UDESC

Complexidade de Algoritmos

Prof. Rafael Alceste Berri

rafaelberri@gmail.com

Prof. Diego Buchinger

diego.buchinger@outlook.com

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos

cristiano.vasconcellos@udesc.br

Algoritmos Eficientes de Ordenação: Merge Sort, Quick Sort e Heap Sort

Dividir e Conquistar

Desmembrar o problema original em vários subproblemas semelhantes, resolver os subproblemas (executando o mesmo processo recursivamente) e combinar as soluções.

- Divide o problema em subproblema mais simples que o inicial.
- “Conquistar” os subproblemas usando solução recursiva. Sendo pequenos o suficiente para obter uma solução direta resolve-se.
- Combina as soluções de subproblemas em solução para o problema original.

Merge Sort

A principal ideia do Merge Sort é ordenar partições do vetor e então reordenar o conjunto através da operação **merge**, uma mesclagem ordenada de dois vetores [$O(n)$].

O algoritmo de Merge Sort necessita de um espaço adicional de memória para trabalhar [$O(n)$].

2	3	7	9	10
1	4	5	6	8

Merge Sort – Divisão e conquista

- Divide: o vetor inicial em duas partes pela escolha da posição q. Normalmente q é o elemento central do array.
- Conquistar: por recursividade cria-se subproblemas (subarrays) até que o tamanho do array seja mínimo (por exemplo, 1). A solução dos subproblemas são arrays ordenados.
- Combina duas solução de subproblemas (arrays ordenados) em um array ordenado.

Merge Sort

Algoritmo:

```
mergeSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = (ini + fim) / 2;
    mergeSort( vet, ini, meio );
    mergeSort( vet, meio+1, fim);
    merge( vet, ini, meio, fim);
}
```

Aplicar Merge Sort sobre o vetor:

[6 – 5 – 3 – 1 – 8 – 7 – 2 – 4]

Merge Sort

Qual a complexidade de tempo do Merge Sort?

Existe um pior caso? Qual seria?

Qual a complexidade de espaço do Merge Sort?

```
mergeSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = (ini + fim) / 2;
    mergeSort( vet, ini, meio );
    mergeSort( vet, meio+1, fim);
    merge( vet, ini, meio, fim);
}
```

Merge Sort

Qual a complexidade de tempo do Merge Sort?

Θ(n log n)

Existe um pior caso? Qual seria?

Não existe diferenças entre pior, melhor ou médio.

Qual a complexidade de espaço do Merge Sort ?

Merge: Por referência vetor de entrada: Θ(n)

Por valor, vetor de entrada: Θ(n^2)

Usando Listas, Merge Θ(1) -> recursão Θ(logn) / Θ(nlogn)

Quick Sort

A principal ideia do Quick Sort é a ordenação com base em um elemento denominado **pivô**.

Deve-se ordenar o vetor mantendo todos os elementos menores do que o pivô a sua esquerda e todos os elementos maiores do que o pivô a sua direita (**pivoteamento**)

Após este processo realiza-se o mesmo procedimento para o grupo a esquerda do pivô e depois para o grupo a direita do pivô – enquanto o número de elementos for maior do que um.

Quick Sort

Algoritmo:

```
quickSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = pivoteamento( vet, ini, fim );
    quickSort( vet, ini, meio );
    quickSort( vet, meio+1, fim );
}
```

Aplicar Quick Sort sobre o vetor:

[6 – 5 – 3 – 1 – 8 – 7 – 2 – 4]

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento (lomuto):

```
lomuto( vet, ini, fim ){
   pivo = ini;
   para( j=ini+1; j<=fim; j++ ){
      se( vet[j] < vet[ini] ){
         pivo++;
         troca( vet[pivo], vet[j] );
      }
   }
   troca( vet[ini], vet[pivo] );
   retorne pivo;
}
```

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento (lomuto):

```
lomuto( vet, ini, fim ){ // O(n)
   pivo = ini;
   para( j=ini+1; j<=fim; j++ ){
      se( vet[j] < vet[ini] ){
         pivo++;
         troca( vet[pivo], vet[j] );
      }
   }
   troca( vet[ini], vet[pivo] );
   retorne pivo;
}
```

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento:

```
hoare( vet, ini, fim ){
    pivo = vet[ini];
    i = ini;
    j = fim;
    repita{
        enquanto( vet[i] < pivo ) faça i = i+1;
        enquanto( vet[j] > pivo ) faça j = j-1;
        se( i < j )  troca( vet[i] , vet[j] );
        senão retorne j;
    }
}
```

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento:

```
\\O(n)
hoare( vet, ini, fim ){
    pivo = vet[ini];
    i = ini;
    j = fim;
    repita{
        enquanto( vet[i] < pivo ) faça i = i+1;
        enquanto( vet[j] > pivo ) faça j = j-1;
        se( i < j )  troca( vet[i] , vet[j] );
        senão retorne j;
    }
}
```

Quick Sort

Perguntas:

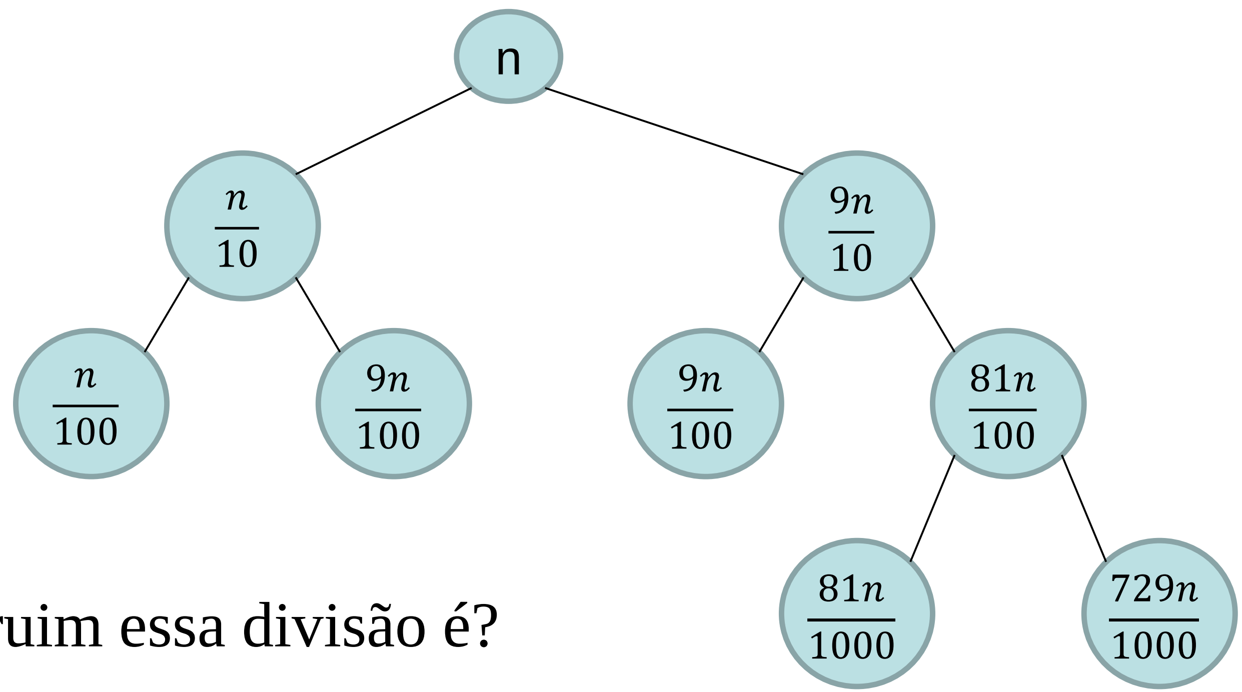
- Qualquer pivô serve?
- Existe um pivô ruim ou bom?

- Como escolher um pivô adequado?

- Qual o melhor caso para o Quick Sort? (complexidade)
- Qual o pior caso para o Quick Sort? (complexidade)
- Qual a complexidade de espaço do Quick Sort?

Quick Sort

Considere o seguinte cenário onde ocorre uma divisão desbalanceada de proporção constante 1:9



Quão ruim essa divisão é?

Quick Sort

Quão ruim essa divisão é?

$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + n$$

$$T(1) = 1$$

(resolva a recursão com alguns valores arbitrários
para **n** e compare o crescimento com as funções n^2 e $n \log n$)

Quick Sort

```
quickSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = pivoteamento( vet, ini, fim );
    quickSort( vet, ini, meio );
    quickSort( vet, meio+1, fim );
}
```

Perguntas:

- Qualquer pivô serve?

Qualquer um pode ser o pivot

- Existe um pivô ruim ou bom?

Existem.

- Como escolher um pivô adequado?

Quanto mais central no vetor melhor (subproblema equilibrados).

Quick Sort

```
quickSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = pivoteamento( vet, ini, fim );
    quickSort( vet, ini, meio );
    quickSort( vet, meio+1, fim );
}
```

Perguntas:

- Qual o melhor caso para o Quick Sort? (complexidade)

T(n) = 2 T(n/2) + O(n) -> O(n log n)

- Qual o pior caso para o Quick Sort? (complexidade)

T(n) = T(1) + T(n-1) + O(n) -> O(n^2)

- Qual a complexidade de espaço do Quick Sort?

Médio O(log n) ou O(n log n) → com vetor de entrada

Pior O(n) ou O(n^2) → com vetor de entrada

Heap Sort

É um arranjo, onde os dados estão organizados de forma que podem ser acessados como se estivessem armazenados em uma árvore binária.

No caso de um ***heap máximo***, os elementos armazenado em uma sub-árvore serão sempre menores que o elemento armazenado na raiz. Essa árvore é completa todos seus níveis, com a possível exceção do nível mais baixo.

Heap Sort – funcionamento (max)

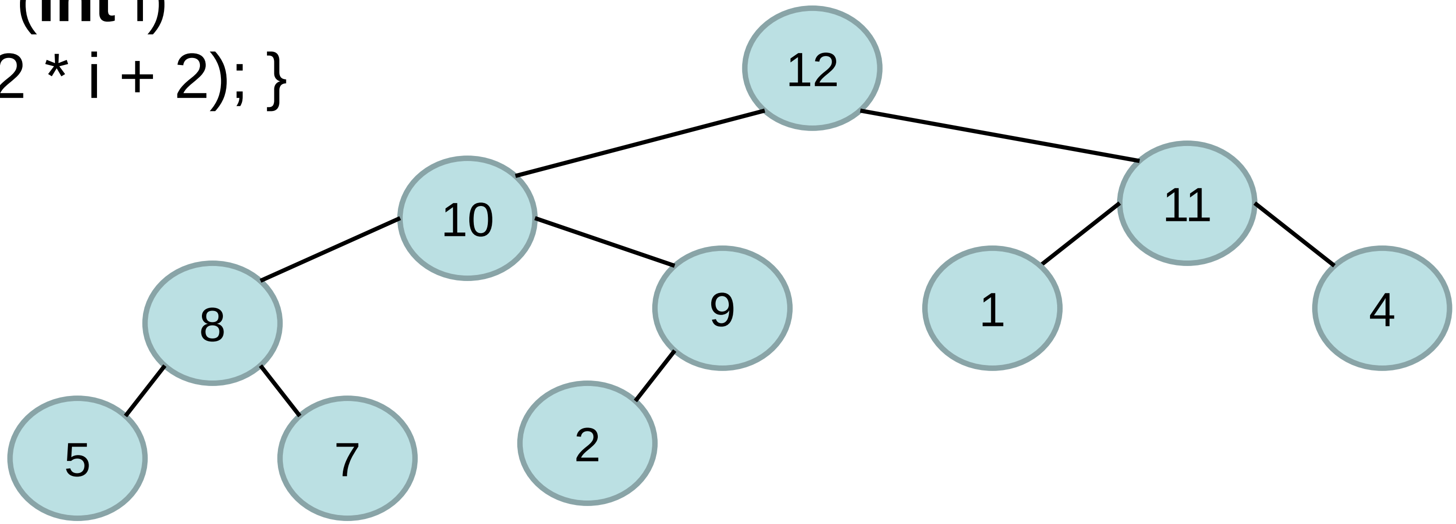
6 5 3 1 8 7 2 4

Heap Sort

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	10	11	8	9	1	4	5	7	2

int esquerda (**int** i)
{ **return** (2 * i + 1); }

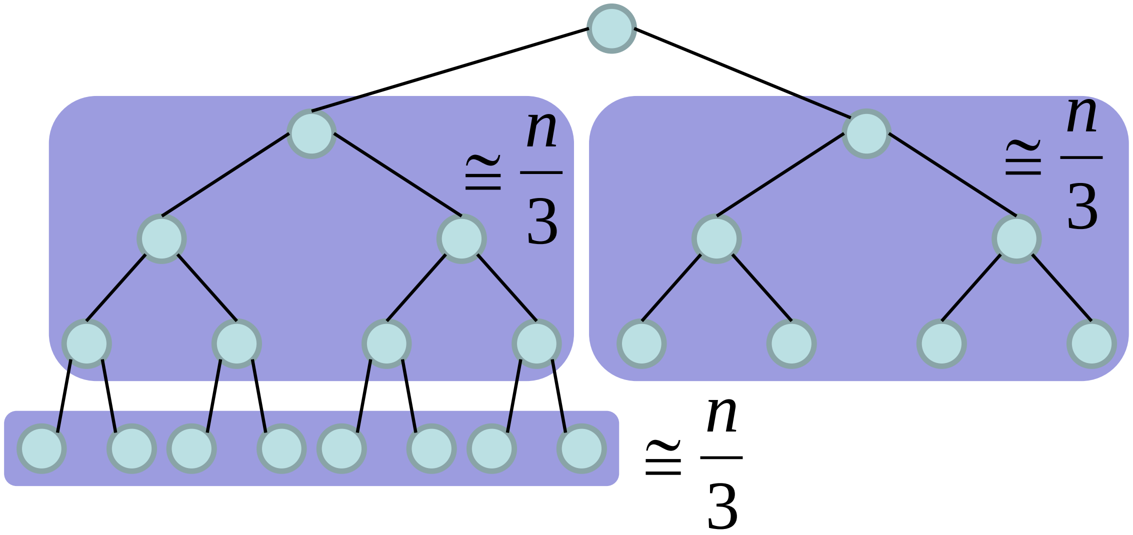
int direita (**int** i)
{ **return** (2 * i + 2); }



Heap Sort

```
// n = tamanho // i = índice
void heapify (int *a, int n, int i) {
        e = esquerda( i );
        d = direita( i );
        maior = i;
        if (e < n  &&  a[e] > a[maior])
                maior = e;
        if (d < n  &&  a[d] > a[maior])
                maior = d;
        if ( maior != i ) {
                swap (&a[i], &a[maior]);
                heapify(a, n, maior);
        }
}
```

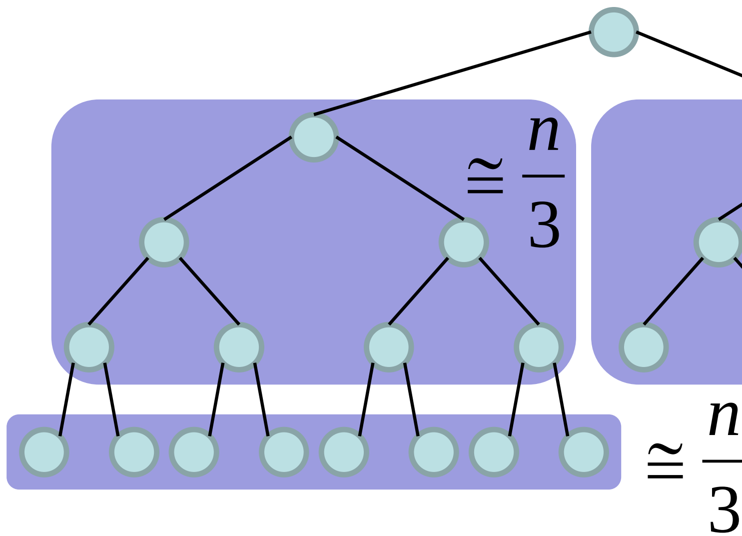
Heap Sort – Pior caso ordenação da heap



$$T(n) = T(2n/3) + O(1)$$

$$T(1) = O(1)$$

Heap Sort



Note ainda que existem no máximo: $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ nós de altura h

n=23 => h=0 : 12 (folha)

h=1 : 6

h=2 : 3

h=3 : 2

(Obs: altura de baixo p/ cima)

UDESC

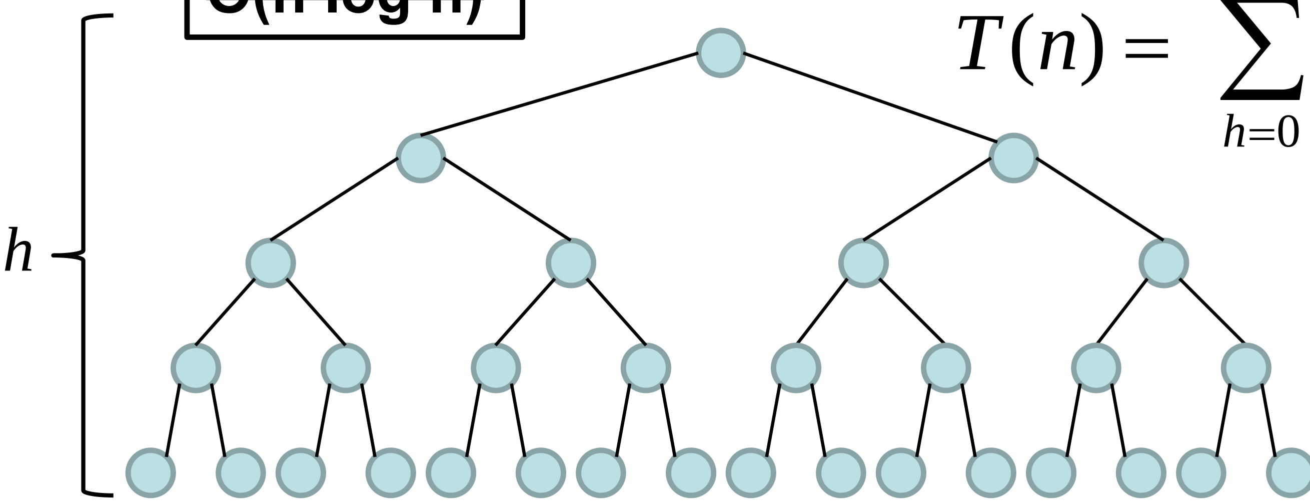
Heap Sort

```c
void  buildHeap ( int *a, int n ) {
    int i;
    for (i = n/2; i >= 0; i--)      //O(n)
        heapify(a, n, i);           //O(log n)
}
```

O(n log n)
~~**Θ(n log n)**~~

heapify varia com a altura do nó!

$$T(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} [(n/2^{h+1})O(h)]$$



Heap Sort

```
void  buildHeap ( int *a, int n ) {
    int i;
    for (i = n/2; i >= 0; i--)      //O(n)
        heapify(a, n, i);           //O(log n)
}
```

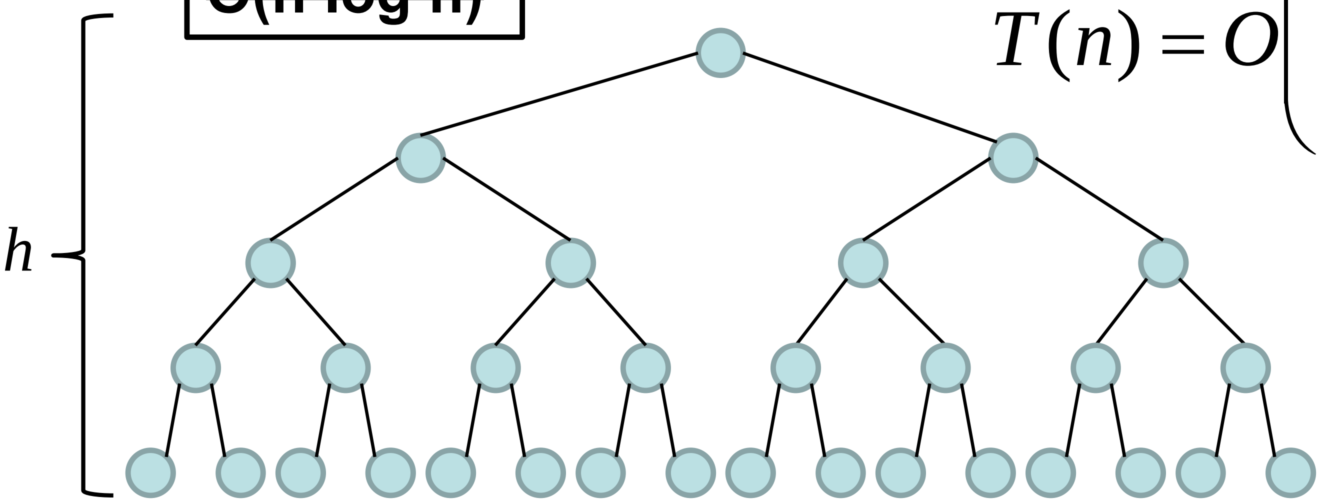
O(n log n)

~~**Θ(n log n)**~~

heapify varia com a altura do nó!

$$T(n) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (h/2^h) \right)$$

Θ(n)



Heap Sort

```
void heapSort( int *a, int n) {
    buildHeap( a , n );                 // Θ(n)
    for (i=n-1; i>0; i--) {             // Θ(n)
        swap(&a[0], &a[i]);             // Θ(1)
        heapify(a, i, 0);               // Θ(log n)
    }
}
```

$\Theta(n \log n)$

Espaço

Recursivo

```
// Heapsort O(logn) ou O(nlogn) com vetor
void heapify (int *a, int n, int i) {
        e = esquerda( i );
        d = direita( i );
        maior = i;
        if (e < n  &&  a[e] > a[maior])
                maior = e;
      if (d < n  &&  a[d] > a[maior])
                maior = d;
        if ( maior != i ) {
                swap (&a[i], &a[maior]);
                heapify(a, n, maior);
        }
}
```

Não recursivo

```
// Heapsort O(1) ou O(n) com vetor
void heapify (int *a, int n, int i) {
while ( i < n) {
 e = esquerda( i );
 d = direita( i );
 maior = i;
 if (e < n) && (a[e] > a[maior])
   maior = e;
 if (d < n  &&  a[d] > a[maior])
   maior = d;
 if (maior != i) {
    swap (&a[i], &a[maior]);
    i <- maior
 }
 else
    break;
}
```

Ordenação em tempo Linear
Counting Sort + Bucket Sort

Ordenações Lineares

Métodos de ordenação por comparação:

$$\Omega(n \log n)$$

Ordenações lineares [$\Omega(n)$] só são possíveis em **determinadas** condições.

Counting Sort

Pressupõe valores inteiros no intervalo 1 a k.

Algoritmo:

- contar o nº de elementos menores que ‘x’;
- usar esta informação para alocar o elemento na sua posição correta no vetor final;

Exemplos:

Caso bom	2	5	3	0	2	3	0	5	3	0

Caso ruim	2	25	13	100	250	300.000	1	5	3	0

Bucket Sort

Pressupõe que a entrada consiste de elementos com distribuição de valores uniforme.

Algoritmo:

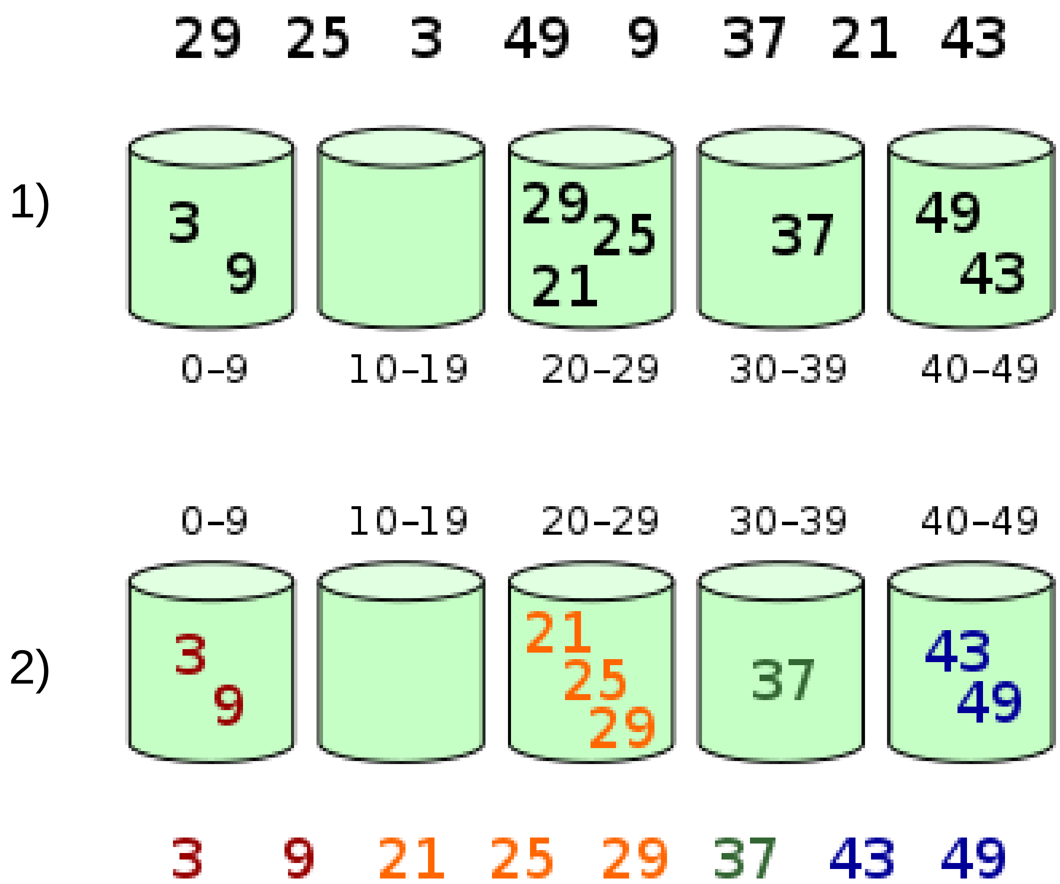
- separar os elementos em grupos / baldes;
- ordenar os elementos nos seus baldes;

Exemplos:

Caso bom	20	16	43	0	22	13	33	40	31	7
Caso ruim	2	43	3	5	0	7	8	1	6	4

Bucket Sort

- Exemplo de funcionamento:



UDESC

Atividade 6

Implemente o Count Sort ou Bucket Sort e escolha um vetor de teste. Usando o seu exemplo foi possível executar a ordenação em $\Omega(n)$?

Envie para rafaelberri@gmail.com Assunto: "TC-CAL06"
Anexar: resultados/respostas + códigos fontes