

计算物理作业 8

王一杰^a

^a 中国科学技术大学

2021 年 12 月 1 日

目录

1 Problem 1	1
1.1 程序设定	1
1.2 程序实现	1
1.3 运行结果	2
2 Problem 2	3
2.1 程序设定	3
2.2 程序实现	3
2.3 运行结果	5

1 Problem 1

1.1 程序设定

问题描述:

一个小球质量 m , 以初速度 V_0 , 与水平方向夹角 θ , 从坐标原点开始做抛物运动。它在空气中的阻力可以近似用 $-b\vec{v}$ 来表示, \vec{v} 为速度矢量。使用 mathematica 求解运动轨迹问题。

程序设定:

小球质量 $m = 0.14kg$,
重力加速度 $g = 9.8m/s^2$,
初速率 $V_0 = 45m/s$,
出射角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

1.2 程序实现

程序实现如下:

```
1 Clear["Global`*"]
2 sol = DSolve[{x''[t] == -(b/m)*x'[t], y''[t] == -(b/m)*y'[t] - g,
3   x[0] == 0, y[0] == 0, x'[0] == v0*Cos[Theta],
4   y'[0] == v0*Sin[Theta]}, {x[t], y[t]}, t] // ExpandAll;
5 (*运动方程求解*)
6 x[t_] = (x[t] /. Flatten[sol][[1]]);
```

```

7 y[t_] = (y[t] /. Flatten[sol][[2]]);
8 t[t_] = InverseFunction[x][t] // Simplify;
9 (*反函数, 利用x表示t*)
10 yx[x_] = y[t[x]]
11 (*t(x)带入y(t), 获得表达式y(x)*)
12
13 yyx[x_] =
14 yx[x] /. {b -> 0.033, m -> 0.14, v0 -> 45, \[Theta] -> \[Pi]/3,
15 g -> 9.8}
16 (*赋值*)
17 yy0[x_] =
18 Tan\[Theta]*x - (1/2)*(g/(v0^2*Cos\[Theta]^2))*x^2 /. {g ->
19 9.8, v0 -> 45, \[Theta] -> \[Pi]/3};
20 (*无阻力轨迹方程*)
21 Plot[{yyx[x], yy0[x]}, {x, 0, 200},
22 PlotStyle -> Thickness[0.01], PlotRange -> {{0, 200}, {0, 100}},
23 Frame -> True, FrameLabel -> {Style["x/m", 18], Style["y/m", 18]},
24 FrameStyle -> Thickness[0.003],
25 PlotLegends -> {Style["有阻力", 18], Style["无阻力", 18]]
26 (*绘图*)

```

1.3 运行结果

运行得到的代数函数如下：

$$y(x) = -\frac{gm^2 \log\left(\frac{mv_0 \cos(\theta)}{mv_0 \cos(\theta) - bx}\right)}{b^2} + \frac{gm^2}{b^2} - \frac{gm \sec(\theta)(mv_0 \cos(\theta) - bx)}{b^2 v_0} + \frac{mv_0 \sin(\theta)}{b} - \frac{\tan(\theta)(mv_0 \cos(\theta) - bx)}{b} \quad (1)$$

代入预设参数，得到结果（并与无阻力情况对比）如图 1 所示：

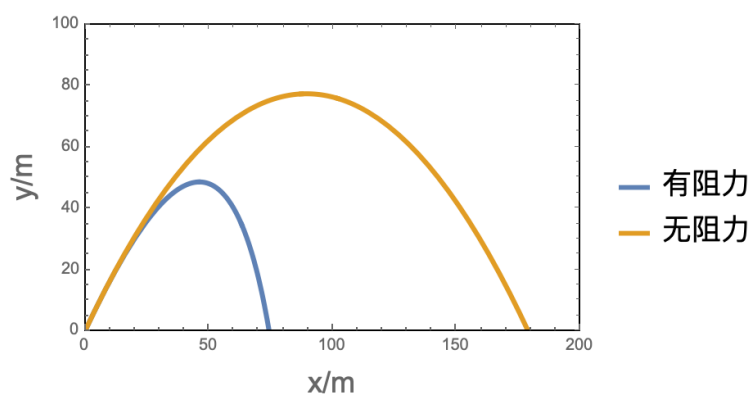


图 1: Problem 1 运行结果

2 Problem 2

2.1 程序设定

问题描述:

考察一维量子力学问题，质量为 m 的一个粒子束缚在势阱 $V(x)$ 中运动， $V(x)$ 的形式如下：

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases}, \quad (2)$$

给出定态情形下本征波函数 $\psi(x)$ 与本征能量 E ，画出前三个能级本征波函数。

程序设定:

使用自然单位制，

$$m = 1\text{GeV}, \quad V_0 = 1\text{GeV}, \quad a = 3\text{GeV}^{-1}.$$

2.2 程序实现

程序实现如下：

```
1 Clear["Global`*"]
2
3 V0 = 1;
4 m = 1;
5 a = 3;
6 (*参数赋值*)
7
8 q[E0_] = Sqrt[2 m (V0 + E0)];
9 k[E0_] = Sqrt[-2 m*E0];
10 B0[E0_] = Exp[k[E0]*a]*Cos[q[E0]*a];
11 D0[E0_] = -Exp[k[E0]*a]*Sin[q[E0]*a];
12 (*已知条件带入*)
13
14 Uevenc[E0_, x_] = Cos[q[E0]*x];
15 Uevenp[E0_, x_] = B0[E0]*Exp[-k[E0]*x];
16 Uevenn[E0_, x_] = B0[E0]*Exp[k[E0]*x];
17 Uoddc[E0_, x_] = Sin[q[E0]*x];
18 Uoddp[E0_, x_] = -D0[E0]*Exp[-k[E0]*x];
19 Uoddn[E0_, x_] = D0[E0]*Exp[k[E0]*x];
20 (*写出通解*)
21
22 soleven =
23 Flatten[FindRoot[(D[Uevenc[E0, x], x] /.
24 x -> a) == (D[Uevenp[E0, x], x] /. x -> a) //
25 Simplify, {E0, #}} & /@ (Range[1, 10, 1]*(-10^-1))];
26 solodd = Flatten[
27 FindRoot[(D[Uoddc[E0, x], x] /. x -> a) == (D[Uoddp[E0, x], x] /.
28 x -> a) // Simplify, {E0, #}} & /@ (Range[1, 10,
29 1]*(-10^-1))];
```

```

30 (*带入边界条件, 求解超越方程*)
31
32 E3 = E0 /. soleven [[1]];
33 E2 = E0 /. solodd [[3]];
34 E1 = E0 /. soleven [[7]];
35 (*本征值能量获取*)
36
37 U1[x_] = Piecewise[{{Uevenn[E1, x],
38     x <= -a}, {Uevenc[E1, x], -a < x <= a}, {Uevenp[E1, x],
39     x > a}}];
40 U2[x_] = Piecewise[{{Uoddn[E2, x],
41     x <= -a}, {Uoddc[E2, x], -a < x <= a}, {Uoddp[E2, x], x > a}}];
42 U3[x_] = Piecewise[{{Uevenn[E3, x],
43     x <= -a}, {Uevenc[E3, x], -a < x <= a}, {Uevenp[E3, x],
44     x > a}}];
45 (*带入参数, 获得未归一化波函数*)
46
47 A1 = Integrate[U1[x]*U1[x], {x, -Infinity, +Infinity}];
48 A2 = Integrate[U2[x]*U2[x], {x, -Infinity, +Infinity}];
49 A3 = Integrate[U3[x]*U3[x], {x, -Infinity, +Infinity}];
50 (*计算归一化因子*)
51
52 U10[x_] = PiecewiseExpand[U1[x]/(Sqrt[A1])]
53 (*归一化*)
54 Plot[U10[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Thickness[0.01],
55     Frame -> True, FrameLabel -> {Style["x", 18], Style["\[Psi]", 18]},
56     FrameStyle -> Thickness[0.003],
57     PlotLegends -> Style[ToString[E1] "=E1", 18]]
58 (*绘图*)
59 U20[x_] = PiecewiseExpand[U2[x]/(Sqrt[A2])]
60 (*归一化*)
61 Plot[U20[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Thickness[0.01],
62     Frame -> True, FrameLabel -> {Style["x", 18], Style["\[Psi]", 18]},
63     FrameStyle -> Thickness[0.003],
64     PlotLegends -> Style[ToString[E2] "=E2", 18]]
65 (*绘图*)
66 U30[x_] = PiecewiseExpand[U3[x]/(Sqrt[A3])]
67 (*归一化*)
68 Plot[U30[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Thickness[0.01],
69     Frame -> True, FrameLabel -> {Style["x", 18], Style["\[Psi]", 18]},
70     FrameStyle -> Thickness[0.003],
71     PlotLegends -> Style[ToString[E3] "=E3", 18]]
72 (*绘图*)

```

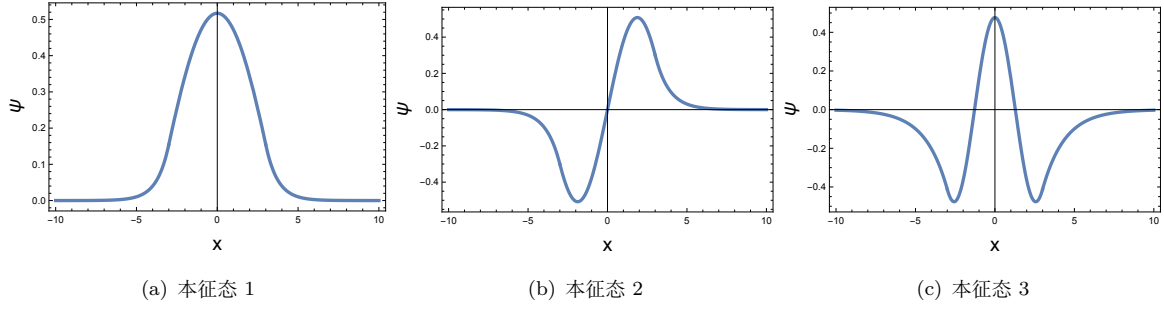


图 2: Problem 2 运行结果

2.3 运行结果

给出的 3 个本征态分别如下：

$$E_1 = -0.910757 GeV, \quad \psi(x) = \begin{cases} 8.85551e^{1.34963x}, & x \leq -3 \\ 0.517023 \cos(0.422476x) & -3 < x \leq 3 \\ 8.85551e^{-1.34963x} & x > 3 \end{cases} . \quad (3)$$

$$E_2 = -0.650311 GeV, \quad \psi(x) = \begin{cases} -9.19332e^{1.14045x}, & x \leq -3 \\ 0.507879 \sin(0.836289x) & -3 < x \leq 3 \\ 9.19332e^{-1.14045x} & x > 3 \end{cases} . \quad (4)$$

$$E_3 = -0.252509 GeV, \quad \psi(x) = \begin{cases} -3.47226e^{0.710646x}, & x \leq -3 \\ 0.476343 \cos(1.22269x) & -3 < x \leq 3 \\ -3.47226e^{-0.710646x} & x > 3 \end{cases} . \quad (5)$$

绘出三个本征态波函数如图 2 所示。