计算物理作业 1-2

王一杰[a]

[a] 中国科学技术大学

2021.10.02

1 Homework 1

若 $(x, x+dx)$ 映射到区间 $(y, y+dy)$，且区间概率不变，则有 $f(x)dx = g(y)dy$。容易导出 $f(x) = g(y)|\frac{dy}{dx}|$ 或 $g(y) = f(x)|\frac{dx}{dy}|$。

2 Homework 2

2.1 Problem 1

（1）目标函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, +\infty)$，若变换前的随机变量 y 为 $[0, 1]$ 均匀分布，有 $g(y) = 1$，则 $|\frac{dy}{dx}| = \lambda e^{-\lambda x}$，可以解得：$x = -\frac{1}{\lambda}ln(y)$。

由此可以给出实现代码如下（MATLAB 代码）：

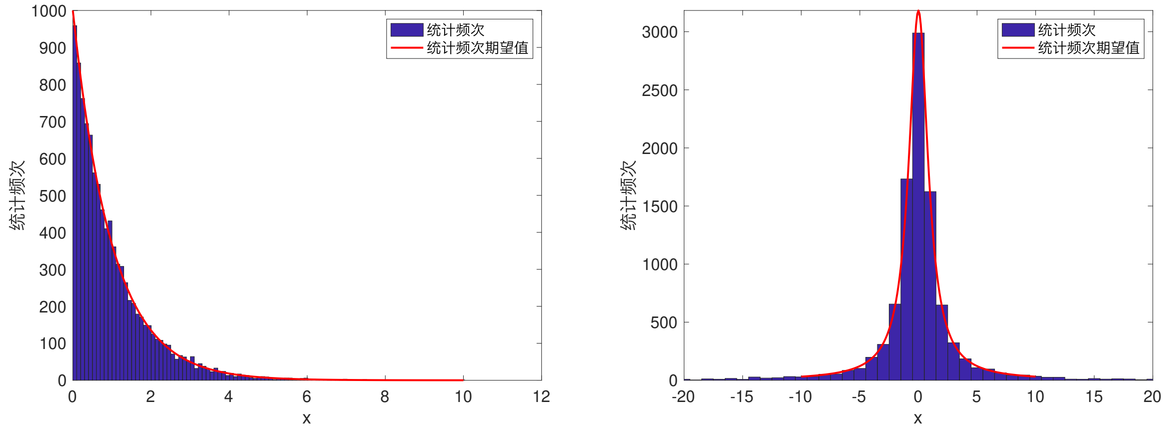
```
N=10000;
lambda=1;
s1=rand(1,N);
x=-(1/lambda)*log(s1);
hist(x,100);
```

效果如图 1(a) 所示。

（2）由于 $I = \int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} h(x)f(x)dx$，其中 $f(x) = e^{-x}$ 可以由（1）中方法生成满足该分布密度的随机变量，$h(x) = x^{\frac{3}{2}}$。则有 I 的估计值 $I = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} h(x_i)$ 由此可以给出实现代码如下（MATLAB 代码）：

```
N=10000000; %此处取N=10000000
lambda=1;
s1=rand(1,N);
x=-(1/lambda)*log(s1);
answer=sum(x.^(1.5))/N
```

给出计算结果为 $I = 1.329 \pm 0.002$ $(P = 0.997)$，其中计算值由上述代码给出，不确定度由理论计算公式 $\sigma = \sqrt{\frac{V(h)}{n}}, where\ V(h) = \int_0^{+\infty} (h(x) - I)^2 f(x)dx$ 计算。



(a) Problem1 结果　　(b) Problem2 结果

图 1: 事例产生器生成随机序列频次统计图

2.2 Problem 2

（1）目标函数为 $f(x)=\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+\Gamma^2}$，若变换前的随机变量 y 为 $[0,1]$ 均匀分布，有 $g(y)=1$，则 $|\frac{dy}{dx}|=\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+\Gamma^2}$，可以解得：$x=\Gamma\cdot tan(\pi(y-\frac{1}{2}))+x_0$。

由此可以给出实现代码如下（MATLAB 代码）:

```
N=10000;
x0=0;
gamma=1;
s1=rand(1,N);
x=gamma*tan(pi*(s1-0.5))+x0;
xbins=-22:22;
hist(x,xbins,44);
axis([-20 20 0 inf]) %此处仅展示[-20,20]区间统计频次
```

效果如图 1(b) 所示。

（2）由于 $I=I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}h(x)f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$ 可以由（1）中方法生成满足该分布密度的随机变量，$h(x)=\pi\cdot\sqrt{x}$。则有 I 的估计值 $I=\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}h(x_i)$ 由此可以给出实现代码如下（MATLAB 代码）:

```
N=10000000; %此处取N=10000000
x0=0;
gamma=1;
s1=rand(1,N);
x=gamma*tan(pi*(s1-0.5))+x0;
answer=real(sum(pi*x.^(0.5))/N) %此处利用取实部舍去x<0部分
```

给出计算结果为 $I=2.220\pm0.009$ $(P=0.997)$，其中计算值由上述代码给出，不确定度由理论计算公式 $\sigma=\sqrt{\frac{V(h)}{n_{eff}}}, where\ V(h)=\int_0^{+\infty}(h(x)-I)^2f(x)dx$ 计算，而且 $n_eff\approx\frac{1}{2}n$，因为生产随机数只有 $x\geq0$ 的部分是有效的。

2.3 Problem3

由于若 ξ 为 $[0,1]$ 上均匀分布，且有 $\xi = e^{-ax}$，则 $\eta = \Sigma_{i=1}^{n} x_i$，且 $\{x_i\}$ 为服从 $\rho(x) = a \cdot e^{-ax}$ 的指数分布，也是 $\Gamma(1,a)$ 分布。由于 Γ 分布有可加性原则 (可以将两个服从 $Gamma$ 分布的变量 x，y 化为 $u = x + y$，$v = y$，然后利用联合密度分布函数计算 u 的边缘分布即可)。即若 x_i 服从 x_i 服从 $\Gamma(\alpha, a)$，x_j 服从 $\Gamma(\beta, a)$ 分布，则 $x_i + x_j$ 服从 x_i 服从 $\Gamma(\alpha + \beta, a)$，所以由于该题中，任意 x_i 服从 $\Gamma(1,a)$ 分布，故 $\eta = \Sigma_{i=1}^{n} x_i$ 服从 $\Gamma(n,a)$ 分布，有 $f(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}$，命题得证。

2.4 Problem4

易于导出：$P(\xi < x) = (2\pi)^{-n/2} \int \cdots \int_B e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2} dx_1 \cdots dx_n$，其中 B 是 n 维球内空间，在秋坐标变换下有 $P(\xi < x) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^{n-1} dr$，则 $f(x) = \frac{d}{dx} P(\xi < x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}$，命题得证。