con—ference on Systems，Man，and Cybernetics，200l，5：3429—3434.

附录

程序：

问题一：

```
model:
!问题一的求解;
sets:
var1/1..5/;
var2/1..10/;
var3/1..79/;
var4/1..10/;
varx(var1,var2);
vary(var1,var3);
varz(var2,var3);
var(var1,var2,var3):x,x1;
vart/1..5/:y;
varab(var1,var2):ax,bx;
!var5:m;
!var6(var1,var2):t;
```

```
endsets
data:
y=79 49 14 58 37;
m=5;     !A 的考试次数;
n=4;     !B 的考试次数;
enddata
@for(var1(i)|i#eq#3 #or# i#eq#4 #or# i#eq#5:@sum(varz(k,r)|k#le#m:x(i,k,r))=y(i));
@for(var2(k)|k#le#m:@sum(vary(i,r)|i#eq#3 #or# i#eq#4 #or# i#eq#5:x(i,k,r))<=24);
@for(var3(r):@for(var2(k)|k#le#m:@sum(var1(i)|i#eq#3 #or# i#eq#4 #or# i#eq#5:x(i,k,r))<=1));
!@for(var3(r):@sum(var2(k)|k#le#m:x(1,k,r))=1); !当技能 1 分到 A 考场时执行此语句;
@for(var:@bin(x));
@for(var:@bin(x1));
@for(var3(r):@sum(var2(k)|k#le#n:x1(1,k,r))=1); !当技能 1 分到 B 考场时执行此语句;
@for(var1(i)|i#eq#2 #or# i#eq#1:@sum(varz(k,r)|k#le#n:x1(i,k,r))=y(i));
@for(var2(k)|k#le#n:@sum(vary(i,r)|i#eq#2 #or# i#eq#1:x1(i,k,r))<=32);
@for(var3(r):@sum(varx(i,k)|i#eq#3 #or# i#eq#4 #or# i#eq#5:x(i,k,r))
    +@sum(varx(i,k)|2#eq#i #or# i#eq#1 #and# k#le#n:x1(i,k,r))=3);
@for(var3(r):@for(var2(k)|k#le#n:@sum(var1(i)|i#eq#2 #or# i#eq#1:x1(i,k,r))<=1));

@for(var1(i)|i#eq#3 #or# i#eq#4 #or# i#eq#5:@for(var2(k)|k#le#m:ax(i,k)=@sum(var3(r):x(i,k,r))));
@for(var1(i)|i#eq#2 #or# i#eq#1:@for(var2(k)|k#le#n:ax(i,k)=@sum(var3(r):x1(i,k,r))));
data:
@ole('C:\Users\Mr Zuo\Desktop\test.xlsx','A1:J5')=ax;   !数据导出;
enddata
```

问题二：

```
model:
!问题二可行方案的求解;
sets:
var1/1..3/;
var2/1..5/;
var(var1,var2):x;
var3/1..5/:y;
var4/1..3/:t;
varx:c;
```

```
endsets
data:
y=79 49 14 58 37;
enddata
x(2,1)=1;
@for(var2(j):@sum(var1(i):x(i,j))=1);
@for(var:@bin(x));
0.31<@sqrt(@sum(var1(i):(t(i)-@sum(var1:t)/3)^2)/3);
@sqrt(@sum(var1(i):(t(i)-@sum(var1:t)/3)^2)/3)<0.34;   !对方差进行约束，求出该约束下的可行解;
data:
@ole('C:\Users\Mr Zuo\Desktop\test.xlsx','A1:E3')=x;
enddata

model:
!对问题二的可行解进行优化;
data:
i1=1;j1=2;k1=2;
enddata
sets:
var1/1..5/;
var2/1..5/;
var3/1..5/;
vari/1..i1/:x1;
varj/1..j1/:x2;
vark/1..k1/:x3;
vary/1..5/:y;
varz/1..5/:z;
vara(var1,var2):a;
var(var1,var2,var3):x;
endsets
data:
x1=2;
x2=1 4;
x3=3 5;
y=11 31 7 3 27;
z=79 49 14 58 37;
l=3;
m=5;
n=3;
enddata
@for(var2(j)|j#le#l:@sum(var3(k):@sum(vari(i):x(x1(i),j,k)))<=24);
@for(var2(j)|j#le#m:@sum(var3(k):@sum(varj(i):x(x2(i),j,k)))<=32);
@for(var2(j)|j#le#n:@sum(var3(k):@sum(vark(i):x(x3(i),j,k)))<=20);
```

```
@sum(var2(j)|j#le#m:@sum(var3(k):x(1,j,k)))=z(1);
@sum(var2(j)|j#le#l:@sum(var3(k):x(2,j,k)))=z(2);
@sum(var2(j)|j#le#n:@sum(var3(k):x(3,j,k)))=z(3);
@sum(var2(j)|j#le#m:@sum(var3(k):x(4,j,k)))=z(4);
@sum(var2(j)|j#le#n:@sum(var3(k):x(5,j,k)))=z(5);

@sum(var2(j)|j#le#m:x(1,j,1))+@sum(var2(j)|j#le#l:x(2,j,1))+@sum(var2(j)|j#le
#n:x(3,j,1))=3*y(1);
@sum(var2(j)|j#le#m:x(1,j,2))+@sum(var2(j)|j#le#l:x(2,j,2))+@sum(var2(j)|j#le
#m:x(4,j,2))=3*y(2);
@sum(var2(j)|j#le#m:x(1,j,3))+@sum(var2(j)|j#le#l:x(2,j,3))+@sum(var2(j)|j#le
#n:x(5,j,3))=3*y(3);
@sum(var2(j)|j#le#m:x(1,j,4))+@sum(var2(j)|j#le#n:x(3,j,4))+@sum(var2(j)|j#le
#n:x(5,j,4))=3*y(4);
@sum(var2(j)|j#le#m:x(1,j,5))+@sum(var2(j)|j#le#m:x(4,j,5))+@sum(var2(j)|j#l
e#n:x(5,j,5))=3*y(5);
@for(var:@gin(x));

@for(var1(i):@for(var2(j):a(i,j)=@sum(var3(k):x(i,j,k))));
data:
@ole('C:\Users\Mr Zuo\Desktop\test.xlsx','A1:E5')=a;
enddata
```

问题三

```
a=zeros(1,24);
a(:)=1;
b=zeros(1,32);
b(:)=1;
for i=1:79
    for j=3:2:7
        min1=min(a);
        min2=min(b);
        if min1<=min2
            num1=find(a==min1);
            a(num1(1))=a(num1(1))+subtime(i,j);
        else
            num2=find(b==min2);
            b(num2(1))=b(num2(1))+subtime(i,j);
        end
    end
end
```

问题二中结果附录表

方案一：

场次＼科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	32	22	0	16	9	B
技能题2	24	1	24	0	0	A
技能题3	3	11	0	0	0	C
技能题4	0	10	32	16	0	B
技能题5	17	0	20	0	0	C

方案二：

场次＼科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	32	18	0	20	9	B
技能题2	19	15	15	0	0	A
技能题3	5	9	0	0	0	A
技能题4	0	14	32	12	0	B
技能题5	17	20	0	0	0	C

方案三：

场次＼科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	27	23	29	0	0	B
技能题2	24	11	14	0	0	A
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	20	18	20	0	0	C
技能题5	0	13	0	24	0	A

方案四：

场次＼科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	32	22	20	5	0	B
技能题2	19	15	15	0	0	A
技能题3	5	9	0	0	0	A
技能题4	20	18	20	0	0	C
技能题5	0	10	0	27	0	B

方案五：

场次＼科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	32	22	20	5	0	B
技能题2	15	11	20	3	0	C
技能题3	5	9	0	0	0	C
技能题4	24	10	24	0	0	A
技能题5	0	10	0	27	0	B

方案六：

场次 科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	27	23	29	0	0	B
技能题2	20	20	9	0	0	C
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	24	11	23	0	0	A
技能题5	0	13	0	24	0	A

方案七：

场次 科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	30	0	32	17	0	B
技能题2	2	32	0	15	0	B
技能题3	3	11	0	0	0	C
技能题4	24	10	24	0	0	A
技能题5	17	0	20	0	0	C

方案八：

场次 科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	27	20	30	2	0	B
技能题2	20	20	9	0	0	C
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	24	10	24	0	0	A
技能题5	0	3	2	0	32	B

方案九：

场次 科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	27	12	32	8	0	B
技能题2	24	24	1	0	0	A
技能题3	5	9	0	0	0	B
技能题4	20	18	20	0	0	C
技能题5	0	11	0	0	26	B

方案十：

场次 科目	1	2	3	4	5	所在教室
技能题1	29	9	0	9	32	B
技能题2	20	9	20	0	0	C
技能题3	14	0	0	0	0	A
技能题4	3	23	32	0	0	B
技能题5	0	13	24	0	0	A