# 1.Непрерывности функции и классификация разрывов

Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности) и на множестве. Лемма о связи непрерывности и предела. Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов. Определение точек разрыва и их классификация.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Лемма 33** (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке $x_0$, предельной для $E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Если точка $x_0$ не является предельной для $E$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

**Лемма 34** (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0$ — предельная для $E$. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции $f$ в точке равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции $f$ в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 47** (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода или скачком.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

## 2.Локальные свойства непрерывных функций

Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции (локальные свойства, непрерывность суммы, произведения и отношения функций). Теорема о непрерывности композиции функций.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

**Теорема 26** (Локальные свойства непрерывных функций).
Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда:

1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $x_0$.
2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в $x_0$.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в $x_0$.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в $x_0$, если $g(x_0) \neq 0$.

**Теорема 27** (О непрерывности композиции).
Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

## 3.Теорема Вейерштрасса

Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Лемма о замкнутости отрезка. Теорема Вейерштрасса.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

**Лемма 35** (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in [a, b].$$

**Теорема 28** (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда:

1. $f$ ограничена на $[a, b]$.
2. $f$ достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений.

## 4.Теоремы Больцано-Коши

Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon-\delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0)) \; \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0)) \; \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

**Теорема 29** (Первая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

**Теорема 30** (Вторая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B) \; \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

## 5.Непрерывность и монотонность функции

Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции. Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0)) \ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0)) \ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

**Теорема 32** (Критерий непрерывности монотонной функции).
Пусть $f$ – монотонная на $\langle a, b\rangle$ функция. Тогда:

1. $f$ не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность $f$ равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

**Теорема 33** (Об обратной функции).
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – биекция.
2. $f^{-1}$ строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и $f$.
3. $f^{-1} \in C(\langle m, M\rangle)$.

## 6.Равномерная непрерывность

Определение непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение равномерно непрерывной функции на множестве. Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции. Теорема Кантора.

**Определение 43** (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Замечание 82.**
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

**Определение 62** (Понятие равномерной непрерывности).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Функция $f$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x, x' \in D : \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

**Лемма 59.**
Если $f$ равномерно непрерывна на $D$, то $f$ непрерывна на $D$.

**Теорема 47** (Кантора).
Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

## 7.Производная и дифференциал

Определение производной функции, дифференцируемости функции, дифференциала. Теорема о связи производной и дифференцируемости. Лемма о непрерывности дифференцируемой функции. Определение касательной к графику функции. Лемма об уравнении касательной.==Геометрический смысл производной и дифференциала.== Определение вертикальной касательной.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 64** (Понятие дифференцируемости функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0+h \in \langle a, b\rangle$. Функция $f$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, если существует такое число $A$, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

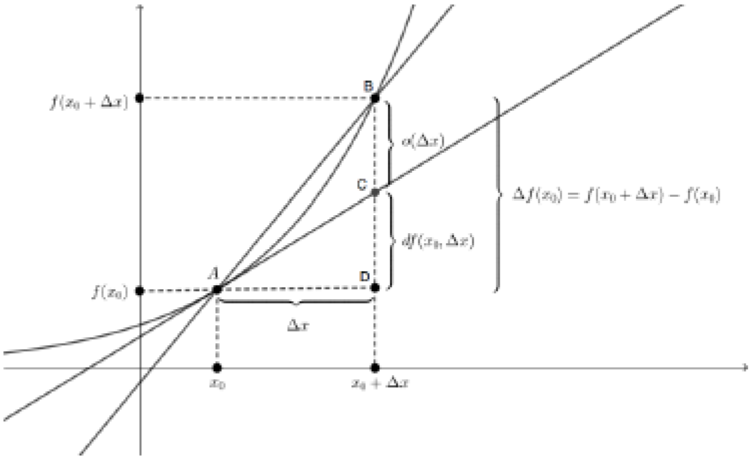
**Теорема 48** (О связи производной и дифференцируемости).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

**Лемма 60** (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке $x_0$.

**Определение 68.**
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение $AC$ секущей $AB$ графика функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

**Лемма 61** (Об уравнении касательной).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$




**Определение 69.**
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

## 8.Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного)

Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале суммы, произведения, частного функций.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 49** (О производной суммы, произведения и частного).
Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке $x_0$. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке $x_0$ и
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. Их произведение дифференцируемо в точке $x_0$ и
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Их частное дифференцируемо в точке $x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Следствие 16** (О дифференциале суммы, произведения и частного).
В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:

1. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$.
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$.
3. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, при $g(x_0) \neq 0$.

## 9.Основные правила дифференцирования (производная композиции функций и обратной функции)

Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале композиции функций. Теорема о производной и дифференциале обратной функции.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 50** (О производной композиции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $g$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке $x_0$ и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

**Следствие 17** (О дифференциале композиции).
В условиях предыдущей теоремы,

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

**Теорема 51** (О производной обратной функции).
Пусть функции $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – взаимно обратные, причем $f$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, а $f^{-1}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$, то $f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Следствие 18** (О дифференциале обратного отображения).
В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

## 10.Французские теоремы (Ферма, Ролля)

Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции, точек локального максимума, минимума и экстремума. Теорема Ферма, геометрический смысл. Теорема Ролля, геометрический смысл.

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \;\; f(x_1) \le f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \;\; f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \;\; f(x_1) \ge f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \;\; f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Определение 70** (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \;\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\Rightarrow\; f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \;\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\Rightarrow\; f(x) \ge f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

**Определение 71** (Понятие точек экстремума).
Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локально-





го минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

**Теорема 54** (Ферма).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если $x_0$ – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

**Теорема 55** (Ролля).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

## 11.Французские теоремы (Лагранжа)

Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лагранжа, геометрический смысл. Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции. Критерий монотонности функции. Критерий постоянства функции.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in (a, b)$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 56** (Лагранжа).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**Замечание 135.**
Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале $(a, b)$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 7.

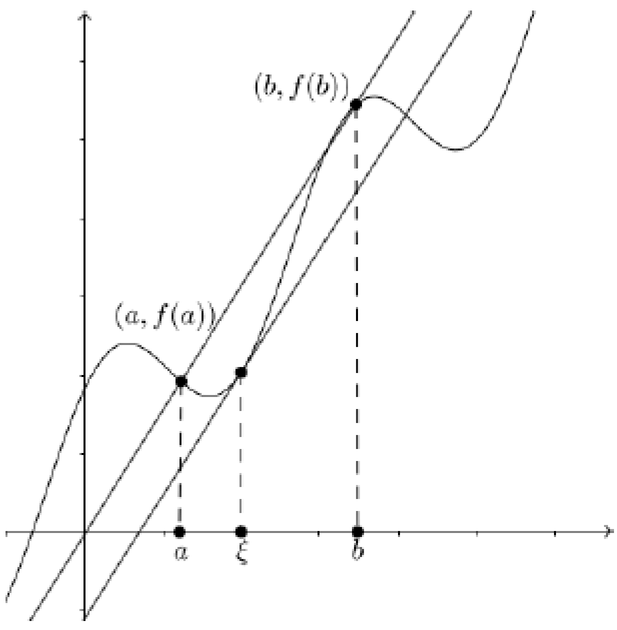



*Рис. 7. Теорема Лагранжа*

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Теорема 57** (Критерий монотонности функции).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Тогда:

1. Для того чтобы функция $f$ возрастала (убывала) на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) на $(a, b)$.
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a, b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на $(a, b)$.

**Теорема 58** (Критерий постоянства функции).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Для того чтобы $f$ была постоянной на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на $(a, b)$.

## 12.Французские теоремы (Коши)

Определения производной и дифференциала функции. Теорема о пределе производной. Теорема Коши, геометрический смысл.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in (a, b)$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 59** (О пределе производной).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Если

$$A = \lim_{x \to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

**Теорема 60** (Коши).
Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы на $(a,b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на $(a,b)$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Замечание 139.**
Геометрическая интерпретация к теореме Коши та же, что и к теореме Лагранжа. Пусть $g'(t) \neq 0$ на $(a,b)$. Тогда, и это можно доказать, либо $g'(t) > 0$ на $(a,b)$, либо $g'(t) < 0$ на $(a,b)$, а значит система

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

задает функцию $y = f(g^{-1}(x))$ параметрически. Тогда в выражении

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

слева стоит коэффициент наклона хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(g^{-1}(x))$, а справа – коэффициент наклона касательной к графику этой функции в некоторой промежуточной точке $\xi$ (см. теорему 53).

*备注 139* 柯西定理的几何解释与拉格朗日定理的几何解释相同。
假设 ( g'(t) \neq 0 ) 在区间 ((a, b)) 上成立。那么，可以证明要么 ( g'(t) > 0 ) 在 ((a, b)) 上成立，要么 ( g'(t) < 0 ) 在 ((a, b)) 上成立。因此，系统

[ \begin{cases} x = g(t) \ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] ]

参数化地定义了函数 ( y = f(g^{-1}(x)) )。在表达式

[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(ξ)}{g'(ξ)} ]

中，左边是连接函数 ( y = f(g^{-1}(x)) ) 图形两端的弦的斜率，而右边是该函数图形在某个中间点 ξ 处的切线的斜率（参见定理 53）。

## 13.Французские теоремы (Лопиталя)

Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лопиталя.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in (a,b)$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 61** (Правило Лопиталя).
Пусть $f, g$ дифференцируемы на $(a, b)$, $g'(x) \neq 0$ на $(a, b)$ и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty.$





выполняется

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

## 14.Формула Тейлора

Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка. Определение многочлена Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано. Теорема о единственности многочлена Тейлора.Теорема о характеристике остаточного члена в формуле Тейлора (без доказательства). Следствия об остаточных членах в формах Лагранжа и Коши.

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in (a, b)$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Определение 72** (Производная высшего порядка).
Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции $f$. Обозначим через $E_n$ множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x - \delta, x + \delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка $n$, или, короче, $n$-ой производной функции $f$. При этом функция $f$ называется $n$ раз дифференцируемой на множестве $E_n$.

**Определение 74** (Дифференциал высшего порядка).
Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – $n$ раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$

называется $n$-ым дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$, соответсвующим приращению $h$.

**Определение 75** (Понятие многочлена Тейлора).
Пусть функция $f$ имеет в точке $x_0$ все производные до порядка $n$ включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка $n$ функции $f$ в точке $x_0$. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

**Теорема 63** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция $f$ в точке $x_0$ имеет производные до порядка $n$ включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

**Теорема 64** (О единственности многочлена Тейлора).
Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

**Теорема 65** (О характеристике остаточного члена).
Пусть $f$ непрерывна вместе со своими первыми $n$ производными на отрезке с концами $x_0$ и $x$, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда для любой функции $\varphi$, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка $\xi$, лежащая между $x_0$ и $x$, такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

*定理 65*（关于余项特征的定理）。
假设函数 ( f ) 及其前 ( n ) 阶导数在端点 ( x_0 ) 和 ( x ) 之间的区间上连续，并且在该区间的内点具有 ( (n+1) ) 阶导数。那么，对于任何在该区间上连续且在内点具有非零导数的函数 ( \varphi )，存在一个介于 ( x_0 ) 和 ( x ) 之间的点 ( \xi )，使得

[ r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. ]

这个定理描述了泰勒公式中余项的特征。它表明，余项 ( r_n(x, x_0) ) 可以通过函数 ( \varphi ) 和 ( f ) 的导数在某个中间点 ( \xi ) 的值来表示。这个结果在分析泰勒展开的误差和近似精度时非常有用。

**Следствие 20** (Остаточный член в форме Лагранжа).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Лагранжа:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$.

**Следствие 21** (Остаточный член в форме Коши).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Коши:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0),$$

где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$.

## 15.Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)

Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции, точек локального максимума, минимума и экстремума. Теорема о необходимом условии экстремума. Теорема о первом достаточном условии экстремума. Теорема о втором достаточном условии экстремума. Классификация точек экстремума.

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Определение 70** (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

**Определение 71** (Понятие точек экстремума).
Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локально-





го минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

**Теорема 69** (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f$ не дифференцируема в $x_0$.

**Теорема 70** (Первое достаточное условие экстремума).
Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке $x_0$ и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ является точкой строгого локального максимума функции $f$.





2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ является точкой строгого локального минимума функции $f$.
3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f$.
4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f$.

**Теорема 71** (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и $f$ имеет в точке $x_0$ производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если $n$ нечетно, то точка $x_0$ – не точка экстремума.
2. Если $n$ четно, то точка $x_0$ – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

**Определение 77** (Классификация точек экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума $f$.

1. Если $f$ дифференцируема в $x_0$, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

## 16.Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба – 1)

Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости в терминах наклона хорд. Определения производной и дифференциала функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. Определение точки перегиба.

**Определение 78** (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

то $f$ называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$.
Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

то $f$ называется строго выпуклой вниз (верх).

## 关于弦斜率的凸性准则

**Теорема 72** (Критерий выпуклости в терминах наклона хорд).
Функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x, x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

При этом $f$ строго выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \underset{>}{<} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in \langle a,b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Теорема 73** (Критерий выпуклости дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f'$ возрастает (убывает) на $(a,b)$.
2. $f$ строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f'$ строго возрастает (убывает) на $(a,b)$.

## 拐点的概念

**Определение 79** (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0-\delta, x_0]$, $[x_0, x_0+\delta)$ функция $f$ имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $x_0$ называется точкой перегиба $f$.

## 17.Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба – 2)

Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции. Теорема о характеристике выпуклости в терминах касательных. Определение точки перегиба.

**Определение 78** (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

то $f$ называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$.
Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

то $f$ называется строго выпуклой вниз (верх).

二阶可微函数的凸性准则

**Теорема 74** (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дважды дифференцируема на $(a, b)$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на $(a, b)$ ($f''(x) \leq 0$ на $(a, b)$).
2. Если $f''(x) > 0$ на $(a, b)$ ($f''(x) < 0$ на $(a, b)$), то $f$ строго выпукла вниз (вверх).

**Теорема 75** (Характеристика выпуклости в терминах касательных).
Пусть $f$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции $f$ лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle.$$
2. $f$ строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции $f$, за исключением точки касания, лежат выше (ниже) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{<}{>} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

拐点的概念

**Определение 79** (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ функция $f$ имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $x_0$ называется точкой перегиба $f$.

## 18.Исследование функции с помощью производных (асимптоты)

Определение асимптоты, виды асимптот. Теорема о формулах для коэффициентов наклонной асимптоты. Лемма о связи выпуклости и асимптоты.

**Определение 80** (Понятие асимптоты).
Прямая $l$ называется асимптотой графика функции $f$, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой $l$ стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

**Определение 81** (Понятие вертикальной асимптоты).
Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f$, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

**Определение 82** (Понятие наклонной асимптоты).
Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f$ при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

**Теорема 76** (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).
Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции $f$ при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$





$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b_{\pm\infty}.$$

**Лемма 65** (Выпуклость и асимптота).
Пусть $f : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет асимптоту $g(x) = kx + b$ при $x \to +\infty$ и выпукла вниз (строго выпукла вниз) на $(x_0, +\infty)$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) > g(x)$ при $x > x_0$).