

Теория графов и её применение в системном анализе

§1. Виды графов

Граф — объект, состоящий из двух множеств (множество вершин и множество ребер).

Конечный граф — такой граф, в которой количество его вершин конечно.

Нуль-граф — состоит только из изолированных вершин (нет ребер).

Пустой граф — не содержит ни вершин, ни ребер.

В зависимости от того, учитывается ли порядок вершин при описании графов, графы разделяются на:

- Не ориентированные
- Ориентированные (ребро — дуга, петля — такое ребро, у которого оба конца сходятся в одной вершине)
- Смешанные

Мультиграф — граф, в котором может присутствовать пара вершин, соединенных более чем одним ребром, либо более чем двумя дугами, противоположных направлений.

Соответствующие ребра называются кратными. Наибольшее число кратных ребер при какой-либо паре вершин называется мультичислом.

Скелет мультиграфа: выкинули все кратные ребра, кроме одного и выкинули все петли.

Псевдограф: есть кратные ребра и петли.

Мультиграф: есть кратные ребра, но нет петель.

Гиперграф — обобщение графа, в котором каждым ребром могут соединяться не только две вершины, но и любые подмножества вершин.

Полный граф — граф, у которого любые две вершины соединены ребром.

Плотный граф — полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля.

Изоморфизм: два графа изоморфны, если существует перестановка вершин, при которой они совпадают.

Плоский граф — граф, у которого ребра расположены на плоскости таким образом, что пересекаются только в вершинах.

Планарный граф — изоморфен плоскому.

Степень вершины — кол-во ребер инцидентных данной вершине.

§2. Элементы графов

Подграф исходного графа — граф, содержащий некое подмножество вершин данного графа и некоторое подмножество инцидентных им ребер.

Частичный граф исходного графа: остаются все вершины и некоторые ребра.

Гамак — подграф графа, для которого существуют две принадлежащие ему вершины (вход и выход), такие что:

- Все дуги из входа ведут в гамак
- Любой путь, ведущий в гамак извне проходит через вход.
- Все дуги из выхода идут из гамака.
- Любой путь, идущий из гамака извне проходит через выход.

Гамак интересен тем, что его можно стянуть в одну вершину, не нарушая отношений связности между остальными вершинами графа. По этому применению факторизация сложного графа (например, потокового графа программы) для выделения отдельных функций.

Дерево (см. самостоятельно — **ОК**) — это связный ациклический граф. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ациклическость — отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется только по одному пути.

§3. Связность графов

Маршрут — любая последовательность смежных ребер.

Цепь — маршрут, все ребра которого различны (в ориентированном графе цепь называется путем).

Замкнутая цепь — цикл (в ориентированном графе цикл называется контуром).

Связный граф — граф, в котором любые две его вершины связаны маршрутом.

Компонента связности графа — подграф графа, образованный на подмножестве его вершин, которые можно соединить произвольным маршрутом.

Эйлеров цикл — цикл, в котором содержатся все ребра графа.

Задача простая, имеет однозначное решение: граф содержит Эйлеров цикл, если он связен и все локальные степени его вершин являются четными.

Гамильтонов цикл — цикл проходящий через каждую вершину графа по одному разу.

К Гамильтонову циклу сводится задача «о коммивояжере». Существует много эвристик для решения подобных задач.

§4. Бикомпоненты

Связный неориентированный граф для любых двух вершин существует соединяющий их маршрут.

Связный орграф — любые две вершины достижимы.

Сильносвязный орграф — любые две вершины достижимы друг из друга.

Слабосвязный орграф — не является связным, но при замене всех дуг на ребра порождает связный неориентированный граф.

Бикомпонент (компонент сильной связности) — это максимальный по включению сильно связанный подграф графа.

В отличие от Гамильтонова цикла для выделения бикомпоненты существуют простые алгоритмы.

Граф можно рассматривать как набор бикомпонент, соединенных ребрами, не входящие ни в одну бикомпоненту.

Если входное воздействие попадает в одну из вершин бикомпоненты, то оно беспрепятственно распространяется по всем другим её вершинам. С точки зрения прохождения информации бикомпоненту можно рассматривать как одну вершину — такая конструкция — **граф Конденсации** (граф Герца).

В общем случае в бикомпоненте существует опасность, что конкретный контур является контуром положительной обратной связи.

Решение проблемы:

- 1) Выявление контуров сильной связности и нейтрализация (преобразование структуры системы в безконтурный граф).
- 2) Смена направлений каких-либо дуг, входящих в контур

При формировании и реплицировании информационных системы мы стремимся к тому, чтобы не возникало эффекта заражения (то есть чтобы кол-во контуров внутри бикомпоненты было сравнительно небольшим).

§5. Характеристические числа графа

Раскраска вершин графа — разбиение множества его вершин на не пересекающиеся подмножества, причем каждое подмножество не содержит смежных вершин.

Тогда **хроматическое число графа** — наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить граф при раскраске. Определение хроматического числа требует сложных алгоритмов переборного типа (методы целочисленного программирования).

Применение:

- 1) Составление расписания — это NP-полная задача (диспетчеры используют типовые эвристики)
- 2) Распределение ресурсов (есть ресурсы, есть определенное кол-во работы)
- 3) Экономия памяти (распределение регистров в процессоре)

Цикломатическое число — наименьшее кол-во ребер, после удаления которого в графе не содержится ни одного цикла (оно указывает наименьшее число ребер, которые нужно удалить из графа для перевода его в дерево).

Применение:

- 1) Определение числа маршрутов при тестировании программы (есть разные критерии тестирования, в том числе: обеспечить однократную проверку каждого линейно-независимого цикла и каждого линейно-независимого циклического участка программы). Линейно-независимый циклический маршрут отличается от всех других хотя бы одной вершиной или дугой. При использовании этого критерия кол-во проверяемых маршрутов равно цикломатическому числу.

§6. Метрические свойства графа

Расстояние между вершинами графа — длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Длина цепи измеряется кол-вом входящих в неё ребер.

Диаметр графа — максимальное расстояние между двумя его вершинами.

Эксцентриситет — максимальное расстояние от неё до других вершин (диаметр — максимальный эксцентриситет вершины).

Центр графа — такая вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

$x_0: \forall x \in X [\max d(x, y) \geq \max d(x_0, x)]$

$d_0(x_0, x)$

§7. Топологическая сортировка графа

Дан орграф, требуется перенумеровать его вершины таким образом, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим. Требуется найти перестановку вершин (**топологический порядок/сортировка**). Топологическая сортировка может быть не единственной и она может не существовать, если граф содержит циклы.

Применение:

- 1) При составлении учебных планов
- 2) При планировании действий (разбиение целей на подцели и т. п.)

(все, что касается графов (определения — их около 80-ти) войдет в рубрику — нужно будет раскрыть всю специфику определения)