

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》(以下简称为“竞赛章程和参赛规则”,可从全国大学生数学建模竞赛网站下载)。

我们完全明白,在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道,抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的,如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料),必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺,严格遵守竞赛章程和参赛规则,以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为,我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会,可将我们的论文以任何形式进行公开展示(包括进行网上公示,在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等)。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写): B

我们的参赛报名号为(如果赛区设置报名号的话): 17249004

所属学校(请填写完整的全名): 武汉理工大学

参赛队员(打印并签名): 1. 费舒波

2. 左志豪

3. 谢校康

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名): 黄小为

(论文纸质版与电子版中的以上信息必须一致,只是电子版中无需签名。以上内容请仔细核对,提交后将不再允许做任何修改。如填写错误,论文可能被取消评奖资格。)

日期: 2014 年 9 月 15 日

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号):

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

基于空间解析几何分析的折叠桌设计优化模型

摘 要

本文研究的是创意平板折叠桌的最优加工设计问题，基于空间解析几何模型及优化模型，描述桌脚边缘所成的曲线，确定满足最佳设计要求的加工参数。

问题一，考虑了在给定平板尺寸、木条宽度以及折叠桌高度的情况下的创意平板折叠桌的设计问题。首先，建立空间坐标系，并选取描述折叠桌动态变化过程的变量；然后，基于空间结构的几何约束，先建立连续情况下的空间几何模型，得到折叠桌在动态过程中满足的几何条件，推出桌脚边缘线的参数方程；最后，针对问题一对模型进行离散化处理，代入题目数据，利用 LINGO 软件求解加工参数，并借助 MATLAB 和三维绘图软件 CATIA 对结果进行仿真，展示动态变化过程。

问题二，考虑了以稳固性、加工工艺性、耗材量为优化设计目标的创意平板折叠桌的设计问题。首先，在给定桌高和桌面直径的情况下，根据模型一中的分析和计算，建立以平板尺寸、钢筋位置和开槽长度为决策变量的空间解析几何的多目标优化模型；然后，将部分优化目标（加工工艺性、耗材量）转化为约束条件，得到以稳固性为优化目标的单目标优化模型；最后，利用优化软件 1stOpt 采用共轭梯度法对模型进行求解，得到给定条件下的平板尺寸、钢筋位置和开槽长度三个加工工艺参数。

问题三，考虑在模型二的基础上进一步放宽约束，在合理设计的前提下，提供尽量满足客户需求的产品。首先，基于模型二，将优化目标定为从桌面边缘线、桌脚边缘线和桌的高度三个方面出发的产品与用户期望的符合程度；然后，将问题一中的空间解析集合模型进一步一般化，以适应不同的桌面边缘曲线函数，加入约束条件使方案可行；最后，根据模型，设计不同桌面曲线下的折叠桌方案，利用 1stOpt 对模型进行求解得到加工工艺参数，并对一种设计进行三维仿真。

本文中，为使结果更加精确直观，采用了 CATIA 软件将设计结果可视化，并利用 1stOpt 软件求解，最终对模型进行了检验，并进行了评价与推广。

关键词： 空间解析几何 多目标优化 共轭梯度法 动态过程仿真

一、问题重述

创意平板折叠桌的桌面呈圆形，桌脚随着铰链的活动可以平摊成一张平板，可以折叠成为一张桌子，这种折叠桌造型美观、使用方便。现以此为基础，建立数学模型讨论下列问题：

1. 给定长方形平板尺寸为 $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ ，每根木条宽 2.5 cm ，连接桌脚木条的钢筋固定在桌脚最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为 53 cm 。试建立模型描述附件视频中此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如，桌脚木条开槽的长度等）和桌脚边缘线的数学描述。

2. 折叠桌的设计应做到产品稳固性好、加工方便、用材最少。对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，例如，平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等。对于桌高 70 cm ，桌面直径 80 cm 的情形，确定最优设计加工参数。

3. 公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。根据软件要求建立数学模型，并根据模型给出几个创意平板折叠桌的设计。要求给出相应的设计加工参数，画出至少 8 张动态变化过程的示意图。

二、问题分析

本题要求建立模型，描述创意平板折叠桌的动态变化过程，并根据任意给定的设计要求确定最优设计加工参数。通过分析，结合空间解析几何的相关理论，首先根据设计要求和产品结构建立相关约束描述产品状态；其次，代入具体参数细化模型，设计相关算法并求解；最终给出设计加工参数，利用三维建模软件 CATIA 进行仿真，画出动态变化过程示意图。

2.1 问题一的分析

问题一要描述折叠桌的动态变化过程以及桌脚边缘线的状态，桌脚边缘线是一条连续的曲线，曲线的变化情况可以反映此动态过程，故通过考虑桌面边缘线连续变化的情况，建立空间解析几何模型。首先，建立三维坐标系，求得两条最外侧桌脚线段的方程，钢筋所在线段即为这两条线段中点的连线；在桌面边缘线

上任取一点，其对应的桌脚线段需与钢筋所在线段相交，则在桌子折叠过程中，这一系列的交点所组成的线段长度即为钢筋在各桌脚线段上自由移动的距离，离散化后即为木条挖槽的长度。根据几何关系，可得到桌脚线段下端点的坐标，即可表示桌脚边缘线的曲线方程，折叠过程中桌脚边缘线的变化情况可反映桌子的动态变化过程。为求加工参数，需将桌面边缘离散化，根据题中已知数据求得木条数目，以桌平面为标准，建立平面二维坐标系，根据桌脚木条高度和投影关系，建立等式方程并求解，即可得到相应的加工参数。

2.2 问题二的分析

问题二中涉及到三方面的优化，即产品稳固性、加工工艺性和用料量。相较于问题一，问题二中放宽了平板尺寸、钢筋位置和开槽长度三个变量的约束。在问题一的基础上，设置决策变量和条件约束，对选择的目标函数进行优化，建立基于空间解析几何理论的非线性优化模型。

由于是长方形桌面，且桌面半径任意给定，因此折叠桌用材只和桌面长度有关，即用料随长度单调增加；钢筋位置的选择与最长木条打开的角度、每根木条开槽长度以及桌面的高度有关，受到的约束较多；稳固性可以选择下压稳定性和侧翻稳定性两个指标来衡量，分别考虑受到下压力和侧倾力的条件下坍塌与侧翻的难易程度，以两个指标来衡量。因此，初步可以归结为多目标优化问题。在处理上的选取稳定性指标函数为优化的目标函数，以加工难易程度和材料用量为约束条件，将问题化归为单目标优化问题。

在稳定性分析方面需要利用力学方面的知识，使用相关的理想简化，提取成为可处理的数学模型，分两种情况讨论。

2.3 问题三的分析

问题三对于任意的折叠桌高度、桌面边缘线、桌脚边缘线，要给出最优设计方案，需将问题一、二中的空间解析几何模型进一步推广。对于任意给定的桌面边缘线，利用问题一模型可得到桌脚边缘线的表达式，将求解得到的桌脚边缘线与用户所给边缘线的符合度作为优化目标，将用户给定的桌面高度、加工方便、稳固性好作为约束条件，建立基于解析几何的组合优化模型。求解得到所需平板材料的形状尺寸和相关的加工参数，根据模型，设计椭圆形桌面、三叶草形桌面、双圆形桌面，给出对应的设计加工参数，并用 CATIA 软件作图描述折叠桌的动态变化过程。

三、模型假设

- 1、假设木料剪切加工时无缝隙，即每根木条的根数为木板宽度除以每根木条的宽度；
- 2、在进行受力分析时假设桌腿与桌面之间无摩擦连接，并且桌板的质量集中在板的中心；
- 3、假设折叠桌在进行加工时的加工余料可以忽略不计；
- 4、假设折叠桌加工过程不考虑铰链、铆钉等细节过程；
- 5、问题三中假设能得到用户任意给定的桌面边缘包络线的方程。

四、符号说明

符号	含义
P	表示桌面圆上任意一点
$l_1 l_2$	表示桌脚最外侧射线
l	表示桌面边缘线任意一点对应的桌脚射线
θ_0	表示任一射线 l 在折叠过程中的旋转角
θ	表示最外侧射线旋转角
θ_{\max}	表示最外侧射线的最大旋转角
k_0	表示钢筋能在桌脚木条线上移动的距离
θ_i	表示第 i 个木条与桌平面的夹角
k_i	表示第 i 个木条的开槽长度
f_i	第 i 条桌脚钢筋位置到转角段在坐标轴平面上的投影长度
h_i	表示第 i 个木条上边缘线到 x 轴的距离
z	所设计折叠桌边缘线与用户要求边缘线的符合度
$f(x)$	用户给定的任意桌面边缘线
$g_1(x, y, z)$	所设计折叠桌的桌脚边缘线
Z_1	折叠桌折叠终态的跨高比

五、模型的建立和求解

5.1 模型一的建立与求解

根据题目要求及所给数据,结合折叠桌的形状变化,提取空间位置约束条件,建立空间解析几何模型,描述折叠桌空间动态变化过程^[1],并给出设计加工参数,对问题一进行求解。

5.1.1 空间解析几何模型的建立

为了描述折叠桌的动态变化过程,考虑桌面边缘线连续的情况,从一侧桌脚出发,建立空间解析几何模型。

建立如图 1 的坐标系:

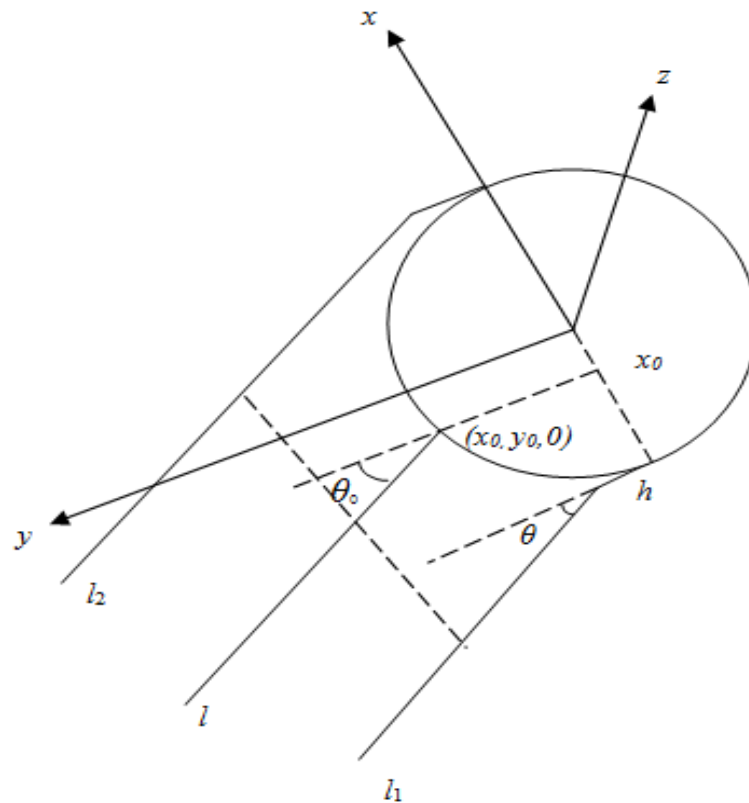


图 1 空间立体坐标系示意图

由于桌面边缘线连续,故折叠过程相当于无数条射线绕桌面边缘线上的点绕动,由于钢筋固定的位置在最外侧木条的中点,需要考虑特殊直线:过点 $(r, h,$

0), $(-r, h, 0)$ 的最外侧射线 l_1 、 l_2 , 得到三维坐标系下直线的参数方程:
射线 l_1 :

$$\begin{cases} x = r + \lambda \cos \alpha \\ y = h + \lambda \cos \beta \\ z = 0 + \lambda \cos \gamma \end{cases}$$

其中 α 、 β 、 γ 为直线与坐标轴 x 、 y 、 z 轴的夹角, 由于桌子在折叠过程中, 桌腿始终与 x 轴垂直, 即 $\alpha=0$, 而 β 为桌腿的旋转角, 并且与 γ 互余, 所以方程可简化为:

$$\begin{cases} x = r \\ y = h + \lambda \cos \theta \\ z = -\lambda \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

同理可得过点 $(-r, h, 0)$ 的射线 l_2 方程为:

$$\begin{cases} x = -r \\ y = h + \lambda \cos \theta \\ z = -\lambda \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

折叠过程中, 钢筋所在线段始终与 x 轴平行, 且纵坐标和竖坐标均可用最外侧射线旋转角 θ 表示, 其方程为:

$$\begin{cases} x \in (-r, r) \\ y = h + (30 - 1/2h) \cos \theta \\ z = -(30 - 1/2h) \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

在桌面边缘线上任取一点 $P(x_0, y_0, 0)$, 而过该点的射线 l 的方程为:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda \cos \theta_0 \\ z = -\lambda \sin \theta_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 θ_0 为射线 l 在折叠过程中的旋转角。

由于点 P 位于桌面圆上, 故有:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad (y_0 > 0) \quad (5)$$

由于钢筋必须穿过所有桌脚，即射线 l 必须与钢筋所在线段相交，联立方程 (3) (4) (5) 可得到

$$\tan \theta_0 = \frac{(30 - 1/2h) \sin \theta}{h + (30 - 1/2h) \cos \theta - \sqrt{r^2 - x_0^2}} \quad (6)$$

而由图中几何关系，可得到任一桌脚线段末端端点坐标 Q_0 :

$$(x_0, (60 - \sqrt{r^2 - x_0^2}) \cos \theta_0 + \sqrt{r^2 - x_0^2}, -(60 - \sqrt{r^2 - x_0^2}) \sin \theta_0) \quad (7)$$

在折叠时， θ 会由 0 连续增大到 θ_{\max} ，这样每条射线会与钢筋线段有一系列交点，这些点构成的线段长度即为钢筋在桌脚木条线自由移动的长度，设为 k_0 :

$$k_0 = \sqrt{\left\{ \sqrt{r^2 - x_0^2} - \left[h + (30 - \frac{1}{2}h) \cos \theta_{\max} \right] \right\}^2 + \left(30 - \frac{1}{2}h \right)^2 \sin^2 \theta_{\max}} - \left(30 + \frac{1}{2}h - \sqrt{r^2 - x_0^2} \right) \quad (8)$$

5.1.2 模型的求解

(1) 折叠桌动态表示过程

桌脚边缘线参数方程的变化体现了折叠桌的动态变化过程:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = (60 - \sqrt{r^2 - x_0^2}) \cos \theta_0 + \sqrt{r^2 - x_0^2} \\ z = -(60 - \sqrt{r^2 - x_0^2}) \sin \theta_0 \end{cases} \quad (9)$$

其中， θ_0 为折叠过程中点 $P(x_0, y_0, 0)$ 所在桌脚线段的旋转角度，根据公式 (6) 可转化为最外侧线段的旋转角 θ ，运用 MATLAB 可以仿真出折叠过程中桌脚边缘线的动态变化过程，如图 2 所示:

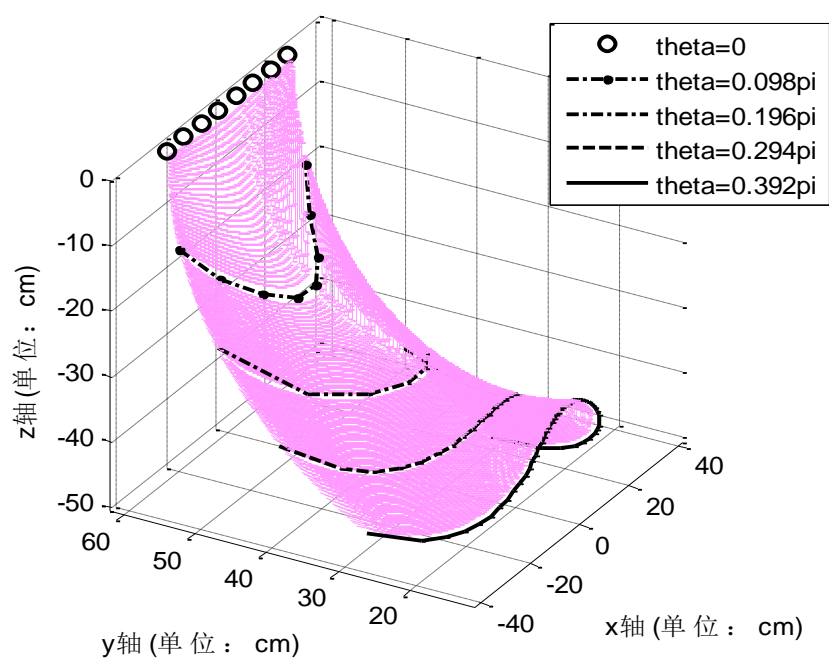


图 2 桌脚边缘线动态变化示意图

(2) 桌脚边缘线的描述

当达到折叠终态时, $\theta = \theta_{max}$, 求解得到, 最外侧桌脚线段的旋转角 $\theta_{max} = 70.56^\circ$, 可得到终态桌脚边缘线的参数方程:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0.333(60 - \sqrt{625 - x_0^2}) + \sqrt{625 - x_0^2} \\ z = -0.943(60 - \sqrt{625 - x_0^2}) \end{cases} \quad (10)$$

做出桌脚边缘线的图像如图 3.

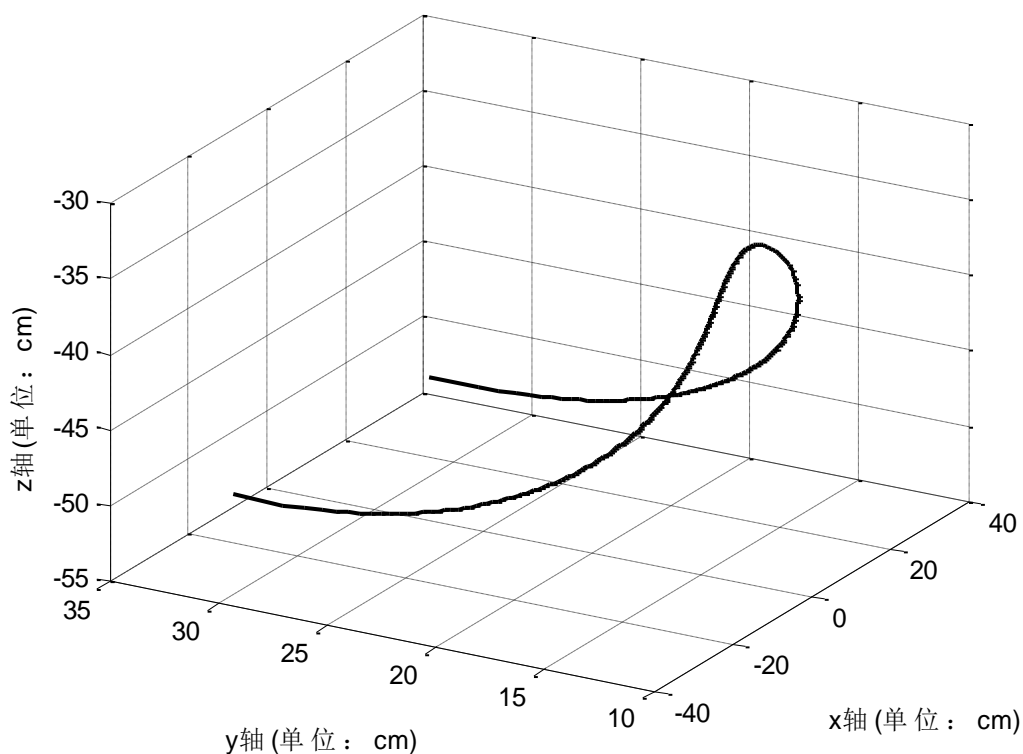


图 3 折叠终态桌脚边缘线示意图

(3) 折叠桌加工参数求解

由于模型是基于连续的桌面边缘线建立的,故在求解过程中必须将边缘线离散化才能求解相关加工参数,具体过程如下:

STEP 1: 建立坐标系

根据视频相关内容,将木板的宽当作桌面圆的直径,木条宽给定,即木条个数为: $50/2.5=20$ 个,而且桌面高度,钢筋固定位置均确定,即该折叠桌完全展开的状态是唯一确定的,因此在参数求解过程中,只需考虑折叠桌的初态和终态即可。根据各桌腿在桌面上的投影可建立等量关系,由于折叠桌两侧木条对称,模型只研究一侧木条,故以桌面圆建立平面二维坐标系,如图 5 所示:

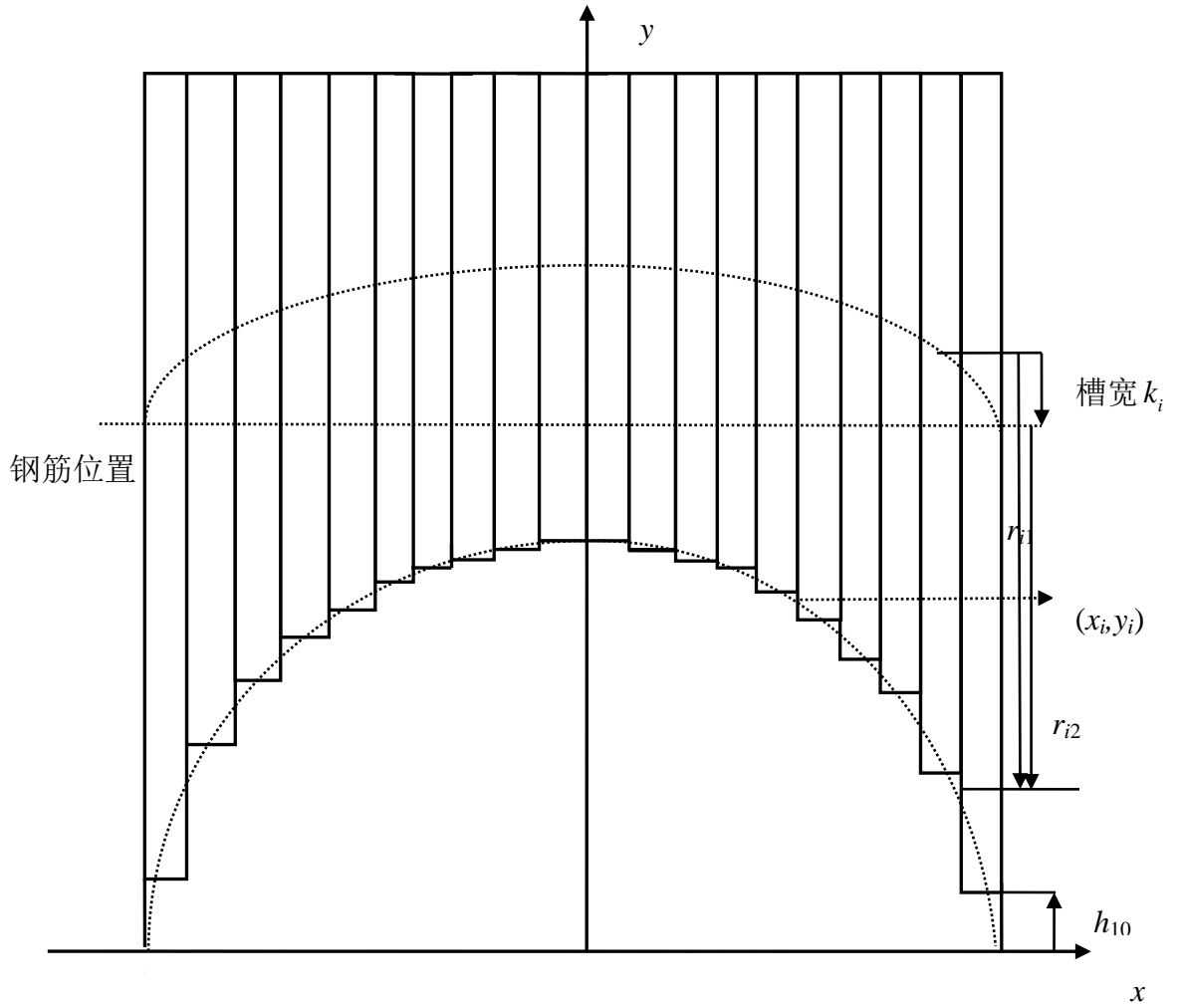


图 4 桌面二维坐标系示意图

STEP 2：建立等式关系

根据几何关系分析，可从各桌脚高度及其在坐标平面投影两个角度建立等量关系：

在桌子的折叠终态，钢筋的位置在所有桌脚木条挖槽的最底部，并且钢筋处于同一水平高度，即所有木条挖槽底部到桌面的竖直距离相等，以第一象限的十根木条为代表，从最外侧桌脚开始编号：1、2……10，建立任意一个桌脚木条与最外侧木条的等量关系：

$$(30 + h_{10}/2 + k_i - h_i) \sin \theta_i = (30 - h_{10}/2) \sin \theta_{10} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 9) \quad (11)$$

此处， θ_i 为第 i 个木条与桌平面的夹角（如图 6）， k_i 为第 i 个木条的挖槽长度， h_i 为第 i 个木条上边缘线到 x 轴的距离，而钢筋固定在最外侧木条的中心位置，但最外侧木条并非板长一半，距离 x 轴有一段距离 h_{10} （如图 5）。

折叠终态桌面高 50cm:

$$(60 - h_{10}) \sin \theta_{10} = 50 \quad (12)$$

考虑各桌脚木条在坐标面的投影, 如图 6 所示:

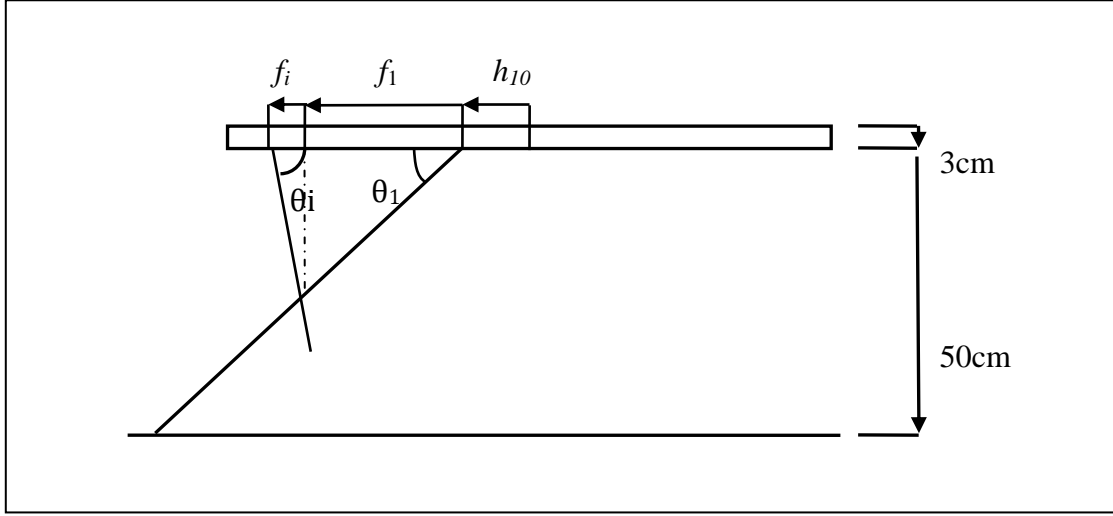


图 5 桌脚木条投影示意图

可得到如下关系:

$$f_i + f_1 + h_{10} = |y_i|$$

其中 f_i 为第 i 条桌脚钢筋位置到转角段在坐标轴平面上的投影长度, y_i 表示第 i 个木条转角处点的纵坐标 (如图 5), 即

$$(30 + h_{10} / 2 + k_i - h_i) \cos(\pi - \theta_i) - (30 - h_{10} / 2) \cos(\pi - \theta_{10}) + h_{10} = \sqrt{r^2 - (1.25 + 2.5(i-1))^2} \quad (i=1, 2, \dots, 9) \quad (13)$$

各木条长度为:

$$L_i = 60 - h_i \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

所得各木条长度结果如表 1 所示:

如图 4, 开槽长度 k_i 为:

$$k_i = r_{i1} - r_{i2}$$

具体表达式为:

$$k_i = \sqrt{\left\{ \sqrt{r^2 - x_i^2} - \left[h + \left(30 - \frac{1}{2} h \right) \cos \theta_{\max} \right] \right\}^2 + \left(30 - \frac{1}{2} h \right)^2 \sin^2 \theta_{\max}} - \left(30 + \frac{1}{2} h - \sqrt{r^2 - x_i^2} \right) \quad (i = 2, 3, \dots, 10) \quad (14)$$

此式为各木条开槽长度的表达式 所得各桌脚的开槽长度如图 7.

模型一离散化后建立的方程组为:

$$\begin{cases} (30 + h_{10}/2 + k_i - h_i) \sin \theta_i = (30 - h_{10}/2) \sin \theta_{10} & (i = 1, 2, 3, \dots, 9) \quad (0 < \theta_i < \pi) \\ (60 - h_{10}) \sin \theta_{10} = 50 \\ (30 + h_{10}/2 + k_i - h_i) \cos(\pi - \theta_i) - (30 - h_{10}/2) \cos(\pi - \theta_{10}) + h_{10} = \sqrt{r^2 - (1.25 + 2.5(i-1))^2} \\ k_i < 30 - h_{10}/2 \end{cases}$$

STEP 3 : 加工参数的求解

利用 LINGO 软件, 对方程组进行求解, 得到折叠过程中各木条旋转角度的变化过程以及折叠桌的加工参数。

表 1 桌脚木条长度表

木条编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
木条长度 (cm)	35.1	35.5	36.2	37.1	38.3	40	42.1	45	49.1	53

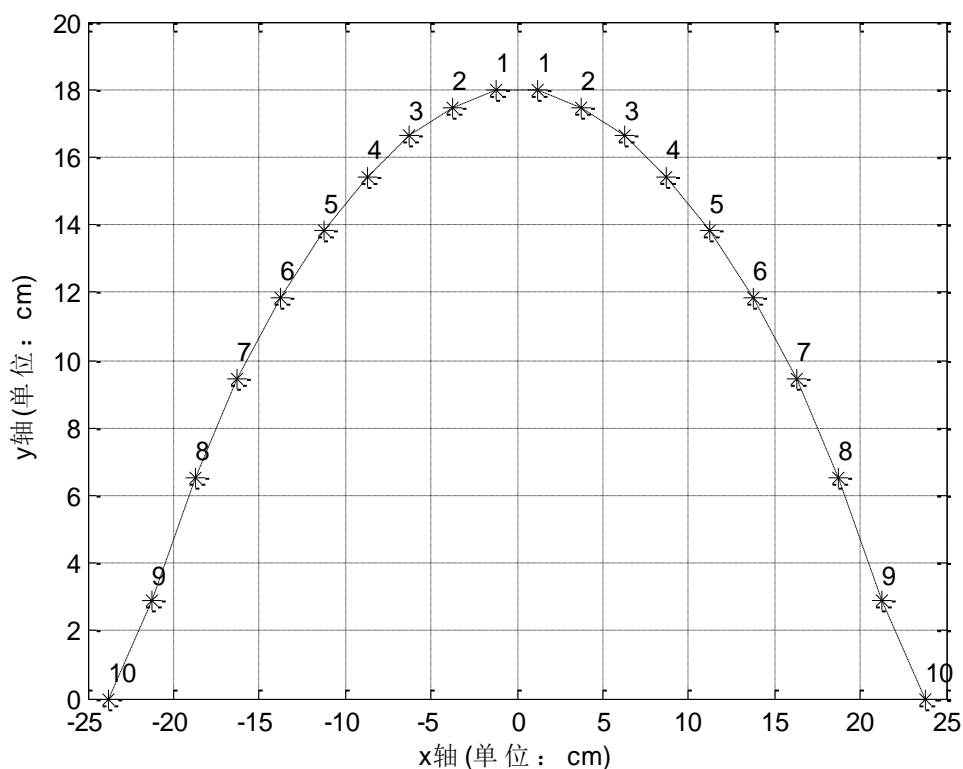


图 6 各桌脚木条开槽长度表示图

桌面另一侧的木条长度和开槽情况完全一样。

为了展示折叠过程中桌子的状态变化, 以图 2 中的 5 个角度为例, 截取折叠过程中的 5 个状态, 根据折叠过程中旋转角的变化及对应的相关参数, 利用三维

绘图软件 CATIA 可绘制桌子在折叠过程中的动态变化过程，如图 7：

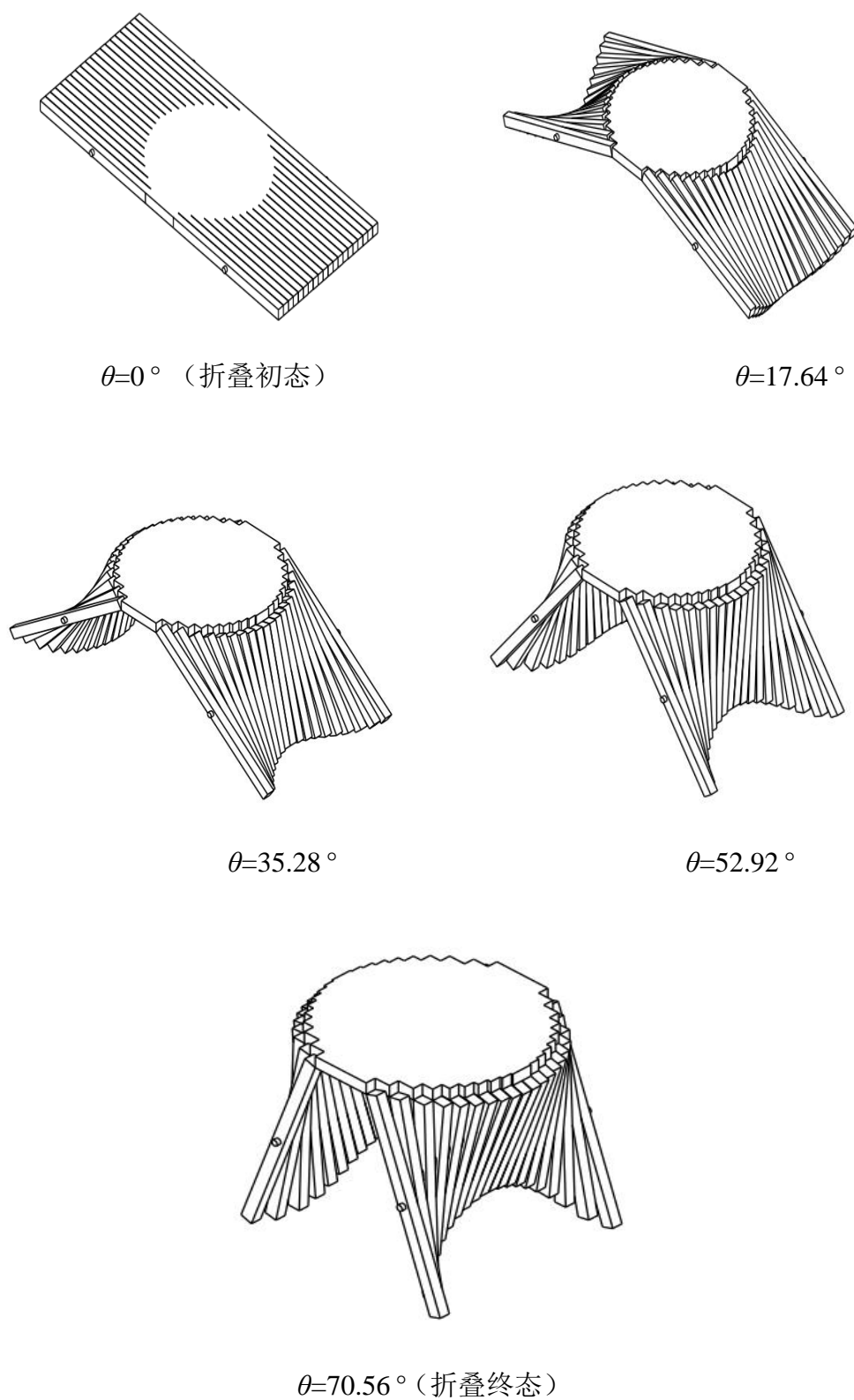


图 7 折叠桌动态变化过程示意图

5.1.3 结果分析

问题一通过建立空间解析几何模型，描述了折叠桌的动态变化过程和其中的几何位置约束。通过作图可直观地验证模型的可行性。设计得到的折叠桌符合设计要求，桌腿的开槽长度都在合理的范围内。

通过观察图 2.桌脚边缘曲线动态变化示意图可知，在桌腿下摆的过程中，桌脚边缘曲线的形状和最外侧桌腿的转角以及钢筋的位置有关，曲线经历从一条直线到马鞍线的变化过程，整体扫略过一个空间曲面。截取一个 x_i 对应的图为一圆弧，以对应木条的连接点为圆心，木条长为半径。最终的桌脚边缘线的数学描述为一组参数方程，由曲线图可知结果与实际情况符合得很好。

5.2 模型二的建立与求解

在模型一的基础上，设置决策变量和目标函数，分别对稳固性、加工方便、用材量三个目标进行讨论，并考虑几何约束与位置约束建立组合优化模型，对第二问进行求解。

5.2.1 建模准备

模型二依然以桌面所在平面建立二维直角坐标系，从以下两个角度对桌子稳固性进行分析^[2]。

(1) 考虑桌子是否容易翻倒。这与桌子的重心及桌脚张开的距离有关，综合这两个因素，定义跨高比 Z_1 ，分析易知，跨高比越大，桌子的重心越低，桌脚张开角度越大，桌子越不容易翻倒^[3]，图 8 为跨度和高度的示意图：

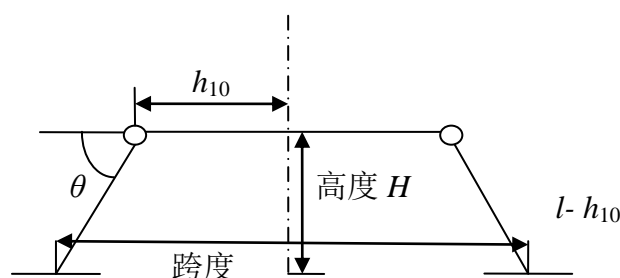


图 8 跨高比示意图

由图 8 分析可知，跨高比为：

$$Z_1 = \frac{2(l-h_{10})\cos\theta + 2h_{10}}{(l-h_{10})\sin\theta}$$

式中 h_{10} 表示最外侧木条旋转点到 x 轴的距离, l 为木条总长度, H 为桌面高度。

(2) 考虑桌子是否容易变形或塌陷。

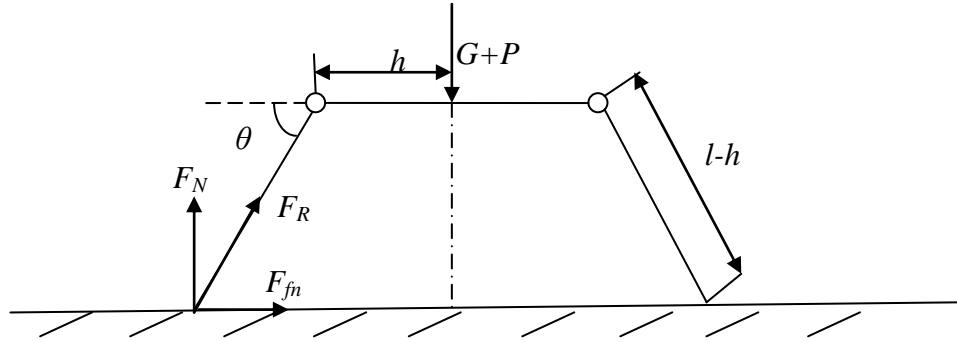


图 9 稳定状态下桌子受力示意图

桌子在稳定时的受力分析如图 9, 桌子是否容易变形与桌子的承压、桌脚与地面的夹角以及桌脚所受摩擦力有关^[4]。由于桌面承重不确定, 故只考虑桌子在自身重力作用情况下的稳定性, 而仅有最外侧的四只桌脚受力, 以一只桌脚为例, 研究其受力情况, 图 10 为任一桌脚受力示意图:

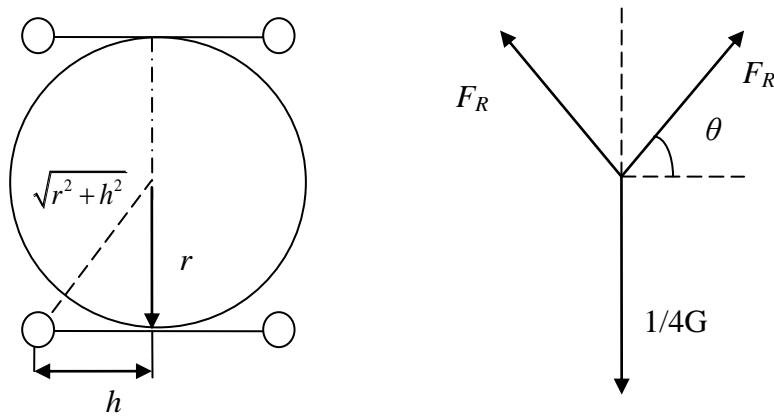


图 10 任一桌脚受力示意图

由于地面的粗糙程度不确定, 根据受力平衡的条件, 有如下关系:

$$F_f = F_R \cos \theta$$

$$F_R = \frac{1}{4} G / \sin \theta$$

故可求得维持桌子稳定的最小摩擦力 F_f , 该摩擦力越小, 桌子越不容易变形, 即桌子越稳定。

$$F_f = G / (4 \tan \theta)$$

5.2.2 多目标优化模型的建立

该问题属于多目标优化问题, 优化目标有三个: 稳固性好、加工方便、用材最少, 根据模型准备中的稳固性分析可知, 桌子稳定性与木条长度、最外侧木条旋转角度有关^[5]。考虑加工方便, 即对于宽度给定的木板, 木条数目不能过多, 可选取不同的木条数目, 通过对桌子稳定性的优化求解, 可得到稳固性好、加工较为方便、用材较少前提下的最优设计加工方案。

优化模型以稳固性为目标函数:

$$\max \quad Z_1 = \frac{2(l - h_0) \cos \theta + 2h_0}{(l - h_0) \sin \theta} \quad (15)$$

$$\min \quad F_f = G / (4 \tan \theta)$$

模型的约束条件为:

(1) 几何约束条件

模型中钢筋位置不定, 但钢筋在所有桌腿中直插, 即钢筋所在线段与坐标轴平行, 故几何约束条件同问题一:

$$\begin{cases} (a + h_n + k_i - h_i) \sin \theta_i = a \sin \theta_n \\ (a + h_n + k_i - h_i) \cos(\pi - \theta_i) - a \cos(\pi - \theta_1) + h_n = \sqrt{r^2 - x_i^2} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

x_i 为第 i 跟木条中线与桌面边缘线的交点。

$$x_i = \frac{D}{4n} + \frac{D}{2n}(i-1) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

其中 a 为最外侧木条钢筋位置点到对应桌面边缘线点的距离, $2n$ 为木条数目, 其它符号含义同问题一。

(2) 高度和开槽长度的约束

$$(l - h_n) \sin \theta_n = H$$

$$0 \leq k_i \leq l - a - h_n$$

H 为用户给定的桌面高度, $l-a-h_n$ 为正中心木条的开槽长度, 由于中心木条开槽长度最大 (如图 5), 故约束合理。其中槽长 k_i 的计算公式为:

$$k_i = \sqrt{\left\{ \sqrt{r^2 - x_i^2} - [h_n + a \cos \theta_n] \right\}^2 + a^2 \sin^2 \theta_n} - \left(a + h_n + \sqrt{r^2 - x_i^2} \right) \quad (16)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1)$$

该优化模型的方程组形式可表示为:

$$\begin{cases} \max & Z_1 = \frac{2(l-h_{10})\cos\theta + 2h_{10}}{(l-h_{10})\sin\theta} \\ \min & F_f = G / (4 \tan \theta) \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} (a+h_n+k_i-h_i)\sin\theta_i = a\sin\theta_n \\ (a+h_n+k_i-h_i)\cos(\pi-\theta_i) - a\cos(\pi-\theta_1) + h_n = \sqrt{r^2-x_i^2} \\ (l-h_n)\sin\theta_n = H \\ 0 \leq k_i \leq l-a-h_n \end{cases}$$

5.2.3 模型二的求解

(1) 模型求解的算法思路

在求解模型二时, 模型的约束条件较为复杂, 给问题的解决带来了极大的困难。因此, 我们选用了在解优化问题方面具有强大优势的 1stOpt 软件对模型二进行求解。综合比较 1stOpt 各种内置算法求解结果的优劣, 发现共轭梯度算法在求解此模型上具有很快的收敛性, 得出的结果也较令人满意。共轭梯度算法, 是介于最速下降法与牛顿法之间的一个算法, 它只需要利用一阶导数信息, 但克服了最速下降法收敛慢的缺点, 又避免了牛顿法需要存储和计算 Hesse 矩阵并求逆的缺点。共轭梯度法不仅可用于解决大型线性方程组, 同时也是解非线性最优化问题最有效的算法之一^[6]。

(2) 模型相关参数进一步限制

模型求解中取木条数目 $2n=20$, 桌面高度 $H=70\text{cm}$, 以桌面直径 $D=80\text{cm}$ 作为木板的宽, 则每根木条宽度为 $d=4\text{cm}$, 为了减少优化过程中的搜索范围, 需根据实际情况对相关参数作进一步限制:

由于桌面高度为 70cm , 故一侧木条长度至少为 70cm , 而木条过长会使木料用量增加, 所以对木条长度的限制为:

$$70 \leq l \leq 100$$

桌腿上边缘要安装铰链，考虑到安装铰链需一定的距离，故对最外侧木条的预留长度的限制为：

$$4 \leq h_{10} \leq 8$$

由于优化模型为双目标，需转化为单目标^[7]，将第二个优化目标 $\min F_f = G / (4 \tan \theta)$ 转化为约束条件。考虑人机工程学原理^[8]，在一般地面能站稳的情况下，最外侧木条转动角度的限制为：

$$60^\circ < \theta_{10} < 80^\circ$$

这样优化可以保证所设计桌子在稳定性较好且费用较省，加工较方便。

(3) 折叠桌设计加工参数求解

运用优化分析软件 1stOpt 进行优化求解，在木条数目为 20 的条件下的最优设计加工参数：

得到木板长度为： $L_1=167cm$ ，对应的加工参数为：

表 2 木条数目为 20 的加工参数结果

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
木条长度	49.3	50.2	51.7	53.8	56.6	60.0	64.3	69.4	75.6	83.6
开槽长度	34.3	33.4	31.9	29.8	27.0	23.6	19.3	14.2	8.0	0.0

同理对木条数目 10 的情况进行求解，得到 $L_2=171\text{ cm}$ ，对应的加工参数为：

表 3 木条数目为 10 的加工参数结果

木条编号	1	2	3	4	5
木条长度	46.3	48.8	53.5	61.5	78.3
开槽长度	40.5	36.1	28.2	16.1	0.0

对于木条数目 40 的情况进行求解，得到 $L_3=176cm$ ，对应的加工参数为：

表 4.1 木条数目为 40 的加工参数结果

木条编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
木条长度	48.2	48.4	48.6	49.0	49.4	50.0	50.7	51.5	52.5	53.5
开槽长度	39.9	39.8	39.5	39.2	38.7	38.2	37.5	36.7	35.7	34.6

表 4.2 木条数目为 40 的加工参数结果

木条编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
木条长度	54.8	56.2	57.8	59.6	61.7	64.2	67.1	70.7	75.7	80.5
开槽长度	33.4	32.0	30.4	28.6	26.5	24.0	21.1	17.4	12.5	7.7

5.2.4 结果分析

表 5 不同木条数目下的参数对比

	板长 $l(cm)$	$a (cm)$	跨高比
10 条	171	20.8	1.2
20 条	167	37.6	1.1
40 条	176	41.2	1.4

表中 a 表示最外侧桌腿钢筋所在点与桌面边缘线上点的距离。由表中数据对比可知，三种加工方案中，桌面稳定性差异不大，木条数目为 20 时对应的板长最小，用料最少；考虑加工方便的因素，木条数目太多切割不变，太少的话每根木条的宽度过大，不利于开槽，故综合三种因素，可知，木条数目为 20 的加工方案最优。

5.3 模型三的建立和求解

5.3.1 建模准备

(1) 桌面边缘线的包络处理

由于用户给定的桌面边缘线形状不规则，边缘可能会有一些地方凹陷，即边缘线函数可能为凹函数，模型无法处理，所以对给定的边缘线进行包络，得到包含用户所给边缘线的最小包络线，用直角坐标的形式得到包络线的表达式： $f(x)$ 。

(2) 桌脚边缘线的求解

对于任意桌面边缘线 $f(x)$ ，根据问题一中的模型，可得到线上任意一点 P 对应的桌腿线段末端点 Q_i 的坐标为：

$$(x_i, l_i \cos \theta_i + f(x_i), -l_i \sin \theta_i)$$

即得到的桌脚边缘线 $g_1(x, y, z)$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = l_i \cos \theta_i + f(x_i) \\ z = -l_i \sin \theta_i \end{cases}$$

对于用户给定的桌脚边缘线 $g_2(x, y, z)$ ，同样用参数方程表示：

$$\begin{cases} x = x_i \\ y = y(x_i) \\ z = z(x_i) \end{cases}$$

(3) 开槽位置的确定

假设最外侧木条线段钢筋位置点到对应桌面边缘线点的距离为 a ，则根据问题一模型，可得到钢筋与任意桌腿线段的交点为：

$$(x_i, h + a \cos \theta, -a \sin \theta)$$

θ 为最外侧桌腿线段对应的旋转角，折叠过程交点即为开槽点，交点组成的线段即为开槽长度。

5.3.2 模型的建立

为了使折叠桌尽量满足客户所期望的形状，即模型求解得到的桌脚边缘线与用户所给边缘线的符合度尽可能高，故以二者的综合符合度作为优化的目标函数：

$$\min z = \int_{-D/2}^{D/2} [(l_i \cos \theta_i + f(x_i) - y(x_i))^2 + (-l_i \sin \theta_i - z(x_i))^2] dx_i \quad (17)$$

其中 $g_1(x)$ 为设计的桌面边缘曲线， $g_2(x)$ 为用户给定的桌脚边缘线上的点，桌脚边缘线上的点 Q_i 可以表示为如下形式：

$$(x_i, l_i \cos \theta_i + f(x_i), -l_i \sin \theta_i) \quad (18)$$

在设计折叠桌产品时，给定外部框架，即首先找出曲线上距离最大的两点，在这两点前后设置四个最长桌腿的连接点，最长桌腿以高度为约束作为折叠桌的框架，假定两侧的最长桌腿上加入钢筋的位置高度一样。

建立约束条件方程：

(1) 设计方案要满足用户的高度要求

$$l_n \sin \theta_n = H$$

l_n 为最长桌腿对应的木条线段的长度， H 为用户给定的桌面高度。

(2) 设计方案要考虑加工方便的因素

给定木条宽度范围：

$$2 \leq w \leq 6$$

即

$$2 \leq \frac{D}{2n} \leq 6$$

即木条宽度需要考虑开槽加工是否方便，取适当值^[9]；

而木条数目不宜过多，即对客户所给桌面 W 应给予限制：

$$W \leq W_{\max}$$

即用户在给定模型的初始条件时，桌面宽度要小于所设定的最大值

对开槽长度作约束同问题二模型的约束条件：

$$0 \leq k_i \leq l - a - h_n$$

k_i 为第 i 个木条的开槽长度， $l - a - h_n$ 为正中心木条的开槽长度， a 为最外侧木条的钢筋位置点到对应桌面边缘线点的距离。

(3) 设计方案要考虑最外侧桌腿旋转到最大角度 θ_0 时，第 2 至 $n-1$ 木条桌角离桌面距离不大于桌面高度 H ，约束条件为：

$$l_i \sin(\theta_i) < H$$

(4) 考虑桌子的稳定性。

稳定性的约束条件可依据模型二的稳定性分析

$$Z_1 = \frac{2(l - h_\alpha) \cos \theta_\alpha - h_\alpha^2}{(l - h_\alpha) \sin \theta_\alpha} \quad (19)$$

$$Z_1 > Z_0$$

其中 Z_0 为给定的稳定性阈值， h_α 为最外侧木条的预留长度。

$$F_f = G / (4 \tan \theta)$$

F_f 为桌面保持稳定所需地面提供的最小摩擦力， θ 为最外侧木条的旋转角度， θ 越大，所需摩擦力越小。给 θ 设置变化范围：

$$\theta \in (\theta_{\min}, \theta_{\max})$$

该模型的离散化后最终模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^n [(l_i \cos \theta_i + f(x_i) - y(x_i))^2 + (-l_i \sin \theta_i - z(x_i))^2]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} l_n \sin \theta_n = H \\ 2 \leq \frac{D}{2n} \leq 6 \\ 0 \leq k_i \leq l - a - h_n \\ \frac{2(l - h_\alpha) \cos \theta + 2h_\alpha}{(l - h_\alpha) \sin \theta} > Z_0 \\ \theta \in (\theta_{\min}, \theta_{\max}) \end{cases}$$

决策变量： l_i 和 θ_i 。

5.3.3 模型的求解

(1) 模型参数的给定

为了使模型求解简单，用户给定的桌面形状为椭圆，其方程为：

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{25^2} = 1$$

而桌脚边缘线，以模型一中求解的结果作为用户给定的条件，其方程为：

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0.333(60 - \sqrt{625 - x_0^2}) + \sqrt{625 - x_0^2} \\ z = -0.943(60 - \sqrt{625 - x_0^2}) \end{cases}$$

用户给定桌面高度为 50cm ，而在模型求解中去木条数目为 20 条。

θ 范围的给定同模型二，即 $\theta \in (60^\circ, 80^\circ)$ ，对于跨高比，取 $Z_1 > 1$ 。

(2) 离散化模型的约束条件

$$\begin{cases} (a + h_{10} + k_i - h_i) \sin \theta_i = a \sin \theta_n \\ (a + h_{10} + k_i - f(x_i)) \cos(\pi - \theta_i) - a \cos(\pi - \theta_i) + h_{10} = f(x_i) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, 9)$$

该几何约束条件同模型一、二。

开槽长度 k_i 为：

$$k_i = \sqrt{\{f(x_i) - [h_{10} + a \cos \theta_i]\}^2 + a^2 \sin^2 \theta_n} - (a + h_{10} - f(x_i)) \quad (i=1,2,\dots, 9) \quad (20)$$

高度的约束:

$$l_{10} \sin \theta_{10} = H$$

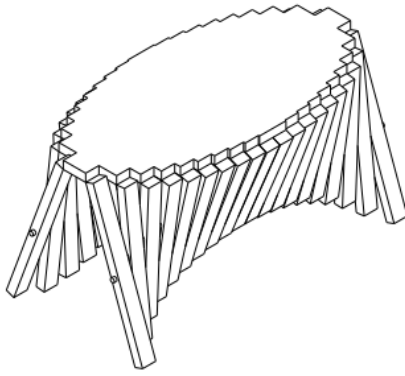
(3) 模型的结果

运用优化分析软件 1stOpt 进行优化求解, 得到目标函数的最优解为 7.616, 跨高比为 1.045, 最外侧木条钢筋所在点到桌面边缘线的距离 $a=28.34 \text{ cm}$, 而各木条总长度均接近 60 cm , 故要加工本题目中用户给定的桌面要求, 需要长为 120 cm , 宽为 50 cm 的木板, 具体加工参数如表 6

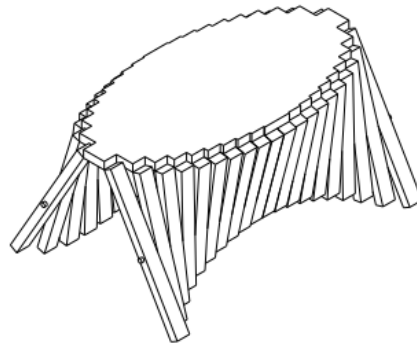
表 6 满足用户需求的折叠桌加工参数

木条编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
桌腿长度	35.1	35.5	36.2	37.1	38.3	40.0	42.1	45.0	49.1	54.6
开槽长度	19.9	19.4	18.5	17.3	15.7	13.8	11.3	8.4	4.7	0.0

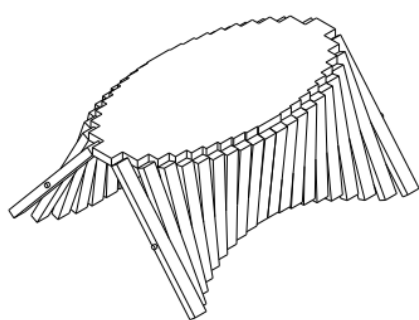
利用三维建模软件 CATIA 进行仿真, 画出椭圆形桌面的动态变化过程示意图。



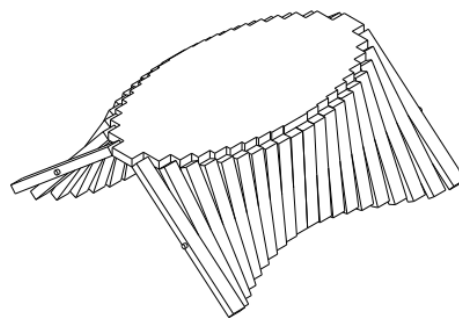
$\theta=70^\circ$



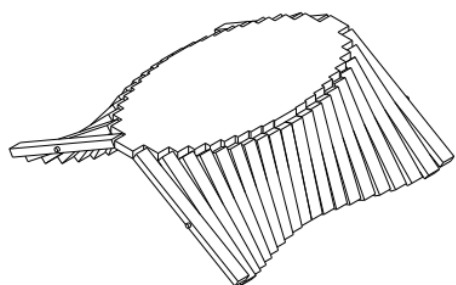
$\theta=60^\circ$



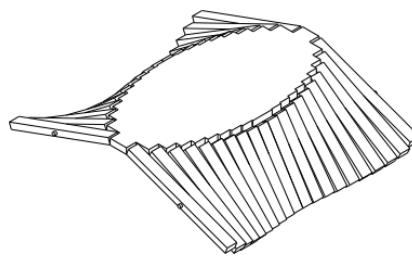
$\theta=50^\circ$



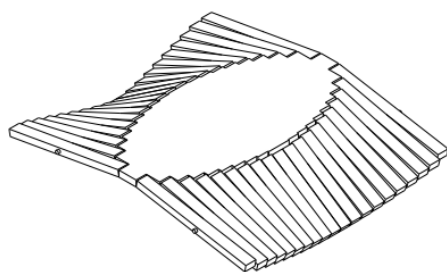
$\theta=40^\circ$



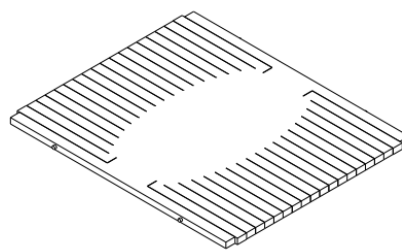
$\theta=30^\circ$



$\theta=20^\circ$



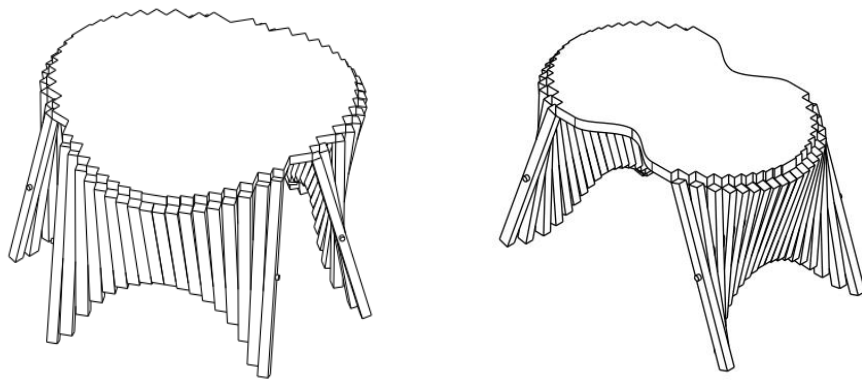
$\theta=10^\circ$



$\theta=0^\circ$

图 11 方案一：椭圆桌面折叠动态变化图

模型一共给出了三种创意折叠桌的设计方案，用 CATIA 软件做出其他两种方案的示意图如图 12：



方案二

方案三

图 12 方案二、三中折叠桌的折叠终态

5.3.4 结果分析

根据所求的结果，跨高比接近 1，即桌腿的跨度与桌面高度相当，最外侧桌腿的旋转角接近 45° ，而 $\alpha=28.34$ ，即钢筋的位置接近木条的中心，这些均反映了所设计的桌子具有良好的稳定性；木条宽度为 2.5cm ，木条数目为 20 条，表示该方案加工较为方便；所得的各木条总长度均接近 120cm ，即木板的利用率很高，用料较省。即对于用户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的形状，该模型能设计出比较接近用户要求的个性折叠桌，且设计方案满足稳固性好、加工方便、用料较少的要求，即可得到切实可行的最优设计加工参数。

六、 模型的评价和推广

6.1 模型的优缺点分析：

A、优点：

1、本文中模型采用先连续后离散的方法，运用连续方法建立具有一般意义的模型，再针对每个问题结合具体实际进行离散化构建，使得三个模型的建立具有整体性和完整性；

2、在针对三个问题、建立三个模型的过程中，从第一问到第三问采用逐步放宽约束的方法，使得每个问题的求解具有各自的特点，同时在模型上又有互通之处；

3、在模型的仿真上采用优秀的三维绘图软件 CATIA 建立三维模型，通过三

维模型的二维化导入得到折叠桌动态过程图，清晰直观；

4、在求解第一问的桌脚边缘曲线时采用了连续模型的结论，直接得到空间曲线的参数方程，较一般的离散拟合方法直接、精确。

B、缺点：

1、在第二问的求解过程中对于加工方便目标的处理上，直接给定了几种不同的木条宽度来进行求解，使得解的遍历缺乏广度；

2、在稳定性评价方面忽略了一些细节因素^[10]，存在一定的近似。

6.2 模型的改进和推广

1)、模型一使用的约束过多，可以从向量的角度整理所列的方程组，使之更清晰，便于整体思路的形成，有助于简化模型的建立过程；

2)、模型二中可以将木条的宽度作为变量代入优化过程，同时，考虑到加工实际要求，可以给宽度适当给定一个阈值范围，并将其离散化，以加工方便为原则定义步长取值；

3)、模型三中当木条宽度变化时会导致最外侧木条过短，原因在于建模的时候最外侧的木条长度作为变量；改进中可以采用预先给最外侧的四条边定一个适当的长度，以高度值作为参考，使其不参与优化的过程；

4)、在第三问的处理中，最后给出的设计都具有一定的对称性，这在模型的求解中起到了简化的作用，在实际应用软件的过程中可以考虑制定任意的函数曲线，采用非对称或者分段函数等形式，设计便捷的求解算法，以适应更广大用户的需求。

参考文献

[1]徐阳，杨兴云，空间解析几何及其应用，哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2006.

[2] Kaveh A,Babaei M, Generation and Geometric Non-linear Analysis of Scissor-like Foldable Structures, International Journal of Engineering Science, 17(1):39-46, 2006.

[3] M.Babaei, E.Sanaei, Geometric and Structural Design of Foldable Structures, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS) Symposium, 1245-1260, 2009.

[4] 陈务军，董石麟，付功义，周岱，关富玲，不稳定空间展开折叠桁架结构稳定过程分析，工程力学，5（17）：5-10，2000.

- [5] 钱志伟,程万海,刘锡良,折叠结构的受力分析,建筑结构学报,17:48-57, 1996.
- [6] 孙中波,段复建,高海音,两类无约束优化的充分下降共轭梯度法,吉林大学学报, 51 (1) : 35-40, 2013.
- [7] 钱颂迪,运筹学,北京:清华大学出版社, 2012.
- [8] 郭庆祥,陈龙娇,跨坐式单轨车辆客室内部人机工程研究,重庆交通大学学报, 01 (5): 5-7, 2011.
- [9] 李晶,鹿晓阳,陈世英,结构优化设计理论与方法研究进展,工程建设, 6 (39): 21-31, 2007.
- [10] M.Buehler, H.Tsukakoshi, K.Yoneda, Normalized Energy stability Margin and its Contour of Walking Vehicles on Rough Terrian.Proc.IEEE Int.Conf. on Robotics and Automation, 181-186, 2001.

附 录

模型一:

```
model:
!模型一参数求解;
sets:
vark/1..9/:k;
vart/1..10/:t;
vari/1..10/;
varh/1..9/:h;
endsets
data:
h=24.8747,24.4949,23.8485,22.9129,21.6506,20.0,17.8536,15.0,10.8972;
enddata
@for(vari(i)|i#le#9:(30+hi/2+k(i)-h(i))*@sin(t(i))=(30-hi/2)*@sin(t(10)));
@for(vari(i)|i#le#9:(30+hi/2+k(i)-h(i))*@cos(3.14-t(i))=(30-hi/2)*@cos(3.14-t(10)))+@sqrt(625-(2.5*i)^2)-hi);
(60-hi)*@sin(t(10))=50;
hi=7;
@for(vari:@bnd(0,t,3.14));
data:
@ole("C:\Users\Mr Zuo\Desktop\数据.xlsx",A1:A9)=h;
@ole("C:\Users\Mr Zuo\Desktop\数据.xlsx",A10)=hi;
@ole("C:\Users\Mr Zuo\Desktop\数据.xlsx",B1:B9)=k;
@ole("C:\Users\Mr Zuo\Desktop\数据.xlsx",C1:C10)=t;
```

```
enddata
```

```
function y=f1(x)
y=x;

function y=f2(x)
for i=1:length(x)
    if g(x(i))<0
        y(i)=(60-sqrt(625-x(i)^2))*cos(g(x(i))+pi)+sqrt(625-x(i)^2);
    else
        y(i)=(60-sqrt(625-x(i)^2))*cos(g(x(i)))+sqrt(625-x(i)^2);
    end
end

function y=f3(x)
for i=1:length(x)
    if g(x(i))<0
        y(i)=-(60-sqrt(625-x(i)^2))*sin(g(x(i))+pi);
    else
        y(i)=-(60-sqrt(625-x(i)^2))*sin(g(x(i)));
    end
end

function y=g(x)
global theta;
global h1;
y=atan((30-0.5*h1).*sin(theta)./(h1+(30-0.5*h1).*cos(theta)-sqrt(625-x.^2)));

global theta;
global h1;
h1=7;
x=-25:0.1:25;
```

```

for theta=0.01:0.01:1.2327
    plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'Color',[1,0.6,1]);hold on;
end
theta=0;
p1=plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'ko','linewidth',2.2);hold on;
theta=0.3082;
p2=plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'k-','linewidth',2);hold on;
theta=0.6163;
p3=plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'k-','linewidth',2);hold on;
theta=0.9245;
p4=plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'k--','linewidth',2);hold on;
theta=1.2327;
p5=plot3(f1(x),f2(x),f3(x),'k','linewidth',2);hold on;
grid
legend([p1 p2 p3 p4
p5], 'theta=0', 'theta=0.098pi', 'theta=0.196pi', 'theta=0.294pi', 'theta=0.392pi');
xlabel('x Ö á μÿÎ>£çm'); ylabel('y Ö á μÿÎ>£çm'); zlabel('z Ö á μÿÎ>£çm');
view(300,30);

```

模型二：

```

Title "模型二参数求解(单侧 20 条)";
Parameters
h10[4,8],k(1:9)[0,],t(1:9)[0,3.14],t10[1.0472,1.3963],l[70,100],a[0,];
Constant
h(1:9)=[39.7995,39.1918,38.1576,36.6606,34.641,32,28.5657,24,17.4356];
Constant x(1:10)=[4,8,12,16,20,24,28,32,36,40];
MaxFunction 2*((l-h10)*cos(t10)+h10)/((l-h10)*sin(t10));
for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*sin(t[i])-a*sin(t10)=0);
for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*cos(3.14-t[i])-(a*cos(3.14+t10)+sqrt(1600-x[i]^2)-h
10)=0);
for(i=1:9)((k[i]-(sqrt((sqrt(1600-x[i]^2)-h10-a*cos(t10))^2+a^2*sin(t10)^2)-(a+h
10-sqrt(1600-x[i]^2))))*8=0);
((l-h10)*sin(t10)-70)*100=0;
for(i=1:9)((k[i]-(l-a-h10))*1000<0);
a+h10-l<0;
(h10-a)*100<0;

Title "模型二参数求解(单侧 10 条)";
Parameters
h10[4,8],k(1:9)[0,],t(1:9)[0,3.14],t10[1.0472,1.3963],l[70,100],a[0,];
Constant h(1:4)=[39.1918, 36.6606, 32., 24.];
Constant x(1:5)=[8,16,24,32,40];
MaxFunction 2*((l-h10)*cos(t10)+h10)/((l-h10)*sin(t10));

```

```

for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*sin(t[i])-a*sin(t10)=0);
for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*cos(3.14-t[i])-(a*cos(3.14-t10)+sqrt(1600-x[i]^2)-h
10)=0);
for(i=1:9)((k[i]-(sqrt((sqrt(1600-x[i]^2)-h10-a*cos(t10))^2+a^2*sin(t10)^2)-(a+h
10-sqrt(1600-x[i]^2))))*8=0);
((l-h10)*sin(t10)-70)*100=0;
for(i=1:9)((k[i]-(l-a-h10))*1000<0);
a+h10-l<0;
(h10-a)*100<0;

Title "模型二参数求解(单侧 40 条)";
Parameters
h20[4,8],k(1:19)[0,],t(1:19)[0,3.14],t20[1.0472,1.3963],l[70,100],a[0,];
Constant h(1:19)=[39.95, 39.7995, 39.5474, 39.1918, 38.7298, 38.1576,
37.47, 36.6606,
35.7211, 34.641, 33.4066, 32., 30.3974, 28.5657, 26.4575, 24.,21.0713, 17.4356,
12.49];
Constant
x(1:20)=[2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40];
MaxFunction 2*((l-h20)*cos(t20)+h20)/((l-h20)*sin(t20));
for(i=1:19)((h20+a+k[i]-h[i])*sin(t[i])-a*sin(t20)=0);
for(i=1:19)((h20+a+k[i]-h[i])*cos(3.14-t[i])-(a*cos(3.14-t20)+sqrt(1600-x[i]^2)-
h20)=0);
for(i=1:19)((k[i]-(sqrt((sqrt(1600-x[i]^2)-h20-a*cos(t20))^2+a^2*sin(t20)^2)-(a+
h20-sqrt(1600-x[i]^2))))*5=0);
((l-h20)*sin(t20)-70)*100=0;
for(i=1:19)((k[i]-(l-a-h20))*1000<0);
a+h20-l<0;
(h20-a)*100<0;

```

模型三：

```

Title "模型三椭圆桌面参数求解";
Parameters
h10[4,8],k(1:9)[0,],t(1:9)[0,3.14],t10[1.0472,1.3963],l(1:9)[0,],l10[50,100],a[0,];
Constant h(1:9)=[24.8747, 24.4949, 23.8485, 22.9129, 21.6506, 20.,
17.8536, 15.,10.8972];
Constant y(1:10)=[12.8772, 12.8187, 12.7564, 12.7496, 12.8967, 13.3563,
14.3852,16.4199, 20.3268, 24.5798];
Constant z(1:10)=[-33.0128, -33.5303, -34.4078, -35.6674, -37.3369,
-39.4444, -42.0035,-44.9776, -48.1888,-50];
Constant x(1:10)=[5,10,15,20,25,30,35,40,45,50];

```



```

MinFunction  sum(i=1:9)((l[i]*cos(t[i])+h[i]-y[i])^2+(-l[i]*sin(t[i])
-z[i])^2)+(110*cos(t10)+h10-y[10])^2+(-110*sin(t10)-z[10])^2;
for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*sin(t[i])-a*sin(t10)=0);
for(i=1:9)((h10+a+k[i]-h[i])*cos(3.14-t[i])-(a*cos(3.14-t10)+h[i]-h10)=0);
for(i=1:9)((k[i]-(sqrt((h[i]-h10-a*cos(t10))^2+a^2*sin(t10)^2)-(a+h10-h[i])))^5=
0);
(110*sin(t10)-50)*100=0;
for(i=1:9)((l[i]*sin(t[i])-50)*100<0)
for(i=1:9)(k[i]-l[i]<0);
(h10-a)*100<0;

```