

電磁気学 II

2023 年度 中辻 知教員

理学部物理学科 3 年 有志

最終更新日時：2023 年 5 月 23 日 10:27am

目次

第 0 章	はじめに	2
0.1	諸注意	2
0.2	成績評価	2
0.3	表記改訂	2
第 1 章	真空中の Maxwell 方程式	3
1.1	Maxwell 方程式	3
1.2	Maxwell 方程式の積分形	4
1.3	座標変換	4
第 2 章	保存則	9
2.1	エネルギー保存則	9
2.2	運動量	10
第 3 章	静電気学	13
3.1	真空中の静電気学	13
3.2	電荷分布 $\rho(r)$ による静電場	14
3.3	極座標表示	15
3.4	多極子展開	18
3.5	物質中の電場	20
3.6	分極した球状の誘電体	21
3.7	誘電体中のガウスの法則	21
3.8	誘電率	22
第 4 章	静磁気学	23
4.1	ベクトルポテンシャル	23
4.2	回転する一様に帯電した球	23

第 0 章

はじめに

0.1 諸注意

本稿は 2023 年 S セメスター, 月曜 2 限 理学部物理学科開講 ‘電磁気学 II’ 中辻 知教員の講義の板書を清書したものである. **無断転載・譲渡**を禁ずる. 講義中で重要なことは可能な限り footnote に掲載する. 抜け漏れの他, 気分で物理学者名を英語で書く等の理由で表記が揺れます, ご了承ください. 誤字・訂正がありましたらコメントをつけるか, 高橋 (taka-jin-2021@g.ecc.u-tokyo.ac.jp) まで.

板書を丸写しですので, 板書が間違っている場合があります.*¹

0.2 成績評価

出席 10%, レポート 45±5%, 試験 45±5% である.

0.3 表記改訂

本講義の板書と異なる表記を用いた点を挙げる

表 1 表記変更

物理量	原著	改訂後	補足
誘電率	ϵ	ε	ϵ はエネルギー密度にしたい
Poynting ベクトル	\boldsymbol{S}	\boldsymbol{s}	\boldsymbol{S} は面積分等にしたい
微小体積	dv	dV	v は速さにしたい

*¹ 可能な限り, 修正します...

第 1 章

真空中の Maxwell 方程式

—————4/10(第 1 回) 開始—————

1.1 Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

(Faraday's law) 磁束密度に時間変化があるとその変化を妨げる渦状電流が生じる.

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.1.2)$$

(Ampère-Maxwell's law) 電流が流れていたり, 電束密度に時間変化があるとその周りに磁界が生じる.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1.3)$$

(Gauss's law) 電荷が電場の源.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.4)$$

磁束は閉じている. 磁荷 (magnetic charge) は存在しない.

Maxwell eq. (1.1.2) より,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

ここで \mathbf{B} を磁束密度, \mathbf{H} を磁場の強さと呼ぶ. 一般に $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n; \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ より,

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

一方で (1.1.3) より,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1.5)$$

これは電荷保存則 (電流連続の方程式) に他ならない.

1.2 Maxwell 方程式の積分形

Faraday's law(1.1.1) より,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (1.2.1)$$

Stokes の定理 $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$; $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ より,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

これが Faraday's law の積分形.

Ampère's law(1.1.2) より,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

ただし, I は面 S を流れる電流.

Gauss's law (1.1.3) より,

$$\varepsilon_0 \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \rho dV \quad (1.2.2)$$

Gauss の定理 $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$; $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ より,

$$\int_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

これが Gauss's law の積分形.

Maxwell 方程式の第 4 式 (1.1.4) について, 同様に

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

これは Magnetic charge が存在しないことを意味する.

1.3 座標変換

1.3.1 Maxwell 方程式の共変性

直交座標系 S において $\mathbf{E}(t, x, y, z), \mathbf{B}(t, x, y, z)$ が Maxwell 方程式の解とする.

■ 並進操作 ($S \mapsto S'$)

座標系 S' を考え, S' に平行な座標軸を持ち, S に対して原点が t_0, x_0, y_0, z_0 だけ離れているとする.

$$\begin{cases} t' &= t + t_0 \\ x' &= x + x_0 \\ y' &= y + y_0 \\ z' &= z + z_0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

S' において電磁場は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(t', x', y', z') &= \mathbf{E}(t' - t_0, x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0) \\ \mathbf{B}'(t', x', y', z') &= \mathbf{B}(t' - t_0, x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0)\end{aligned}$$

となり、これらが座標変換を行なって得られる新しい Maxwell 方程式の解である。一般に、新旧座標系で自然法則がその形を変えないとき、その法則がその変換に対して共変的 (covariant)であるという。

ここで、任意の座標変換を 2 つ考え、 T と T' とする。もし、この 2 つを連続して行えば全体として 1 つの座標変換 $T'' = T' \circ T$ になる。また、変換 T に対して、逆の変換が定義できれば、それを T^{-1} とし、もとの座標系に戻すことができる。即ち、 $E = T^{-1} \circ T$ 。このような座標変換の集合を群 (group) と呼ぶ。

1.3.2 極性及び軸性

以下、Maxwell 方程式の座標変換に対する共変性をもとに、電磁場の性質を確認する。

—————4/17(第 2 回) 開始—————

■ 回転操作

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & R & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

ただし、 R は回転行列 (3×3 行列)。今、座標系の回転に際してベクトルの長さは変化しない。

$$\begin{pmatrix} & & \\ R^{-1} & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & R & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3 次元の回転の集合は回転群 \mathcal{R} を作る。^{*1}

■ 空間反転

座標軸 x, y, z の正負の方向を逆にする変換 I^S

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

$E = I^S I^S$ と I^S は空間反転の群を作っている。

^{*1} 中辻教員ここで‘群’が未履修であることを確認。

※ 1 つの集合が群であるための必要十分条件 任意の要素 A, B, C に対して

- (i) 積が AB 存在する。
- (ii) $(AB)C = A(BC)$ である。
- (iii) $EA = A$ となる E が存在する。(E : 単位要素)
- (iv) $A^{-1}A = E$ となる A^{-1} が存在する。(A^{-1} : 逆要素)

■ 時間反転

時間軸 t の政府の方向を逆にする変換 I^T

$$dt' = -dt \quad (1.3.4)$$

$E = I^T I^T$ と I^T の集合は時間反転の群 I^T を作っている.

・ 軸性ベクトル と 極性ベクトル

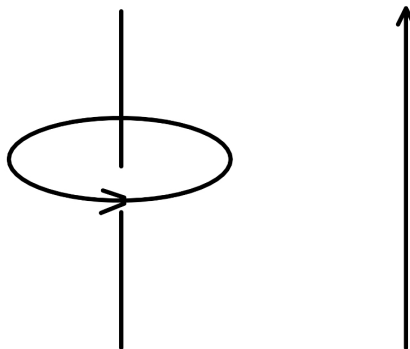


図 1.1 軸性ベクトル (左) と極性ベクトル (右)

■ 鏡映に対する変換様式

表 1.1 軸性ベクトルと極性ベクトルの鏡映変換

	軸性ベクトル	極性ベクトル
イメージ		
鏡映 M_x, M_y 各図左	符号を変える	符号を変えない
鏡映 M_z 各図右	符号を変えない	符号を変える
$I^S = M_x \cdot M_y \cdot M_z$	符号を変えない	符号を変える

これらの変換性に関して, 電磁場は

\mathbf{E} : 極性ベクトル (polar vector), \mathbf{B} : 軸性ベクトル (axial vector)

となることが要請される. 具体的に,

■ 回転操作

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ R & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ R & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

■ 空間反転

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

■ 時間反転

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

\mathbf{E} , \mathbf{B} がこれらの変換様式に従うならば, Maxwell 方程式は R, I^S, I^T およびそのすべてに対して不変.

1.3.3 ポテンシャルとゲージ変換

磁束密度 \mathbf{B} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は満たすので, ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ が存在して

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.5)$$

と書けるはずである. これを Maxwell 方程式 (Faraday's law (1.1.1)) に代入すると,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) = 0$$

この方程式はあるスカラー $\phi(\mathbf{x}, t)$ を用いて,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.6)$$

とおくと自動的に満たされる. ここで, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t)$ をベクトルポテンシャル, スカラーポテンシャルという. このような \mathbf{A}, ϕ の組み合わせは一義的には決められず,

$$\nabla \times (\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.3.7)$$

$$-\nabla (\phi'(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t)) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.3.8)$$

が満たされれば, (ϕ, \mathbf{A}) をとるか (ϕ', \mathbf{A}') をとるかは自由である. ポテンシャルの間の $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\phi', \mathbf{A}')$ の変換はゲージ変換と呼ばれ, u を任意のスカラー関数として,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla u(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.9)$$

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.10)$$

と書くことができる。このゲージ変換に対して、場の量 \mathbf{E} と \mathbf{B} は不変である。

■ Lorenz ゲージ

(1.3.9) と (1.3.10) によると

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta u(\mathbf{x}, t)$$

であるから、 $u(\mathbf{x}, t)$ を適切に選ぶことにより、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.3.11)$$

を満たす (Lorenz 条件) ようなポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) を定めることができる。この条件を満たすポテンシャルを Lorenz ゲージに従う電磁ポテンシャルという。この Lorenz ゲージの下では、Maxwell 方程式 (1.1.2) と (1.1.3) はベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

を用意して、

重要な 2 式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.12)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.13)$$

Lorenz ゲージのポテンシャル \mathbf{A}_L, ϕ_L について、

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{A}'_L(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_L(\mathbf{x}, t) + \nabla u(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.14)$$

$$\phi_L(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi'_L(\mathbf{x}, t) = \phi_L(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.15)$$

の変換を行なっても、

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.3.16)$$

が満たされていれば、Lorentz 条件は不変に成り立つ。

Maxwell 方程式を解くとは、(1.3.12), (1.3.13) の 4 つの独立な方程式を解き、(1.3.5), (1.3.6) に代入して \mathbf{E}, \mathbf{B} を求めることと等価。

第 2 章

保存則

2.1 エネルギー保存則

今, 全電荷と電流の分布が電場と磁場を創り, それが時間とともに変化しているとする. 電荷に加わる電磁場からの力がする仕事は時間 dt の間に,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.1.1)$$

微小体積 dv の中にいる電荷を q , 電流密度 \mathbf{j} 電荷密度を ρ とすると, $q = \rho dv$, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ となることから, 体積 V 中にいる全電荷が単位時間に行う仕事

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV \quad (2.1.2)$$

ところで, (1.1.2) を用いて [こちら](#) 辺まずそう

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Faraday's law(1.1.1) を用いると,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.3)$$

これを Gauss の定理を用いて,

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dv - \frac{1}{\mu_0} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1.4)$$

ただし, S は体積 v を持つ領域の表面積.

—————4/24(第 3 回) 開始—————

真空中の各点における電磁場のエネルギー密度

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (2.1.5)$$

単位時間に単位面積をとって、系の外に出ていくエネルギー（式 (2.1.4) は流入するエネルギーに相当。）

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.6)$$

を Poynting vector と呼ぶ。これらを用いると、

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1.7)$$

もし、外部からの仕事がなく $\frac{dW}{dt} = 0$ の場合、(例えば、系中に電荷が全くない場合)

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{S}$$

これを電磁場のエネルギー局所保存則とみなすことができる。

2.2 運動量

2.2.1 Newton の第 3 法則 (作用・反作用の法則)

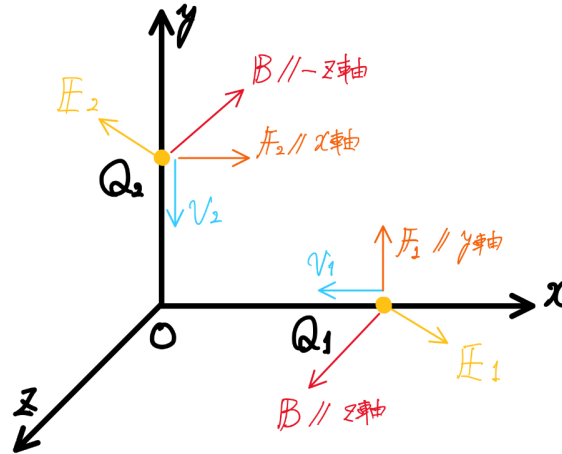


図 2.1 Newton の第三法則が破れているように見える例

図 2.1 の例のように力学的な力のみを考えると第 3 法則を満たさない。この矛盾は場そのものが持つ運動量を考えることで解決する。

2.2.2 Maxwell の Stress Tensor

体積 V の中にある電荷に加わる電磁場の力は

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho dV = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \quad (2.2.1)$$

体積あたりの力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.2.2)$$

となる。ここで ρ と \mathbf{j} を Maxwell 方程式 (1.1.3), (1.1.2) を用いて電磁場で表現すると,

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \quad (2.2.3)$$

となる。ところで

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ここで Faraday の法則 (1.1.1) を用いて

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

となることから,

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.2.4)$$

ここでベクトル解析の公式 ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ に対し, ^{*1})

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

を用いて,

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.2.5)$$

となる。ここで以下に定義される Maxwell の Stress Tensor を用いると,

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (2.2.6)$$

例えば

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) \\ T_{xy} &= \varepsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y \end{aligned}$$

となる。

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_j = \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \quad (2.2.7)$$

となり単位体積あたりの力は,

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (2.2.8)$$

と表される。ただし \mathbf{S} は (2.1.6) で定義される Poynting vector である。以上より、体積 V にかかる力は

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{T} d\mathbf{S} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \quad (2.2.9)$$

\mathbf{T} は単位面積あたりにかかる力, すなわち応力。対角成分は圧力, 非対角成分は剪断 (せん断) 応力に対応する。

^{*1} ここだけ \mathbf{B} は単なるベクトルであり, 磁束密度ではない

2.2.3 運動量保存則

Newton の第 3 法則より運動量を \mathbf{P} とすると, (2.2.9) は

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV + \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2.10)$$

$\mathbf{P} = \varepsilon_0\mu_0 \int_V \mathbf{S} dV$: 電磁場に蓄えられた運動量. これから単位体積あたりの運動量

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0\mu_0 \mathbf{S} = \varepsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.2.11)$$

また, 電磁場によって単位時間に表面積 S を通過して内部に運ばれる運動量は \mathbf{T} 式 (2.2.10) は運動量の保存則を意味している.

もし, V 中において, 全運動量が保存している場合,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \iff \int \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dV = \int \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (2.2.12)$$

これから局所運動量保存則として,

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.2.13)$$

が得られる. ($-\mathbf{T}$ が外部に流れ出る運動量の流れ)

“通常は電磁場のみならず電荷も存在するので, これら 2 つの持つ運動量を同時に考え, その総和即ち力学的運動量と場の運動量の和が保存する.”

Poynting Vector

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{S} & : \text{電磁場により運ばれる単位時間, 単位面積あたりのエネルギー} \\ \varepsilon_0\mu_0 \mathbf{S} & : \text{単位体積あたりの電磁場の運動量} \end{array} \right.$$

Maxwell stress Tensor

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{T} & : \text{表面にかかる電磁場の応力} \\ -\mathbf{T} & : \text{電磁場による運動量の流れ} \end{array} \right.$$

第 3 章

静電気学

—————5/1(第 4 回) 開始—————

式 (1.3.12)(1.3.13)(1.3.5)(1.3.6) を用いて議論を進める.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.12)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.6)$$

3.1 真空中の静電気学

静電気学の目的: ある電荷分布が与えられた際に, それが対応する電場を求めたい. Coulomb の法則によると,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}}{r^2} \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (3.1.1)$$

となるが, この積分は最も電荷分布が単純な場合にのみ可能. むしろ, 静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を求めるために (1.3.13) より

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (3.1.2)$$

の Poisson 方程式を用いると方法が現実的. 特に, $\rho(\mathbf{r}) = 0$ の場合の式は

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1.3)$$

の Laplace 方程式となる. 直交座標系では

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

となる. 重力, 磁性, 熱 その他の分野でも用いられる一般的な式である. 以下では, Poisson 方程式及び Laplace 方程式から静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を決定し, (1.3.6) の静的な場合の式

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (3.1.4)$$

から静電場を求める.

3.2 電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ による静電場

今, 真空中に電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられたとする. Poisson 方程式 $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ の特殊解を求める.

$$\rho(x) = \varepsilon_0\delta(x)\delta(y)\delta(z) \equiv \varepsilon_0\delta^3(\mathbf{r}) \quad (3.2.1)$$

これに対する特殊解 $G(\mathbf{r})$ を求める. (Green 関数の 1 つ) まず, $G(\mathbf{r}), \delta^3(\mathbf{r})$ をそれぞれ Fourier 積分で書くと

$$G(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (3.2.2)$$

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (3.2.3)$$

これらを (3.2.1) の条件下の Poisson 方程式

$$\Delta G(\mathbf{r}) = -\delta^3(\mathbf{r})$$

に代入すると,

$$(i\mathbf{k})^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}$$

が得られる. (3.2.2) に代入して

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|^2} d^3k \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

ここで, 極座標を用いると, $d^3k = k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi$ より (補足: $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ から極座標へ)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2} k^2 \sin\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} \quad (\because x = kr) \end{aligned}$$

公式 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$ を用いて

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (3.2.5)$$

と求まる. 一方で Poisson 方程式の特殊解は $G(x)$ を用いて,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.2.6)$$

と書ける.

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})\end{aligned}$$

以上より, Poisson 方程式の特殊解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (3.2.7)$$

で与えられる. ところで,

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

から (1.3.6) を用いて,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (3.2.8)$$

これは Coulomb の法則に他ならない.

3.3 極座標表示

電荷分布 ρ が原点のまわりに球対称であれば, 前節の積分は実行できるが, 球対称でなければ一般に難しい. 一方で球対称でない電荷分布も十分遠方では, 点電荷と同じ結果を与えるが近づくとそれからのずれが明確になる. このような近似を多極子展開と呼ぶ. その準備として Laplace 方程式を極座標で表すと

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ のポテンシャルを表すことにし, (角度 ϕ, φ と被るため)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.3.1)$$

φ に依存しない, すなわち軸対称の場合,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.3.2)$$

今, ポテンシャル Φ の解として

$$\Phi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (3.3.3)$$

とすると, Laplace 方程式は Φ で割ることで,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (3.3.4)$$

第一項は r のみに、第二項は θ のみによるので、各項は定数となりそれを $l(l+1)$ と書くことにすると

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \\ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

となる。動径方向の方程式は、全微分方程式

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)r \quad (3.3.6)$$

となり、以下の一般解を持つ。

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (3.3.7)$$

ただし、 A, B は任意の定数。角度方向の方程式、

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \quad (3.3.8)$$

の解は $\cos \theta$ を変数に持つ Legendre 多項式

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta), \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (3.3.9)$$

$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = (3x^2 - 1)/2, P_3 = (5x^3 - 3x)/2, P_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, P_5 = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 \cdots$ と続く。

軸対称性がある際の Laplace 方程式の基本解は

$$\Phi_l(r, \theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.3.10)$$

一般解は任意の正整数 l に対する解の重ね合わせとして与えられ、

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.3.11)$$

と書ける。(補足: (3.3.10) の定数 A, B は l によるため。(3.3.11) に添字を付した.)

例 1. 球内部のポテンシャル

中空の球を考える。半径 R の球面上で $\Phi_0(\theta)$ のとき、球内部のポテンシャルを求めよ。

$r \rightarrow 0$ では $\Phi(r) \rightarrow \infty$ より、 $B_l = 0$ 。Legendre 多項式は完全直交系であり、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & l = l' \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

—————5/8 休講 レポート締め切り—————

—————5/15(第 5 回) 開始 (前回の例 1 の続きから.)—————

これを用いると, 前式に $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned} A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} &= \int_0^\pi \Phi_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ A_{l'} &= \frac{2l' + 1}{2R^{l'}} \int_0^\pi \Phi_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

この積分を実際に行うのは難しい. ただし, $\Phi_0(\theta)$ が $\cos \theta$ の多項式で与えられる場合, 解くことができる. 例えば, $\Phi_0(\theta) = k \sin^2 \frac{\theta}{2}$ と与えられる場合,

$$\Phi_0(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{2}[P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)]$$

ところで

$$\Phi_0(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) \quad (\because 3.3.12)$$

であるから, 両辺を比較すると,

$$A_0 = \frac{k}{2}, A_1 = -\frac{k}{2R}, A_l = 0 \quad (l > 1) \quad (3.3.14)$$

となり,

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{k}{2} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) \right] \\ &= \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

例 2. 一様な電場中の球形の導体

z 方向の一様な電場中の球体導体を考える. 球の表面上では等電位であり, これを 0 ととる. $z = +\infty, -\infty$ では, $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{z}$ であるから, $\Phi = -E_0 z + C$ 球の赤道上である $z = 0$ 面では, $\Phi = 0 \Rightarrow C = 0$ これから境界条件は

$$\begin{cases} r = R \text{ では} & \Phi = 0 \\ r \gg R \text{ では} & \Phi = -E_0 r \cos \theta \end{cases} \quad (3.3.16)$$

一方で, (3.3.11) より,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) = 0$$

これが全ての θ について成立するので,

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \text{即ち} \quad B_l = -A_l R^{2l+1} \quad (3.3.17)$$

この表式を用いると, (3.3.11) は

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(r^n - \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (3.3.18)$$

一方で, $r \gg R$ においては

$$\Phi(r, \theta) \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

これは $P_l(\cos \theta)$ は $l = 1$ のみの term からなることを意味する. 即ち, $A_1 = -E_0$ かつその他全ての l に関して $A_l = 0$. よって,

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \\ &= - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 r \cos \theta \end{aligned}$$

第一項は外部電場の寄与 $-E_0 r \cos \theta$, 第二項は誘起された電荷の寄与 $E_0 \frac{R^3}{r^3} \cos \theta$ 表面電荷密度を求めると

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= \varepsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=R} \\ &= 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \end{aligned}$$

これから北半球では正, 南半球では負に帯電していることが確認できる.

3.4 多極子展開

まず 多極子の具体例をいくつか考える.

表 3.1 多極子の具体例

	配置図	ポテンシャルの R 依存性
単極子	monopole	$1/R$
双極子	dipole	$1/R^2$
四極子	quadrupole	$1/R^3$
八極子	octupole	$1/R^4$

次に双極子 dipole のつくる電場を考える. 電荷 $\pm q$ が直交座標系で $(0, 0, d/2)$ に存在しており, z 軸からの角度 θ , 原点からの距離 R の点 P における電位 Φ が

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{+q}{R_+} - \frac{q}{R_-} \right)$$

今, $d \ll R$ とすると,

$$R_{\pm}^2 = R^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \mp dR \cos \theta \simeq R^2 \left(1 \mp \frac{d}{R} \cos \theta \right)$$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}^{-1} &\simeq R^{-1} \left(1 \mp \frac{d}{R} \cos \theta \right)^{-1/2} \simeq R^{-1} \left(1 \pm \frac{d}{2R} \cos \theta \right) \\
\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} &\simeq \frac{d}{R^2} \cos \theta \\
\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{R^2} \sim \frac{1}{R^2}
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

次に、一般化した状況を考える．極在した電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ の場合、

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha = R^2 \left[1 + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{R'}{R} \right) \cos \alpha \right] \\
\therefore r &= R(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \quad \epsilon = \frac{R'}{R} \left(\frac{R'}{R} - 2 \cos \alpha \right)
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

仮に、 $R' \ll R$ とすると、 $\epsilon \ll 1$ より、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right) \tag{3.4.4}$$

ここに (3.4.3) を用いて整理すると

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 + \left(\frac{R'}{R} \right) \cos \alpha + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) + \left(\frac{R'}{R} \right)^3 \left(\frac{5 \cos^3 \alpha - \cos \alpha}{2} \right) + \dots \right]$$

これは Legendre 多項式を用いると、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R'}{R} \right)^l P_l(\cos \alpha) \tag{3.4.5}$$

と整理される．

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \int R'^l P_l(\cos \alpha) \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \int \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \right. \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \int R' \cos \alpha \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \\
&\quad \left. + \frac{1}{R^3} \int R'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{R}') d^3 \mathbf{R}' \right]
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

第一項、第二項 \dots と monopole, dipole \dots と展開される．上記が多極子展開の計算結果である．通常は monopole の項が支配的であるが、全電荷の総和がゼロの場合は次は dipole の項が重要となる．

上式より dipole の寄与は,

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int R' \cos \alpha \rho(\mathbf{R}') d^3 R' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{R}} \cdot \int \mathbf{R}' \rho(\mathbf{R}') d^3 R'\end{aligned}\quad (3.4.7)$$

ただし, $R' \cos \alpha = \hat{\mathbf{R}}' \cdot \mathbf{R}'$ と表示した. Dipole moment として, $\mathbf{P} = \int \mathbf{R}' \rho(\mathbf{R}') d^3 R'$ とおくと,

$$\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (3.4.8)$$

と書ける. Dipole moment が点電荷で構成される場合は, $\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{R}'_i$ 最も単純な場合, $\mathbf{P} = q\mathbf{r}'_+ - q\mathbf{r}'_- = q\mathbf{d}$

—————5/22(第6回) 開始—————

3.5 物質中の電場

^{*1}誘電体中の電場を考える. 誘電体; 微小な双極子 \mathbf{p} の集合の作るポテンシャルを考える. 位置 \mathbf{R}' に $\mathbf{p} = \mathbf{P} d^3 R'$ (\mathbf{P} は単位体積当たりの双極子モーメント) が存在したとき, 位置 \mathbf{R}' からみた位置 $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}}$ でのポテンシャルは, 1 つの dipole moment \mathbf{p} が作るポテンシャルは, 前節の結果より, ^{*2}

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (3.5.1)$$

誘電体全体では,

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{R}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} d^3 R' \quad (3.5.2)$$

となる. ここで, $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$ を用いると, ^{*3}

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d^3 R'$$

と書ける. 次に部分積分を用いることで,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) d^3 R' - \int \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3 R' \right] \quad (3.5.3)$$

Gauss の法則を用いる.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{R} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}' - \int_V \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3 R' \quad (3.5.4)$$

^{*1} 初手雑談. 超低温下の氷の中の H^+ って面白い振る舞いしそうだ... って話.

^{*2} 前節と位置の指定が違うのですが... (怒)

^{*3} 5/22 打ちながらの追記, [こちら辺のミスやばそう](#). 前節との整合性無いかも

ここで, $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = dS$ となる法線方向のベクトル \mathbf{n} を用いて

$$\text{表面電荷} : \sigma_d = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (3.5.5)$$

$$\text{体積電荷} : \rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.5.6)$$

とおくと,

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_d}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_d}{R} d^3R' \quad (3.5.7)$$

と整理される. これは誘電体の作るポテンシャルは表面の電荷密度 $\sigma_d = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ の第一項とバルク (bulk) の体積電荷密度 $\rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ の第二項の和となる. (3.5.2) より大きく単純化されている.

3.6 分極した球状の誘電体

分極は球の内部で一様で z 軸正の向きとする. バルクの体積電荷密度

$$\rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (3.6.1)$$

次に表面の電荷密度は

$$\sigma_d = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta \quad (3.6.2)$$

次に σ_d 電荷密度 σ_d が作るポテンシャルは 3.3 節での解法に従い,

$$V(R, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} R \cos \theta & R < R_0 \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R_0^3}{R^2} \cos \theta & R \geq R_0 \end{cases} \quad (3.6.3)$$

$z = R \cos \theta$ であり, 電場は球内で一定で,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \mathbf{z} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}; R < R_0$$

球外のポテンシャルは球内の全ての dipole moment の和 $\mathbf{P}_{\text{total}} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \mathbf{P}$ を用いると,

$$V(R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}_{\text{total}} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2}; R \geq R_0$$

と書ける. すなわち, 全 dipole moment が原点にいる場合のポテンシャルに等しい.

3.7 誘電体中のガウスの法則

今, 分極 \mathbf{P} による体積電荷密度 ρ_d に加えて他の電荷の密度の寄与を ρ_e とすると, 全体積電荷密度 ρ は

$$\rho = \rho_d + \rho_e \quad (3.7.1)$$

となり, ガウスの法則は

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_d + \rho_e = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_e \quad (3.7.2)$$

となる。ここで、 \mathbf{E} は ρ_d, ρ_e からなる全電場である。ここで、 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ を電束密度として、定義するとガウスの法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (3.7.3)$$

と書ける。

3.8 誘電率

一般に分極は多くの物質において電場に比例する。すなわち

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (3.8.1)$$

ここで、 χ_e は誘電率と呼び、このような性質を持つものを常誘電体^{*4}と呼ぶ。この際、電束密度 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \quad (3.8.2)$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ とすることで、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.8.3)$$

と書ける。

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e : \text{dielectric constant, 比誘電率}$$

と呼ぶ。^{*5}

^{*4} 講義中の余談; 強誘電体 BaTiO₃ のようなものがあり、特定の狭い領域に電荷をとどめておくことができる。コンデンサーとして働き、小さな領域で大きな電圧を得られるため pc, スマホに組み込まれているらしい。

^{*5} ε_r の値の例, 真空 1, 空気 1.000536, 水 80, こおり 104

第 4 章

静磁気学

4.1 ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いると

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ampère's law によると

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

ここで, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\varphi$ という自由度があるが, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ となる Lorenz ゲージを選ぶことで,

$$\text{Ampère の法則 } \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.1.1)$$

と書ける. 静電場に対するポアソン方程式の解法にならい,

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} d^3 R' \quad (4.1.2)$$

と書ける.

4.2 回転する一様に帯電した球

半径 R_0 の球の表面に一様な表面電荷 (密度 σ) を考える. この球が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する際に, 中心から \mathbf{R} の点に作るベクトルポテンシャルを考える. ここで, 表面電流密度を \mathbf{J} とおくと

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{v} \quad (4.2.1)$$

$$r = (R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \theta) \quad (4.2.2)$$

ここで, \mathbf{R}' における回転速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}' &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R_0 \sin \theta' \cos \phi' & R_0 \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix} \\ &= R_0 \omega [-(\cos \psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{x} \\ &\quad + (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \hat{y} \\ &\quad + (\sin \psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{z}] \end{aligned}$$

ここで面積分を考える．面要素 $ds' = R_0^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \quad (4.2.3)$$

を考慮すると,(これ以降, 中辻が時間足りないと申して信用がない.)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} \\ &= -\frac{\mu_0 R_0^3 \sigma \omega \sin \psi}{2} \times \left(\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R \cos \theta}} d\theta \right) \hat{y} \\ A(\mathbf{R}) &= \begin{cases} \frac{\mu_0 R_0 \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) & ; R < R_0 \\ \frac{\mu_0 R_0^4 \sigma}{3R^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) & ; R \geq R_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

*1

*1 前回のレポートは1番目はみなさんよくできていました。2番目は皆さんの解釈を試したようで…解けるように解釈した方とこれでも解けるはずだと難しく考えていて後者の第二問は自由度があったので1問目で採点して2問目を加点する。全部足すと100点を超える意味での加点を行った。つまり、2問目を解いた時点で難しく解いた方も加点をした。模範解答を itclms に置く。