
武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 4 题

基于微分方程模型的换热系统分析与优化

第 4 组

姓名	方向
谢校康	建模
费舒波	建模
杨 琛	建模
田德琥	建模
左志豪	编程

2014 年 8 月 20 日

基于微分方程模型的换热系统分析与优化

摘要

本文以地热空调地下换热系统为研究对象，根据傅里叶定律，建立微分方程模型表示地下换热系统的具体热交换过程，求解换热管道出口温度，并根据模型合理设计管道长度，使其最大制冷量为 5000 kca/h ，具体思想如下：

对于问题一，考虑换热管壁厚度，将地下换热过程分为三部分：工质流与换热管内壁的热对流、换热管内壁与外壁间的热传导、换热管外壁与地下暗流的热对流。研究水流方向上的热量变化，选取距离微元，依据傅里叶定律，分别对三个过程的热交换建立热平衡方程，结合题目中所给条件：套管绝热、换热管内溶液温度恒定，可以判断三个过程的热流量相等，由此可以联立方程，带入边界条件，用 Mathematica 软件求得换热管内溶液温度关于管长的函数解析解。对于题目中溶液密度、比热容、换热管厚度等相关参数，可根据国际通用、国家管材标准等查找相关数据，求得换热管溶液出口温度。

对于问题二，可以根据问题一所列写的三个过程的方程得到工质流和暗流进行热交换的总热交换系数 K ，并由此建立换热管内工质流和套管内暗流热交换的微分方程模型，得到距离微元 dx 、单位时间内所交换的热量微元 dQ ，在最大制冷要求的前提下，对 dQ 积分得到功率与管长的对应关系。查阅相关资料，得知 K 值范围为 $1000\text{--}2500\text{ w/m}^2\text{K}$ ，取不同 K 进行求解，进行灵敏度验证，并结合实际情况选出最合理的换热管管长，为 2.92 米。

模型的推广中考虑 K 值的变化对模型求解结果的影响、循环方式和垢层传热影响以及通过模型分析提高传热效率的方法，并进一步考虑整个地热空调系统间的热量传递，改变了地下换热系统的初温影响，实现了循环制冷的分析，将模型进一步推广。

关键词：傅里叶定律 微元分析 微分方程模型 换热系统优化

一、问题重述

地热空调即地源热泵空调，是一种利用浅层地下热源，即可供热又可制冷的高效节能型环保中央空调系统。其能源来自于地下热源，被认为是环境友好型空调系统。

某地区地下水资源丰富，水温常年在 15 摄氏度左右，夏季室外炎热。现有一别墅拟利用地下水资源，建立地下水源空调系统。该系统的换热器负责室外与地下的热量交换。

为避免地下暗河中流沙对换热管道的磨损，将管道放置于绝热套管中。换热套管内以水为介质，管内溶液温度恒定，管道内径 2cm，室外温度 32 摄氏度，循环水泵（功率为 2.2kw）输送流量为 2 l/s。套管内水流速度为 1 l/s。

问题一：建立数学模型确定出口溶液介质温度。

问题二：在最大制冷要求在 5000 kca/h（1 kcal/h=1.163W）的条件下，估算换热管道的总长至少为多少。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要确定出口溶液介质的温度，需要建立模型表示套管内的暗河水与换热管内工质流的热交换过程。题目中说明换热管内溶液介质温度恒定，即无需考虑与时间的关系，只需建立溶液温度关于管道长度的关系式。考虑实际情况，换热管壁厚度会影响热交换，而已知条件，套管绝热，故要考虑的热交换过程分为三个部分：高温工质流对换热管内侧壁的热对流、换热管内侧壁到外侧壁的热传导、外侧壁与套管内暗流的热对流。研究水流方向上的热量变化，选取距离微元，根据傅里叶定律^[1]分别对这三个热交换过程建立热平衡微分方程，联立方程，带入边界条件，解出方程解析解。

2.2 问题二的分析

问题二要求在最大制冷量为 5000kca/h 的前提下换热管的总长度，制冷量即为套管暗流与换热管内工质流热量交换的总功率。而在问题一中已经得到暗流与工质流热交换的总换热系数 K ，故有此可建立二者热交换的微分方程，根据功率的定义，可对上述微分方程进行转换，求得在距离微元 dx 内的功率微元 dP ，对功率微元在 x 轴方向积分，即可得到功率与换热管长度的关系，在制冷功率不小于 5000kca/h，得到换热管长度，对结果进行分析，得到换热管长度的合理解。

三、模型假设

- 1、假设水泵散发的热量对水温造成的影响可以忽略不计；
- 2、假设换热器管道的水与套管的水的流动方向是相反的；
- 3、假设换热管内工质流和套管内地下暗流均无需考虑径向温度梯度变化，整体水流温度只随轴向坐标 x 有关；
- 4、达到传热平衡之后，轴向温度的连续变化不引起轴向传热；
- 5、假设工质流在换热管外的地下部分不发生热交换；
- 6、假设房间内与室外的热交换热量和温差成正比的。

四、符号说明

符号	含义	单位
$H(x)$	换热管内溶液温度变化函数	
$F(x)$	地面上输水管温度变化函数	
$T(x)$	套管内暗河水温度变化函数	
$K_1(x)$	换热管内壁温度变化函数	
$K_2(x)$	换热管外壁温度变化函数	
Φ	单位时间各个热交换过程的热流量	w
$h_1、h_2$	表示溶液与换热管壁的对流换热系数	w/(m^2k)
λ	换热管的热传导系数	w/(mk)
A	热交换的面积	m^2
Q_{in}	位置 x 处的热量	J
Q_{out}	位置 $(x+\Delta x)$ 处的热量	J
Q_{trs}	溶液和管壁热交换的热量	J
W	换热系统的制冷功率	w
K	热交换过程总传热系数	w/(m^2k)
t^n	第 n 此循环时室内温度	k
Q_1	上次循环后室内从室外吸收的热量	J
Q_2	地上部分管道溶液从空气中所吸收的热量	J
η	室内外传热系数	

五、模型的建立和求解

5.1 模型的相关原理和说明

5.1.1 地热空调地下换热系统

地下换热系统^{[2][3]}是地热空调的核心部分，其结构见如下示意图，地下暗流河水常年保持恒温，暗流经过滤进入绝热的套管中，内管是用材为聚乙烯或聚丙烯的换热管，地面上的工质流从此管内输入，与套管内暗流发生热交换，夏季比暗流温度高，向暗流放热，冬季比暗流温度低，从暗流中吸热。暗流实现了传统空调的制冷和制热作用。

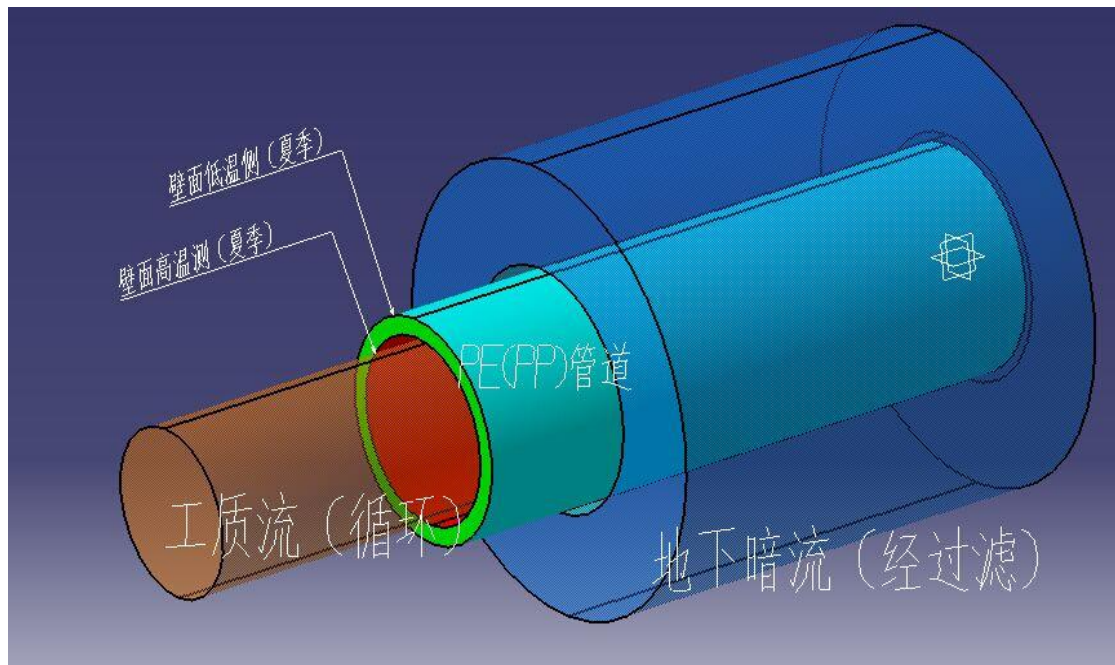


图 1 地下换热系统示意图

5.1.2 傅里叶定律

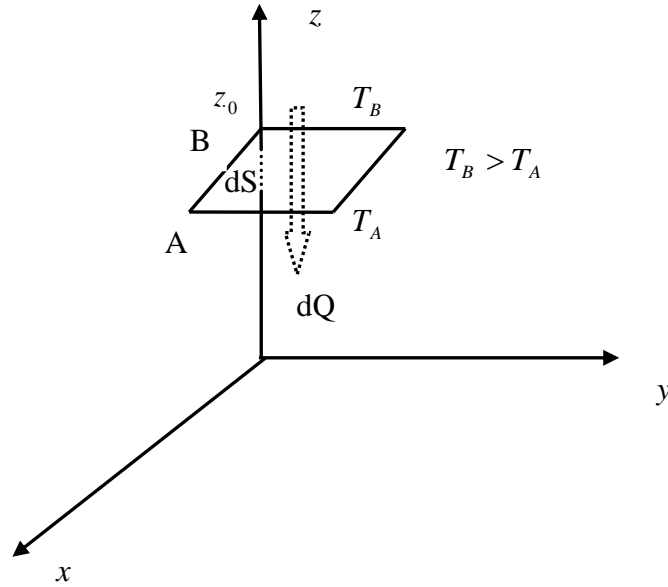


图 2 热量传导示意图

如图,如以 dQ 表示在时间 dt 内通过 dS 沿 z 轴正方向传递的热量,以 $\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z_0}$ 表示 dS 所在处的温度梯度,则由实验得出,在 dt 时间内通过 dS 面积传递的热量 dQ 不仅与 dt 和 dS 成正比,且与 z_0 处的温度梯度成正比,即

$$dQ = -K \left(\frac{dT}{dz} \right)_{z_0} dS dt$$

式中的比例系数 K 叫做热传导系数,它在数值上等于当温度梯度为单位数值时,在单位时间内通过垂直于温度梯度方向的单位面积所运输的热量。其单位为 $W \cdot m^{-1} K^{-1}$ (或 $kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$),负号表示热量沿温度较小的方向运输,此式叫做傅里叶定律。

5.2 问题一模型的建立与求解

5.2.1 模型的建立

下图为该地下换热系统剖面图,热量的传递由换热管内溶液到套管内暗河水,分为三个过程,即热流体的热量经管内壁、管外壁到冷流体,属于:对流→导热→对流类型。

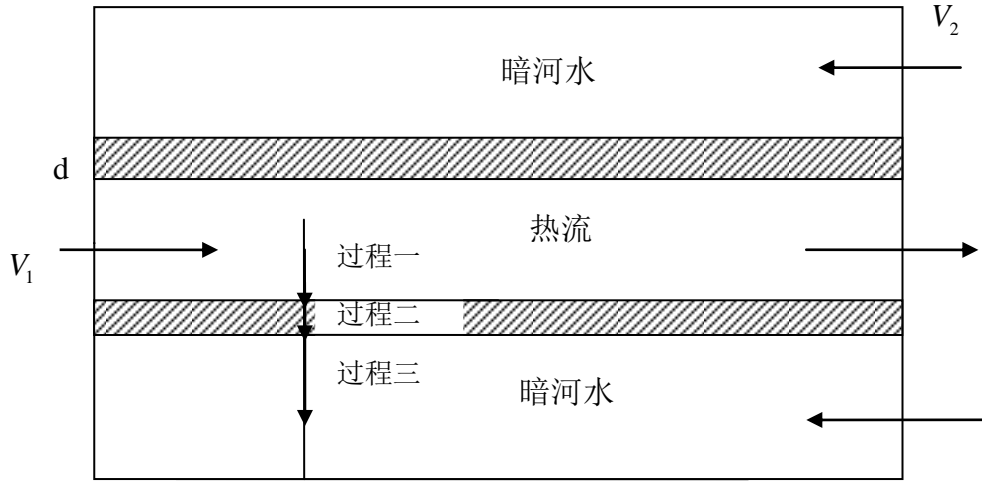


图 3 换热系统剖面示意图

(1) 过程一：工质流和管内壁面高温侧的热对流
研究在 $(x, x+\Delta x)$ 的热交换过程，示意图如下：

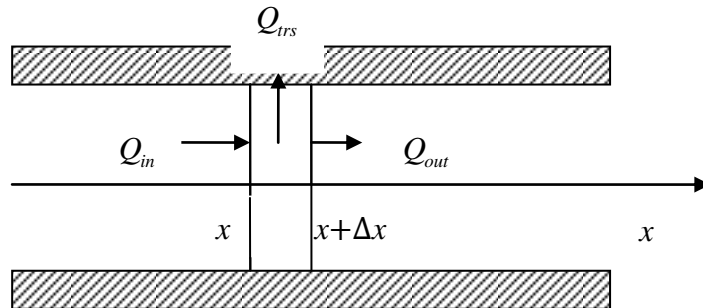


图 4 过程一热对流示意图

由热平衡方程可列出： $Q_{in} - Q_{out} = Q_{trs}$

$$V_1 C \rho (H(x) - H(x + \Delta x)) = \Phi_1 = \frac{H(x) - K_1(x)}{1/A_1 h_1} \quad (1)$$

其中 Φ_1 表示此过程的热流量， $A_1 = 2\pi r \Delta x$ ，表示对流面积， h_1 表示工质

流与换热管内壁的换热系数，而 $1/A_1 h_1$ 表示流体与壁面的对流换热热阻。整理得到：

$$\frac{V_1 C \rho (H(x) - H(x + \Delta x))}{\Delta x} = h_1 (H(x) - K_1(x)) \cdot 2\pi r$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得到微分方程：

$$-\frac{dH}{dx} \cdot V_1 C \rho = h_1 (H(x) - K_1(x)) \cdot 2\pi r \quad (2)$$

(2) 过程二 管内壁面高温侧和管外壁面低温侧的热传导

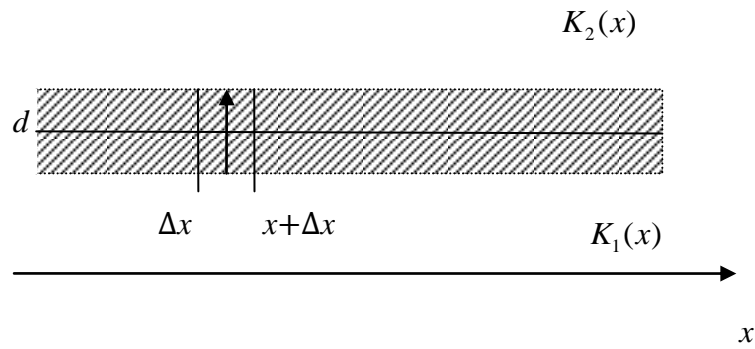


图 5 过程二热传导示意图

$$\Phi_2 = \frac{K_1(x) - K_2(x)}{d / \lambda A_2} \quad (3)$$

其中 $A_2 = 2\pi(r + \frac{1}{2}d)\Delta x$, 此处 A_2 为近似取值，为平均传热面积， Φ_2 是此过程的热流量， λ 为换热管壁（材料为 PP 或 PE）的导热系数。

(3) 过程三 管外壁面低温侧与暗河水（经过滤）的热对流

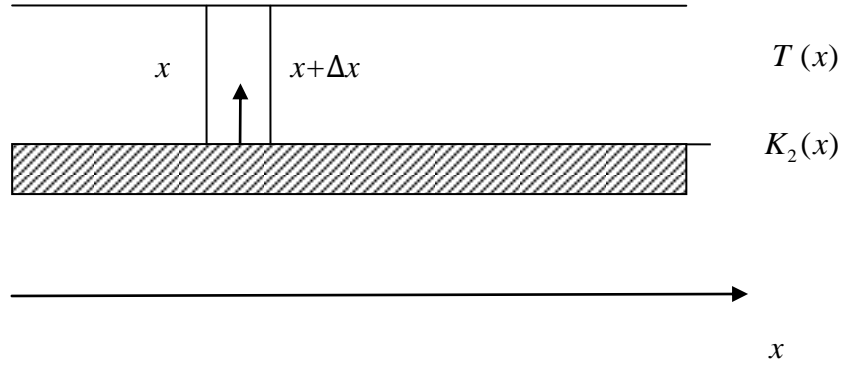


图 6 过程三热对流示意图

列出热平衡方程：

$$C\rho V_2(T(x)-T(x+\Delta x))=\Phi_3=\frac{K_2(x)-T(x)}{1/A_3h_2} \quad (4)$$

其中 $A_3=2\pi(r+d)\Delta x$ ， Φ_3 为此过程的热流量， h_2 为对流换热系数。

整理得到：

$$\frac{C\rho V_2(T(x)-T(x+\Delta x))}{\Delta x}=h_2(K_2(x)-T(x))\cdot 2\pi r$$

当 Δx 趋于 0 时，得到其微分形式的方程：

$$-\frac{dT}{dx}\cdot V_2C\rho=-h_2(K_2(x)-T(x))\cdot 2\pi r \quad (5)$$

由于换热管内温度恒定，而且套管绝热，即在三个热交换过程中热流量相等，即：

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3 \quad (6)$$

将方程 (2) (3) (5) (6) 联立，带入边界条件，即可求解。

5.2.2 模型的求解

5.2.2.1 相关参数确定

(1) 工质流与暗流的比热容与密度取常温常压下水的相关参数：

$$c = 4.2 \times 10^3 J / kg \cdot ^\circ C$$

$$\rho = 1 \times 10^3 kg / m^3$$

(2) PE 管和 PP 管壁厚的确定，参考国家管材标准：

表 1 聚乙烯（PE）换热管相关物理性质

PE63 管材规格										
公称 外径 dn, mm	SDR33		SDR26		SDR17. 6		SDR13. 6		SDR11	
	公称压力 PN, Mpa									
	0. 32		0. 4		0. 6		0. 8		1. 0	
	公称 壁厚	米重 kg/m	公称 壁厚	米重 kg/m	公称 壁厚	米重 kg/m	公称 壁厚	米重 kg/m	公称 壁厚	米重 kg/m
16									2. 3	0. 104
20							2. 3	0. 134	2. 3	0. 134
25					2. 3	0. 172	2. 3	0. 172	2. 3	0. 172
32					2. 3	0. 225	2. 4	0. 233	2. 9	0. 273
40			2. 3	0. 287	2. 3	0. 287	3. 0	0. 358	3. 7	0. 461
50			2. 3	0. 363	2. 9	0. 443	3. 7	0. 552	4. 6	0. 669
63	2. 3	0. 462	2. 5	0. 497	3. 6	0. 691	4. 7	0. 886	5. 8	1. 064

表 2 聚丙烯（PP）换热管相关物理性质

公称直径	外径公差	I 型 (0.48MPa)		II 型 (0.6MPa)		III 型 (0.8MPa)	
		壁厚	公差	壁厚	公差	壁厚	公差
16	±0.2						
20	±0.3						
25	±0.3					2.0	+0.4
32	±0.3					2.2	+0.4
40	±0.4			2.1	+0.4	2.8	+0.5
50	±0.4	2.0	+0.4	2.6	+0.5	3.4	+0.6

题目中管道内壁半径 20mm，计算壁厚之后，PE 管外径参考值约 50mm，与标准规格中的公称外径 50mm 接近，取公称壁厚为 4.6mm；

PP 管公称直径取 40mm，选择抗压强度大的 III 型（0.8MPa）管材的壁厚值 2.8mm。

(3) K 值的初步确定：

由传热学知识可知，不同过程中的传热流量 Φ 与两介质之间的温差以及热阻有关，计算式如下：

$$\Phi = \frac{\Delta t}{1/AK}$$

此为平板传热公式，用到本题中需要进行圆管情况下的转化，分析以上三个

过程:

a 过程 1 为工质流和管壁之间的对流换热, 热阻为对流换热热阻, 涉及工质流体 (水) 和管壁 PP (PE) 管的对流换热, 热阻表达式为:

$$R_1 = 1/(h_1 A_1);$$

b 过程 2 为管壁内部壁面高温侧与低温侧之间的热传导, 热阻为导热热阻, 涉及 PE(PP)材料内部的热传导, 热阻表达式为:

$$R_2 = d/(\lambda A_2);$$

c 过程 3 与过程以相近, 热阻为对流换热热阻, 表达式为:

$$R_3 = 1/(h_2 A_3);$$

其中, A_1, A_2, A_3 为三个过程的传热面积, 由于壁厚相对于管内径来说相对较小, 壁厚与内径壁纸接近 1:6, 所以计算时将三个面积参量取统一的值 A_2 , 便于方程的求解。计算过程中, 得到热流量 Φ 的表达式为:

$$\Phi = AK \cdot (H(x) - T(x));$$

$$A/K = A/h_1 + d \cdot A/\lambda + A/h_2$$

A/K 为综合过程传热热阻, 表示暗流与工质流之间的传热阻抗, 第二个等式表示总热阻为相互串联热阻的连加和, 则:

$$K = 1/(1/h_1 + 1 \cdot d/\lambda + 1/h_2)$$

K 为总传热系数, 通过查阅相关资料^[4], 可知, K 的大致范围为 1000~2500 W/m^2k , 本题求解过程中先取估计值 $K = 1000 W/m^2k$, 之后在结果评价一节中分析其灵敏度与计算方法。

5.2.2.2 方程求解

为了使方程求解简单, 可将方程 (2) (3) (5) 求和, 并结合公式 (6) 可得到微分方程组:

$$-\frac{dH}{dx} \cdot V_1 C \rho = AK \cdot (H(x) - T(x)) \quad (7)$$

$$-\frac{dT}{dx} \cdot V_2 C \rho = AK \cdot (H(x) - T(x)) \quad (8)$$

边界条件为:

$$T(l) = 288k$$

$$H(0) = 305k$$

带入相关参数, 用 Mathematica 软件求解, 分别得到暗流和工质流的温度函数:

$$T(x) = -\frac{17 \cdot (0.441176 - 1.88235e^{0.0640287l} + e^{0.0640287x})}{-0.5 + e^{0.0640287l}}$$

10

$$H(l) = -\frac{8.5 \cdot (0.82353 - 3.76471e^{0.0640287l} + e^{0.0640287l})}{-0.5 + e^{0.0640287l}}$$

将换热管长度为 l 带入工质流温度函数，即得到出口处溶液介质温度为：

$$H(l) = -\frac{8.5 \cdot (0.82353 - 3.76471e^{0.0640287l} + e^{0.0640287l})}{-0.5 + e^{0.0640287l}} \quad (9)$$

5.3 问题二模型的建立与求解

问题一建立了换热器热交换微分方程模型^[5]，所用管道材料为聚丙烯(PP)，求得换热管内工质流的温度分布函数 $H(x)$ 为：

$$H(x) = \frac{-8.5 \cdot (0.88 - 3.76 \cdot e^{0.064l} + e^{0.064x})}{-0.5 + e^{0.064l}}$$

地下暗流经过过滤之后流入大套管的水流温度随 x 的分布函数 $T(x)$ 为：

$$T(x) = \frac{-17 \cdot (0.44 - 1.88 \cdot e^{0.064l} + e^{0.064x})}{-0.5 + e^{0.064l}}$$

工质流和暗流之间传递的热流量 $d\Phi$ 微元的关系式为：

$$d\Phi = (0.04 + d)\pi \cdot K \cdot (H(x) - T(x)) \cdot dx \quad (10)$$

由 $0 \sim l$ 上对热流量进行积分即可得到单位时间内的换热管道内工质流与地下暗流之间的热交换量，即制冷功率为：

$$\int_0^l d\Phi = \int_0^l (0.04 + d)\pi \cdot K \cdot (H(x) - T(x)) \cdot dx \quad (11)$$

积分得到的结果为关于 l 的函数式 $W = f(l)$ ，表达如下：

$$W = \int_0^l d\Phi = \int_0^l \frac{-8.5 \cdot (0.88 - 3.76 \cdot e^{0.064l} + e^{0.064x}) + 17 \cdot (0.44 - 1.88 \cdot e^{0.064l} + e^{0.064x})}{-0.5 + e^{0.064l}} dx \quad (12)$$

要求最大制冷量要求 $5000kca/l$ ，得到 l 的约束不等式为：

$$W \geq 5000kca/h = 5815w$$

使用 Mathematica 求解积分不等式，得到 K 取 $1000 w/(m^2k)$ 时的 l 长度至少为：2.92m。

六、 模型的评价与改进

6.1 逆流与并流方式的讨论

模型建立的一个基本假设为：工质流与地下暗流（经过滤）流向相反，即采

用逆流换热方式。实际生产生活中采用的方式主要有两种——并流和逆流。现分析逆流的特点：在题目假设的条件下，逆流与并流相比，平均温差较大，在热流量 Φ 和总传热系数 K 相同的情况下，即：

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$A_1 \cdot K \cdot \Delta t_1 = A_2 \cdot K \cdot \Delta t_2$$

则逆流时所用的接触面积要小于并流，即逆流可以减小材料使用面积，节约材料。但并流在某些场合还是具有独特的优越性，并流初期传热速率大，后期小，若采用粘度较大的液体作为工质，采用并流，则可以使其在进入换热器后迅速提高温度，降低粘度，有利于提高传热效果^{[6][7]}。

6.2. K 值的计算方法和影响因素

总传热系数 K 根据其表达式：

$$k = \frac{1}{(1/h_1 + d/\lambda + 1/h_2)}$$

可知， K 和水与管道的对流换热系数 h 、管道内外侧管壁之间的导热系数 λ 有关^[8]，导热系数 λ 可通过查阅材料性质相关资料得到；对流换热系数 h 和与换热过程中流体的物理性质、换热表面的形状、部位、表面与流体之间的温差以及流体的流速等都有密切关系^[9]，结合此题的背景，由于题目中许多因素做了适当地假设，使得理论计算 K 的值具有一定的困难，因此，可以采用理论计算结合类似管道实测值的方法对 K 值的选取进行完善。

对 K 值进行灵敏度分析如下：

绘制出在最大制冷量要求下最小管长 l 与总传热系数 K 的关系图如下：

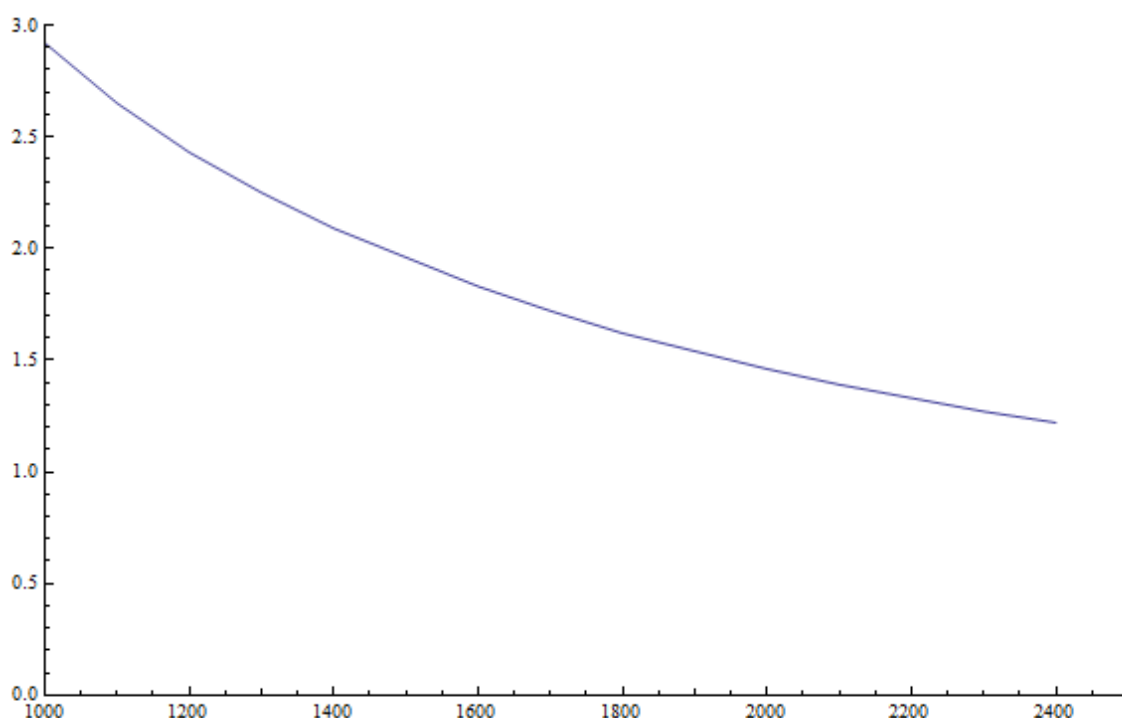


图 7 最小管长 l 与总传热系数 K 的关系图

由图分析可知, K 值从 1000 至 2500 变化过程中, 最小管长均小于 3 米且随着 K 值的增大而减小, 出于实际考虑, 提高 K 值成本较大, 且的提升 K 值对长度的减小没有很大的影响, 因此选择 K 的最小值代入模型二计算求解。

除上面所列因素外 K 还与管道内的垢层厚度及积累状况有关, 这里简单做一下分析:

若传热面积处由于时间积累造成了垢层的堆积, 则相当于在工质流和管壁、管壁和暗流两个接触处加入了新的传热层, K 的表达式变为:

$$K = \frac{1}{1/h_1 + d_{in}/\lambda_{in} + d/\lambda + d_{out}/\lambda_{out} + 1/h_2}$$

其中 d_{in} 和 d_{out} 分别表示内部垢层和外部垢层的厚度, λ_{in} 和 λ_{out} 分别表示内部垢层和外部垢层的热传导系数, 由此可知, 增加垢层会导致 K 的减小, 随着时间的积累会使得传热效率降低, 同时, 垢层的影响还与垢层的物理性质有关, 详见参考文献^[10]。

6.3. 关于 K 值提高的讨论

从总传热系数 K 的表达式:

$$K = \frac{1}{1/h_1 + d/\lambda + 1/h_2}$$

中我们可以看到: K 的值比三个传热系数最小的一个要小, 要提高 K 的值, 着重是要提高最小的那个传热系数。这样对于传热效果的提高最有利。通过分析传热热阻的影响和查阅相关文献, 在本题目中, 考虑提高换热管内工质流的湍流程度, 可以在 PP(PE)管内设置螺旋弹簧[□]提高换热特性、增加除垢能力。

6.4 地热空调系统的能量交换

我们改进模型, 考虑整个地热空调系统, 即地面下的热交换是一个循环的过程, 每次入口处的温度是一个不断变化的过程, 具体分析如下:

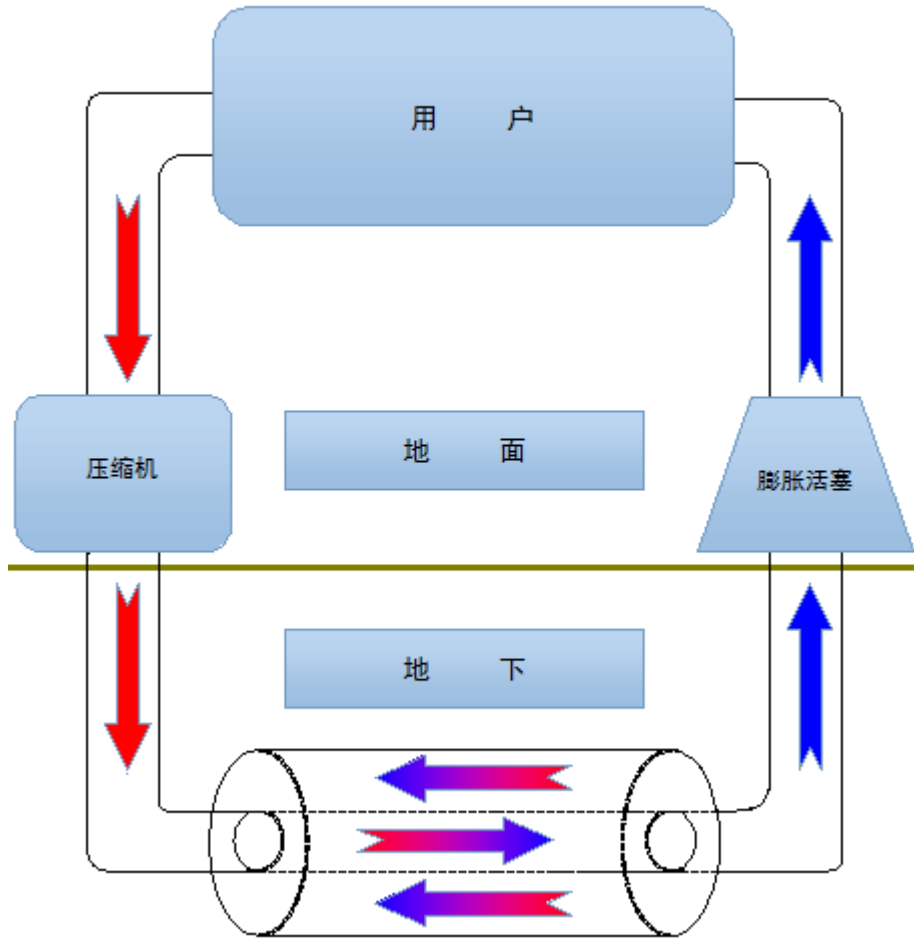


图 8 地热空调简化模型

根据简化模型，整个系统在一次热循环中：本次抽出和下次输入工质流的热量差转分为三个部分：暴露在室外的输水管和空气热交换所吸收的热量、房间内本次温度改变所放出的热量、上次循环后房间从室外所吸收的热量，关系表达如下：

$$(H^{n+1}(0) - H^n(l))c_1\rho_1v_1 = (t^{n+1} - t^n)c_2\rho_2v_2 + Q_1 + Q_2 \quad (13)$$

其中 c_1 、 ρ_1 、 c_2 、 ρ_2 分别表示水、空气的比热容和密度； v_1 表示地上部分输水管道的容积， v_2 表示房间体积， Q_1 表示上次循环后室内从室外吸收的热量、 Q_2 表示地上部分管道溶液从空气中所吸收的热量。

考虑管道内水和空气的热交换：

$$(F(x + \Delta x) - F(x))c_1\rho_1 \cdot 2\pi r = K_3(t_0 - F(x)) \cdot 2\pi r \quad (14)$$

可得到其微分方程： $\frac{dQ_2}{dx} = K_3(t_0 - F(x)) \cdot 2\pi r$

积分可得到

$$Q_2 = \int_0^{l_1} K_3(t_0 - F(x)) \cdot 2\pi r dx \quad (15)$$

其中 l_1 为室外输水管总长。

对于室内外热量交换，仅简单表示其关系函数：

$$Q_1 = \eta(t_0 - T^n) c_2 \rho_2 v_2 \quad (16)$$

其中 η 为室内外传热系数

七、参考文献

- [1] 费淑清, 聂宜如, 申先甲. 热学教程. 北京: 高等教育出版社, 2011, 179-180
- [2] 刘虎. 渗流条件下地埋管换热器传热影响因素及优化设计研究. 太原: 太原理工大学出版社, 2013, 19-28
- [3] 康龙, 地源热泵不同换热器形式的性能分析. 技术交流, 2009 (6), 29-31
- [4] 杨世铭, 陶文铨, 传热学. 北京: 高等教育出版社, 2006, 33-41, 162-167
- [5] 崔嘉珺, 陈潇扬, 陈革, 有限差分法对顺泰热交换过程的模拟与分析. 东华大学学报, 2014 (1): 122-125
- [6] 李道强, 地源热泵空调系统的技术经济评价及地热换热器优化研究. 西安: 西安建筑科技大学, 2004, 9-14
- [7] 谢汝镛, 地源热泵系统设计. 现代空调, 2001 (3), 33-72
- [8] Nevriya.P, Ozana.S, Vilmec.L. The finite difference method applied for the simulation of the heat exchangers dynamics. Proceedings of 13th WSEAS International Conference on Systems, 2009, 109-114
- [9] Fujii H. . Optimizing the Design of Large-Scale Ground-Coupled Heat Pump Systems Using Ground water and Transport Modeling. GEOTHERMICS, 2005 (34): 347-364
- [10] Chiasson A. D., Spitler J. D. . A Preliminary Assessment of the Effects of Goundwater Flow on Closed-loop Gound-Source Heat Pump Systems. ASHRAE Trans, 2000, 106 (1): 380-393

附录

问题一 Mathematica 求解结果:

```
n[1638]:= Clear["`*"];
v1 = 1*10-3; v2 = 2*10-3; c = 4.2*103; ρ = 103;
A1 = 1 / ((0.04 + d) π h); A2 = 1 / ((0.04 + d) π k); A3 = 1 / ((0.04 + d) π h);
A = A1 + A2 + A3; A = (0.04 + d) π * 1000; d = 2.8*10-3;
sol = DSolve[{c ρ v1 T'[x] = -A (H[x] - T[x]), c ρ v2 H'[x] = -A (H[x] - T[x]),
H[0] = 32, T[1] = 15}, {T, H}, x]

ut[1641]= {{H → Function[{x}, - $\frac{8.5 (0.882353 - 3.76471 e^{0.01600721} + 1. e^{0.0160072 x})}{-0.5 + 1. e^{0.01600721}}$ ],
T → Function[{x}, - $\frac{17. (0.441176 - 1.88235 e^{0.01600721} + 1. e^{0.0160072 x})}{-0.5 + 1. e^{0.01600721}}$ ]}}
```

问题二 Mathematica 求解结果:

```
Q = 5000*1.163;
NSolve[Integrate[(H[x] /. sol[[1, 1]]) - (T[x] /. sol[[1, 2]]) * 0.04 π 1000, {x, 0, 1}] == Q, 1]
51)= {{1 → 2.91289}}
```