# 量子力学 II 第 1 回レポート問題

Masato USUI

2023 年 5 月 4 日

1. 1）$d=2$ の時

$$|j=1/2, m=1/2\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |j=1, m=-1/2\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

とする. 明らかに

$$M_z \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{2}$$

である. また $M_\pm = M_x \pm iM_y$ と置くと角運動量演算子の定義から

$$\begin{aligned}[M_z, M_\pm] &= [M_z, M_x \pm iM_y]\\ &= i\hbar(M_y \mp iM_x)\\ &= \pm\hbar(M_x \pm iM_y)\\ &= \pm\hbar M_\pm\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}M_z M_\pm |j=1/2, m=\pm 1/2\rangle &= M_\pm M_z |j=1/2, m=\pm 1/2\rangle \pm \hbar M_\pm |j=1/2, m=\pm 1/2\rangle\\ &= M_\pm (m \pm \hbar) |j=1/2, m=\pm 1/2\rangle\end{aligned}$$

つまり $M_\pm |j, m\rangle$ は $M_z$ の固有状態または 0 ベクトルである

$$M_+ |j, m\rangle \propto \begin{cases}|0\rangle & m{=}1/2\\ |j=1/2, m=1/2\rangle & m=-1/2\end{cases}$$

$$M_- |j, m\rangle \propto \begin{cases}|j=1/2, m=-1/2\rangle & m=1/2\\ |0\rangle & m=-1/2\end{cases}$$

さらにこの比例係数は $M_\pm^\dagger M_\pm = M^2 - M_z^2 \mp \hbar M_z$ であることを用いると

$$\begin{aligned}|c_+|^2 &= \langle j=1/2, m=-1/2|M_+^\dagger M_+|j=1/2, m=-1/2\rangle\\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\frac{3\hbar}{2} - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{2}\hbar^2\right)\\ &= \hbar^2\\ |c_-|^2 &= \langle j=1/2, m=1/2|M_-^\dagger M_-|j=1/2, m=1/2\rangle\\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\frac{3\hbar}{2} - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{2}\right)\\ &= \hbar^2\end{aligned}$$

であるから $c_+ = c_- = \hbar$ にとる. すると結局

$$M_+ \doteq \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad M_- \doteq \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

$M_x = 1/2(M_+ + M_-),\ M_y = 1/2i(M_+ - M_-)$ であることから

$$M_x \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad M_y \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$(M_x, M_y, M_z) \doteq \frac{\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) \tag{5}$$

これは定数倍を除いてパウリ行列と一致する.

$d = 3$ の時

$$|j=1, m=1\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |j=1, m=0\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |j=1, m=-1\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{6}$$

とする. こちらも明らかに

$$M_z \doteq \hbar \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{7}$$

である. 先ほどと同様に $M_\pm$ を定義すると上と同様の議論によって

$$M_+ |j, m\rangle \propto \begin{cases} |0\rangle & m = 1\\ |j=1, m=1\rangle & m = 0\\ |j=1, m=0\rangle & m = -1 \end{cases}$$

$$M_- |j, m\rangle \propto \begin{cases} |j=1, m=0\rangle & m = 1\\ |j=1, m=-1\rangle & m = 0\\ |0\rangle & m = -1 \end{cases}$$

である. 各係数は $M_\pm^\dagger M_\pm$ の演算子をかけることで

$$\begin{aligned}
|c_{+m=0}|^2 &= \langle j=1, m=0|M_+^\dagger M_+|j=1, m=0\rangle\\
&= (\hbar \cdot 2\hbar)\\
&= 2\hbar^2\\
|c_{+m=-1}|^2 &= \langle j=1, m=-1|M_+^\dagger M_+|j=1, m=-1\rangle\\
&= \left(\hbar \cdot 2\hbar - \hbar^2 + \hbar^2\right)\\
&= 2\hbar^2\\
|c_{-m=1}|^2 &= \langle j=1, m=1|M_-^\dagger M_-|j=1, m=1\rangle\\
&= \left(2\hbar^2 - \hbar^2 + \hbar^2\right)\\
&= 2\hbar^2\\
|c_{m=0}|^2 &= \langle j=1, m=0|M_-^\dagger M_-|j=1, m=0\rangle\\
&= 2\hbar^2
\end{aligned}$$

であるから全て $c = \sqrt{2}\hbar$ にとる. すると $M_+, M_-$ の行列表現は

$$M_+ \doteq \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad M_- \doteq \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

である. これから $M_x, M_y$ を求めると

$$M_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

となる.

$$(M_x, M_y, M_z) \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\right) \tag{10}$$

2) 角運動量の合成によって得られる $j$ は $j_{max} = j_A + j_B = 1$, $j_{min} = |h_A - j_B| = 0$ であるから合成後の角運動量はこの 2 つ.

(a) $j=1$ の時とりうる $m$ は $m=1,0,-1$ のいずれか. まずは $|j_A=1/2,j_B=1/2,j=1,m=1\rangle$ について. $m=m_A+m_B$ より

$$|j_A=1/2,j_B=1/2;j=1,m=1\rangle=|j_A=1/2,m_A=1/2\rangle\otimes|j_B=1/2,m_B=1/2\rangle \tag{11}$$

である. $J^-$ をかけることで $m=0$ の場合は

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\hbar\,|j_A=1/2,j_B=1/2,j=1,m=0\rangle=&\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\hbar\,|j_A=1/2,m_B=-1/2\rangle\otimes|j_B=1/2,m_B=1/2\rangle\\&+\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\hbar\,|j_A=1/2,m_A=1/2\rangle\otimes|j_B=1/2,m=-1/2\rangle\end{aligned}$$

であるからこれを整理することで

$$|1/2,1/2;1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle+|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle) \tag{12}$$

$m=-1$ に場合も $J^-$ をかけると

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\hbar\,|1/2,1/2,1,-1\rangle=&\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\hbar\,|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle\end{aligned}$$

これを整理して

$$|1/2,1/2,1,-1\rangle=|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle \tag{13}$$

(b) $j=0$ の時とりうる $m$ は $m=0$ のみである. よって $|1/2,1/2;0,0\rangle$ は $\alpha\,|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle$ と $\beta\,|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle$ の和でかける. $j=1$ の状態と直交しなければならないから特に $|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle+|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle$ との内積を考えることで $\alpha+\beta=0$, これと正規化条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を考慮すると全体の位相を除いて $\alpha=1/\sqrt{2},\beta=-1/\sqrt{2}$ と定まる. すなわち

$$|1/2,1/2;1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle-|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle) \tag{14}$$

である.

3) $s^A\otimes I+I\otimes s^B$ は

$$s^A\otimes I+I\otimes s^B\doteq\left(\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0I_B&1I_B\\1I_B&0I_B\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0I_B&-iI_B\\iI_B&0\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1I_B&0I_B\\0I_B&-1I_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1s^B&0s^B\\0s^B&1s^B\end{pmatrix}\right)$$

これを 2 乗すると

$$(s^A\otimes I+I\otimes s^B)^2\doteq\frac{\hbar^2}{4}\left\{\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0&-i&-i&0\\i&0&0&-i\\i&0&0&-i\\0&i&i&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}^2\right\}\equiv X$$

これを計算すると

$$X=\hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \tag{15}$$

ただし基底は

$$|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle\doteq\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad|1/2,1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle\doteq\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,1/2\rangle\doteq\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad|1/2,-1/2\rangle\otimes|1/2,-1/2\rangle\doteq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

である. ここで基底の変換行列 $P$ を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

で定める. これ 2) における $j$ に対する固有ベクトルを与える基底に変換する行列である. また $P^{-1} = P$ であることは容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} PXP^{-1} &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは２）で求めた基底での行列表現であり, ２）のベクトルが固有ベクトルになっていることが分かる.

2. 1）軌道角運動量は 3 階完全反対称テンソル $\varepsilon_{ijk}$ を用いて

$$L_i = -i\hbar \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x^j \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{17}$$

でかける. $L_i, L_j$ の交換関係は

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= (L_i L_j - L_j L_i) \\ &= -\hbar^2 \sum_{klmn} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \left( x^k \frac{\partial}{\partial x^l} \left( x^m \frac{\partial}{\partial x^n} \right) - x^m \frac{\partial}{\partial x^n} \left( x^k \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right) \\ &= -\hbar^2 \sum_{klmn} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \left( x^k \delta_{ml} \frac{\partial}{\partial x^n} - x^m \delta_{kn} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= -\hbar^2 \left\{ \sum_{kln} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jln} x^k \frac{\partial}{\partial x^n} - \sum_{klm} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk} x^m \frac{\partial}{\partial x^l} \right\} \\ &= -\hbar^2 \left\{ -\sum_{kn} (\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kj}) x^k \frac{\partial}{\partial x^n} + \sum_{lm} (\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x^m \frac{\partial}{\partial x^l} \right\} \\ &= -\hbar^2 \left\{ \delta_{ij} \sum_l x^l \frac{\partial}{\partial x^l} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{ij} \sum_k x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \\ &= i\hbar \cdot \left\{ i\hbar \left( x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right\} \\ &= i\hbar \left( i\hbar \sum_{mn} (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{jn}\delta_{im}) x^m \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= i\hbar \left( i\hbar \sum_{k,m,n} \varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm} x^m \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= i\hbar \sum_k \varepsilon_{kij} L_k \end{aligned}$$

2）$v_i$, $v_j$ を $(x, y, z)$ で表示する:

$$\boldsymbol{v}^x = \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^y = \begin{pmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^z = \begin{pmatrix} n_{x3} \\ n_{y3} \\ n_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{y1}n_{z2} - n_{z1}n_{y2} \\ n_{z1}n_{x2} - n_{x1}n_{z2} \\ n_{x1}n_{y2} - n_{y1}n_{x2} \end{pmatrix}$$

である. 定義から明らかに

$$\boldsymbol{v}^i \times \boldsymbol{v}^j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{v}^k \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\left[L_i', L_j'\right] &= [n_{xi}L_x + n_{yi}L_y + n_{zi}L_z, n_{xj}L_x + n_{yj}L_y + n_{zj}L_z] \\
&= i\hbar\{(n_{xi}n_{yj} - n_{yi}n_{xj})L_z + (n_{zi}n_{xj} - n_{xi}n_{zj})L_y + (n_{yi}n_{zj} - n_{zi}n_{yj})L_x\} \\
&= i\hbar(\boldsymbol{v}^i \times \boldsymbol{v}^j) \cdot \boldsymbol{L} \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{L} \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k'
\end{aligned}
$$

3）実際に計算すると

$$
(L_x')^2 + (L_y')^2 + (L_z')^2 = (n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2)L_x^2 + (n_{y1}^2 + n_{y2}^2 + n_{y2}^2)L_y^2 + (n_{z1}^2 + n_{z2}^2 + n_{z3}^2)L_z^2
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2 &= n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + (n_{y1}n_{z2} - n_{z1}n_{y2})^2 \\
&= n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{y1}^2n_{z2}^2 + n_{z1}^2n_{y2}^2 - 2n_{y1}n_{y2}n_{z1}n_{z2}
\end{aligned}
$$

さらに $\boldsymbol{v}^x, \boldsymbol{v}^y$ の直交性から

$$
\begin{gathered}
n_{x1}n_{x2} + n_{y1}n_{y2} + n_{z1}n_{z2} = 0 \\
-2n_{y1}n_{y2}n_{z1}n_{z2} = -n_{x1}^2n_{x2}^2 + n_{y1}^2n_{y2}^2 + n_{z1}^2n_{z2}^2
\end{gathered}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2 &= n_{x1}^2 + n_{x2}^2 - n_{x1}^2n_{x2}^2 + n_{y1}^2(n_{z2}^2 + n_{y2}^2) + n_{z1}^2(n_{y2}^2 + n_{z2}^2) \\
&= n_{x1}^2 + n_{x2}^2(n_{y1}^2 + n_{z1}^2) + n_{y1}^2(1 - n_{x2}^2) + n_{z1}^2(1 - n_{x2}^2) \\
&= n_{x1}^2 + n_{y1}^1 + n_{z1}^2 = 1
\end{aligned}
$$

他の成分も同様だから

$$
(L_x')^2 + (L_y')^2 + (l_z')^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 \tag{19}
$$