Практикум 3. Задача 4

Уткин Г.И.

1 Постановка задачи

Для краевой задаче в единичном круге

$$-\Delta u = f, \; u|_{\delta\Omega} = \alpha$$

построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и решить полученую ЛАУ при помощи БДПФ и прогонки.

Замечание
Метод решения ЛАУ был заменен с БДПФ на Метод переменных направлений.

2 Задача в полярной системе координат

Перед построением сетки и разностной схемы перейдем из декартовой к полярной системе координат. В ней единичному кругу без границы соответствует прямоугольник:

$$G = \{0 \leq r < 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Тогда изначальная задача принимает вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -f(r,\phi),\ (r,\phi) \in G$$
$$u(r,0) = u(r,2\pi),\ 0 \le r \le 1$$
$$u(1,\phi) = \alpha(\phi),\ 0 \le \phi \le 2\pi$$
$$\lim_{r\to 0}\ r\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

3 Построение разностной схемы

В прямоугольной области $\overline{G}$ введем равномерную прямоугольную сетку

$$\overline{\omega} = \{(r_i,\phi_j) \in \overline{G},\ r_i = r_{i-1} + h_1,\ 1 \le i \le N_1,\ r_0 = 0,\ r_{N_1} = 1,$$
$$\phi_j = \phi_{j-1} + h_2,\ 1 \le j \le N_2,\ \phi_0 = 0,\ \phi_{N_2} = 2\pi\}$$
$$h_1 = \frac{1}{N_1},\ h_2 = \frac{2\pi}{N_2}$$

Таким образом, в сетке будет $N_1 N_2$ точек. Аппроксимации задачи на данной сетке:

$$\begin{cases} \Delta y = \frac{1}{r_i}(\overline{r_i} y_{\overline{r}})_{\hat{r}} + \frac{1}{r_i^2}(y_{\overline{\phi}})_{\hat{\phi}} = \psi,\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ \Delta y = \frac{1}{0.25\pi h_1^2}\sum\limits_{j=0}^{N_2-1}\overline{r_1} h_2 y_r = \psi,\ i = 0 \\ y(i,j) = y(i, N_2 + j),\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ j = 0,-1 \\ y(N_1, j) = \beta,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ y(0,j) = y_0,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \end{cases}$$

где:

$$\overline{r_i} = r_i - 0.5h_1$$
$$\psi(i,j) = -f(r_i,\psi_j)$$
$$\beta(j) = \alpha(\psi_j)$$

y_0 - аппроксимация значения функции u в центре единичной окружности. Для его вычисления к построенной разностностной задаче применяется принцип суперпозиции, а именно: сеточная функция y представляется как линейная комбинация двух других сеточных функций с условиями периодичности:

$$y(i,j) = v(i,j) + y_0 w(i),\ 0 \le i \le N_1,\ 0 \le j \le N_2 - 1$$
$$v(i,j) = v(i, N_2 + j),\ j = 0, -1$$

Изначальная же разностная задача разбивается на 2 другие, которые решаются проще:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_i}(\overline{r_i} v_{\overline{r}})_{\hat{r}} + \frac{1}{r_i^2}(v_{\overline{\phi}})_{\hat{\phi}} = \psi,\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ v(i,j) = v(i, N_2 + j),\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ j = 0, -1 \\ v(N_1, j) = \beta,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ v(0, j) = 0,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r_i}(\overline{r_i} w_{\overline{r}})_{\hat{r}} = 0,\ 1 \le i \le N_1 - 1 \\ w(N_1) = 0 \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

После решения задач y_0 вычисляется по преобразованной формуле:

$$y_0 = -\frac{h_1^2 \psi(0,0) + 4 \sum\limits_{j=0}^{N_2-1} v(1,j)}{4(w(1) - 1)}$$

Значения y в узлах сетки восстанавливается по формуле $y = v + y_0 w$, введенной выше.

Первая задача решается с помощью Метода переменных направлений и двух видов прогонки. Вторая задача решается с помощью обычной прогонки.

4 Решение 1 разностной схемы. Метод переменных направлений

После домножения на r_i^2 соответствующих уравнений 1 разностная схема принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta y = r_i(\overline{r_i} v_{\overline{r}})_{\hat{r}} + (v_{\overline{\phi}})_{\hat{\phi}} = r_i^2\psi,\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ v(i,j) = v(i, N_2 + j),\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ j = 0, -1 \\ v(N_1, j) = \beta,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \\ v(0, j) = 0,\ 0 \le j \le N_2 - 1 \end{cases}$$

Представим оператор Δy в качестве суммы операторов $A_1 + A_2$:

$$A_1 y = r_i(\overline{r_i} v_{\overline{r}})_{\hat{r}},\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ 0 \le j \le N_2 - 1$$
$$A_2 y = (v_{\overline{\phi}})_{\hat{\phi}},\ 1 \le i \le N_1 - 1,\ 0 \le j \le N_2 - 1$$

Расписав численное дифференцирование в новых операторах, совершив замены по периодичности, заменив $y(0,j), y(N_1,j)$ на их известные значения и перенеся независящие от y слагаемые в правые части уравнений, получаем операторное уравнение:

$$(\overline{A_1} + \overline{A_2})y = F$$

где:

$$\begin{cases} \overline{A_1} y = \frac{2r_i^2}{h_1^2} y(i,j) - \frac{\overline{r_{i+1}} r_i}{h_1^2} y(i+1,j),\ i = 1 \\ \overline{A_1} y = -\frac{\overline{r_i} r_i}{h_1^2} y(i-1,j) + \frac{2r_i^2}{h_1^2} y(i,j) - \frac{\overline{r_{i+1}} r_i}{h_1^2} y(i+1,j),\ 1 \le i \le N_1 - 2 \\ \overline{A_1} y = -\frac{\overline{r_i} r_i}{h_1^2} y(i-1,j) + \frac{2r_i^2}{h_1^2} y(i,j), i = N_1 - 1 \\ 0 \le j \le N_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{A_2}y = \frac{1}{h_2^2}(-y(i, N_2-1) + 2y(i,0) - y(i,1)),\ j = 0 \\ \overline{A_2}y = \frac{1}{h_2^2}(-y(i, j-1) + 2y(i,j) - y(i,j+1)),\ 1 \le j \le N_2-2 \\ \overline{A_2}y = \frac{1}{h_2^2}(-y(i, N_2-2) + 2y(i,N_2-1) - y(i,0)),\ j = N_2-1 \\ 1 \le i \le N_1-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(i,j) = r_i^2\psi(i,j),\ 1 \le i \le N_1-2 \\ F(i,j) = r_i^2\psi(i,j) + \ + \frac{\overline{r_{i+1}r_i}}{h_1^2}\beta(j),\ i = N_1-1 \\ 0 \le j \le N_2-1 \end{cases}$$

К операторам $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ применяется Метод переменных направлений. Состоит он в приближении решения уравнения посредством итерационного алгоритма

$$(\omega^1 E + \overline{A_1})y_{k+0.5} = (\omega^1 E - \overline{A_2})y_k + F$$
$$(\omega^2 E + \overline{A_2})y_{k+1} = (\omega^2 E - \overline{A_1})y_{k+0.5} + F$$

Здесь y_k - приближение вектора значений сеточной функции y на предыдущей итерации, $y_{k+0.5}$ - промежуточное вычисление, y_{k+1} - новое приближение, ω^1, ω^2 - постоянные итерационные параметры. За начальное приближение y берется нулевой вектор. Итерационный процесс прекращается в случае, если норма невязки между векторами F и $(\overline{A_1} + \overline{A_2})y$ меньше 10^{-8}.

Итерационные параметры выбираются по алгоритму, описанному в Пункте 7. Квадратная матрица $(\omega^1 E + \overline{A_1})$ размерности $N_2(N_1-1)$ имеет в себе 3 ненулевые диагонали, не находящиеся рядом с другом. Если же для каждого j взять из каждого i -ого блока j - ое уравнение, то получится следующая система

$$\begin{cases} (\frac{2r_i^2}{h_1^2}+\omega^1)y(i,j)-\frac{\overline{r_{i+1}}r_i}{h_1^2}y(i+1,j)=b(1,j),\ i=1 \\ -\frac{\overline{r_i}r_i}{h_1^2}y(i-1,j)+(\frac{2r_i^2}{h_1^2}+\omega^1)y(i,j)-\frac{\overline{r_{i+1}}r_i}{h_1^2}y(i+1,j)=b(i,j),\ 1\leq i\leq N_1-2 \\ -\frac{\overline{r_i}r_i}{h_1^2}y(i-1,j)+(\frac{2r_i^2}{h_1^2}+\omega^1)y(i,j)=b(i,j), i=N_1-1 \end{cases}$$

обладающая трехдиагональной матрицей, которую решаем с помощью прогонки. Таким образом, для решения 1 уравнения на каждой итерации нужно решить N_2 меньших систем уравнений методом прогонки (Пункт 6).

Квадратная матрица $(\omega^2 E+\overline{A_2})$ обладает следующей структурой: на диагонали стоят N_1-1 одинаковых блоков размерности N_2, вне везде стоят нули. Блоки эти имеют ненулевую главную и соседние с ней диагонали и ненулые элементы в нижнем левом и нижнем правом углах матрицы (матрица такого вида изображена в Пункте 7). Разрешаются уравнения с такими матрицами с помощью метода циклической прогонки (Пункт 7). Таким образом, для решения второго уравнения на каждой итерации нужно решить N_1-1 меньших систем уравнений.

5 Метод прогонки

Метод прогонки для решения СЛУ с трехдиагональной матрицей M размера $S\star S$ и вектором правой части R и состоит из прямого и обратного хода.

1. Прямой ход:

   Вычисляются коэффициенты $k_t, m_t, t=0,...,S-1$ по следующему правилу:

$$k_0 = -\frac{M[0][1]}{M[0][1]},\ m_0 = \frac{R[0]}{M[0][0]}$$

$$k_i = \frac{M[i][i+1]}{-M[i][i] - M[i][i-1] \cdot k_{i-1}},\ m_i = \frac{M[i][i-1] \cdot m_{i-1} - R[i]}{-M[i][i] - M[i][i-1] \cdot k_{i-1}},$$
$$i = 1, ..., S-2$$

$$k_{S-1} = 0,\ m_{S-1} = \frac{M[S-1][S-2] \cdot m_{S-2} - R[S-1]}{-M[S-1][S-1] - M[S-1][S-2] \cdot k_{S-2}}$$

2. Обратный ход: Вычисляются координаты решения СЛУ по алгоритму:

$$x_{S-1} = m_{S-1}$$

$$x_i = k_i \cdot x_{i+1} + m_i,\ i = S-2, ..., 0$$

6 Метод циклической прогонки

Метод циклической прогонки применяется для решения СЛУ вида:

$$\begin{cases} -a_0 y_{N-1} + c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0,\ i = 0 \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i,\ 1 \le i \le N-2 \\ -a_{N-1} y_{N-2} + c_{N-1} y_{N-1} - b_{N-1} y_0 = f_{N-1},\ i = N-1 \end{cases}$$

Левой части уравнений соответствует оператор с матрицей следующего вида:

$$\begin{vmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & c_{N-3} & -b_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} \\ -b & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a & c \end{vmatrix}$$

Решение СЛУ ищется в виде линейной комбинации сеточных функций:

$$y_i = u_i + y_0 v_i,\ 0 \le i \le N$$

где u - решение задачи

$$-a_i u_{i-1} + c_i u_i - b_i u_{i+1} = f_i,\ 1 \le i \le N-1$$
$$u_0 = 0,\ u_N = 0$$

а v - решение задачи

$$-a_i v_{i-1} + c_i v_i - b_i v_{i+1} = 0,\ 1 \le i \le N-1$$
$$v_0 = 1,\ v_N = 1$$

y_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = \frac{f_0 + a_0 u_{N-1} + b_0 u_1}{c_0 - a_0 v_{N-1} - b_0 v_1}$$

Обе задачи u, v решаются с помощью метода прогонки.

7 Выбор итерационных параметров для Метода переменных направлений

Постоянные итерационные параметры w^1, w^1 для Метода переменных направлений вычисляются в программе как в случае некоммутативных операторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ по нижеследующему алгоритму.

1. Находятся значения границ операторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}$, а именно констант $\delta_1, \delta_2, \Delta_1, \Delta_2$ т.ч.:

$$\delta_1 E \le \overline{A_1} \le \Delta_1 E,\ \delta_2 E \le \overline{A_2} \le \Delta_2 E$$

Для операторов данной задачи:

$$\delta_2 = 0,\ \Delta_2 = \frac{4}{h_2^2}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{max(V_i)}$$

где V - вектор значений сеточной функции, удовлетворяющей следующей системе:

$$\begin{cases} r_i\overline{r_i}V_{i-1} - 2r_i^2 V_i + r_i\overline{r_{i+1}}V_{i+1} = -h_1^2,\ 1 \le i \le N_1 - 1 \\ V_0 = V_{N_1} = 0 \end{cases}$$

Данная задача решается методом прогонки

Для нахождения Δ_1 методом прогонки решается задача

$$\begin{cases} r_i\overline{r_i}W_{i-1} - 2r_i^2 W_i + r_i\overline{r_{i+1}}W_{i+1} = 0,\ 1 \le i \le N_1 - 1 \\ W_0 = W_{N_1} = 0 \end{cases}$$

И находятся значения 2 констант

$$m_1 = max(W_i)$$
$$m_2 = max(\frac{(2-h_1)(4-h_1)}{2h_1^2}, \frac{1}{2}, \frac{4(1-h_1)^2}{h_1^2})$$

Тогда

$$\Delta_1 = m_1 + m_2(1 + m_1)$$

2. Вычисляется ряд констант и сами значения w^1, w^1

$$a = \sqrt{\frac{(\Delta_1-\delta_1)(\Delta_2-\delta_2)}{(\Delta_1+\delta_2)(\Delta_2+\delta_1)}}$$

$$\eta = \frac{1-a}{1+a}$$

$$b = \frac{(\Delta_2+\delta_1)a}{\Delta_1-\delta_1},\ t = \frac{1-b}{1+b},\ r = \frac{\Delta_2+\Delta_1 b}{1+b},\ s = \frac{\Delta_2-\Delta_1 b}{1+b}$$

$$w^1 = \frac{r\sqrt{\eta}+s}{1+t\sqrt{\eta}},\ w^2 = \frac{r\sqrt{\eta}-s}{1-t\sqrt{\eta}}$$

8 Результаты

Для проверки результатов программы в качестве функции $u(x, y)$ взята функция, имеющая в полярных координатах вид

$$u(r, \phi) = r^3 \sin\phi + 9$$

Это функции соответвует $f = -\Delta u$, имеющая в полярных координатах вид

$$f(r, \phi) = -8r \sin\phi$$

Соответствующее u граничное условие имеет в полярных координатах вид

$$\alpha(\phi) = \sin\phi + 9$$

В таблице представлена зависимость на нескольких тестах нормы погрешности приближения от количества N_1, N_2 шагов сетки по соответсвующим направления и последовательное отношение этих норм. Исходя из результатов тестов, требуемый порядок аппроксимации достигается.

N_1	N_2	Норма	Отношение норм
10	10	0.00312445048	-
20	20	0.00081940819	3.81305742136
40	40	0.00020509105	3.99533860693
80	80	0.00005126365	4.00071103014