alt text

第三关：☆求待定系数

同济八版

优点：天生就会

缺点：人工计算繁琐

【例 3】求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$

(法一) 比较 x 同幂次系数，解方程组

解：$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$,

则 $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{(Ax+B)(x+1)+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$

即 $x-3 = (A+D)x^2+(A+B-2D)x+B+D$,

比较上式两端同次幂的系数，即有

$\begin{cases} A+D=0, \\ A+B-2D=1, \\ B+D=-3, \end{cases}$ 从而解得 $\begin{cases} A=1, \\ B=-2, \\ D=-1. \end{cases}$

第三关：☆求待定系数

优点：计算量小；易上手

缺点：写字也不少

【例 3】求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$ $\quad x \neq 1, -1$

(法二) 通分、x 代入特殊值（“争取每代一个值，都仅剩一个系数”）

解：$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$,

则 $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{(Ax+B)(x+1)+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$

$x-3 = (Ax+B)(x+1)+D(x-1)^2$

令 $x=-1$，$-4 = 4D \Rightarrow D=-1$

令 $x=0$，$-3 = B-1 \Rightarrow B=-2$

令 $x=1$，$-2=(A-2)\cdot 2$

$\Rightarrow A=1$

第三关：☆求待定系数

进阶

【例 3】求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$　$\frac{A_1}{(x-a)^k}$ (k最高次)

(法三) 留数法 + 求极限 ($x \to \infty$)

优点：直接观察结果

缺点：需要练一练

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

$x+1$

求D　两端乘 $(x+1)$

$x=-1$

$x \to -1$

$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}\right](x+1) + D$$

代入 $x=-1$

$-1 = D$

第三关：☆求待定系数

进阶

【例 3】求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$　$\frac{A_1}{(x-a)^k}$ (k最高次)

(法三) 留数法 + 求极限 ($x \to \infty$)

优点：直接观察结果

缺点：需要练一练

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

求D　两端乘 $(x+1)$

$x=-1$　极限 $x \to -1$

$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}\right](x+1) + D$$

代入 $x=-1$，$-1 = D$

求B　两端乘 $(x-1)^2$

$x=1$

$$\frac{x-3}{x+1} = A(x-1) + B + \frac{D}{x+1} \cdot (x-1)^2$$

代入 $x=1$，$-1 = B$

第三关：☆求待定系数

【例 3】求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$

进阶

$\frac{A_1}{(x-a)^k}$ （k最高次）

（法三）留数法 + 求极限（$x \to \infty$）

优点：直接观察结果

缺点：需要练一练

"求谁，删谁，代谁"

大边/分母　　分母为0的x

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

求A　两边乘x，$x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{Ax}{x-1} + \frac{Bx}{(x-1)^2} + \frac{Dx}{x+1}\right]$$

$\frac{\infty}{\infty}$ "抓大头"

$\to 0$　　$\to D$

$0 = A + D$　　$\therefore A=1$　　-1

第四关：求最简分式的积分！

组合法：分子 = (分母)' + C.　$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

【例 4】求 $\int \frac{3}{x^3+1}dx$

令 $\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1}$

得 $A=1, B=-1, D=2$

原式 $= \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$

(分母)'

$= \ln|x+1| - \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$

$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$

$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

$\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$

$$\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

【滚瓜烂熟 2 组之三角函数】

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(8) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(9) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(10) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(11) $\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

(12) $\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(13) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

(14) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

"关键在于:知道左边的形式有公式!做题往左边凑!"

【考前背一背组之三角函数】

(15) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$;

(16) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$;

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\ (a>0)$;

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\ (a>0)$;

(19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a>0)$;

(20) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\ (a>0)$;

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

1. 定义：适当地选择变量代换 $x=\psi(t)$，将积分 $\int f(x)dx$ 化为积分 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$，换元公式可表

$$\int f(x)dx=\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$，其中，$x=\psi(t)$ 是单调可导的函数，且 $\psi'(t)\neq 0$.

$t=\psi^{-1}(x)$ $\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|$

2. 常见的几种换元法：三合一

1) 三角代换

$=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$

反三角 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 主值

被积函数含 $\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$，令 $x=a\sin t$，$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$；$\Rightarrow x=\arcsin y$

$\sin t=\frac{x}{a}$ $t=\arcsin\frac{x}{a}$ "主值区间" $\frac{\pi}{2}$ ①

被积函数含 $\sqrt{x^2+a^2}\,(a>0)$，令 $x=a\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$；

$=\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}=a\sec t$

被积函数含 $\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$，令 $x=a\sec t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$；

$=\sqrt{a^2(\sec^2 t-1)}=a|\tan t|$ $\begin{cases}a\tan t, & 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ -a\tan t, & \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$

2) 根式代换

例1 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$ $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\sin t=\frac{x}{a}$

解：原 $\xlongequal[dx=a\cos t\,dt]{令x=a\sin t}\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt$

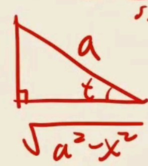
$=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt$

$=\frac{a^2}{2}\left(\int 1\,dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right)$

$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$

$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$ 辅助三角形

$\sin t=\frac{x}{a}$



$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$

$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$