计算物理作业 4

王一杰[a]

[a] 中国科学技术大学

2021 年 10 月 21 日

1 Homework 4

1.1 Problem 1

根据 RK4 算法，该问题的程序很容易给出如下（MATLAB 代码）：

```
x0=2;                              %设定初始值
t1=3;                              %设定计算时间
dt=0.2;                            %计算步长
xstore=zeros(1,t1/dt+1);           %计算结果储存
xstore(1,1)=x0;
t=0:dt:t1;                         %计算时间节点储存
for i=1:1:(t1/dt)                  %RK4算法
    K1=10-3*xstore(1,i);
    K2=10-3*(xstore(1,i)+dt*K1*0.5);
    K3=10-3*(xstore(1,i)+dt*K2*0.5);
    K4=10-3*(xstore(1,i)+dt*K3);
    xstore(1,i+1)=xstore(1,i)+dt*(K1+K2*2+K3*2+K4)/6;
end
```

演化结果如图 1 所示，计算结果与理论计算期望 $x = \frac{10-4e^{-3t}}{3}$ 相符，且在 dt 较大（$dt = 0.2$）时已经取得相当好的结果。

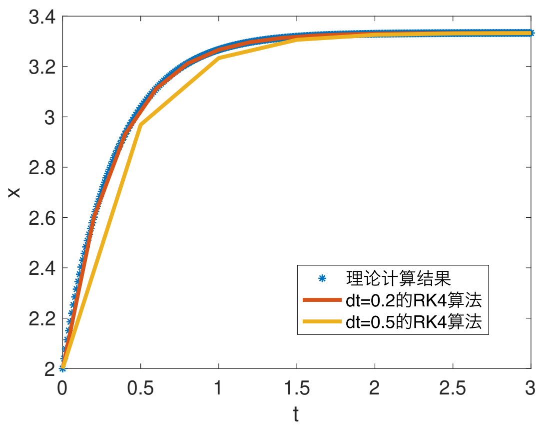

图 1: Problem1 的程序计算结果

1.2 Problem 2

给出递推公式 $x_{i+1} = x_i + dt\cdot(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3)$,

且取 $K_1 = f(t_i, x_i)$, $K_2 = f(t_i + p_2\cdot dt, x_i + p_2\cdot dtK_1)$, $K_3 = f(t_i + p_3\cdot dt, x_i + p_{31}\cdot dtK_1 + p_{32}\cdot dtK_2)$

其中，$K_1 = \dot{x}(t_{i+1})$,

$K_2 = \dot{x}(t_i) + p_2\cdot dt\frac{\partial f}{\partial t} + p_2\cdot dtK_1\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(p_2\cdot dt)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(p_2\cdot dtK_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (p_2\cdot dt)^2 K_1\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} + O(dt^3)$,

$K_3 = \dot{x}(t_i) + p_2\cdot dt\frac{\partial f}{\partial t} + (p_{31}\cdot dtK_1 + p_{32}\cdot dtK_2)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(p_2\cdot dt)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(p_{31}\cdot dtK_1 + p_{32}\cdot dtK_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (p_2\cdot dt)\cdot(p_{31}\cdot dtK_1 + p_{32}\cdot dtK_2)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} + O(dt^3)$,

代入 $x_{i+1} = x_i + dt\cdot(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3) + O(dt^4)$，与 Taylor 展开公式 $x_{i+1} = x_i + dt\dot{x}(t_i) + \frac{dt^2}{2}\ddot{x}(t_i) + \frac{dt^3}{6}\dddot{x}(t_i) + O(dt^4)$ 对比，可得要求满足的方程如下:

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$,

$p_3 = p_{31} + p_{32}$,

$p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 = \frac{1}{2}$,

$p_2^2\lambda_2 + p_3^2\lambda_3 = \frac{1}{3}$,

$p_2 p_{32}\lambda_3 = \frac{1}{6}$.

上述方程显然有无穷多组解，能够满足 $O(dt^4)$ 精度，命题得证。