三大重要结论之

① $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ \begin{cases}p>1, & \text{收敛,}\\ p\le 1, & \text{发散}\end{cases}(a>0)$（由直接计算得来）

● 做做看↓

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛/发散 | $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 收敛/发散 | $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛/发散

② $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^q},\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^q},\begin{cases}q<1, & \text{收敛,}\\ q\ge 1, & \text{发散.}\end{cases}$（由直接计算得来）

$\int_1^2\frac{1}{(2-x)^3}dx$ 发

$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ n2.

● 做做看↓ $\int_0^1\frac{1}{(x-0)^q}dx$

$\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ 收敛/发散 | $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 收敛/发散 | $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛/发散

三大重要结论之

③ $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}=\begin{cases}\alpha>1, & \text{收敛,}\\ \alpha<1, & \text{发散,}\\ \alpha=1, & \begin{cases}\beta>1, & \text{收敛,}\\ \beta\le 1, & \text{发散.}\end{cases}\end{cases}\quad(a>1)$（由直接计算+比较判别法）

$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln^{-1}x}dx\quad \alpha=2>1$

● 做做看↓

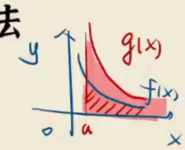
$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}dx$ 收敛/发散 | $\int_e^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}dx$ 收敛/发散 | $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ 收敛/发散 | $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 收敛/发散

$\alpha>1$ $\alpha=\frac{1}{2}<1$ $\beta=2>1$

③* $\int_0^1\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\alpha<1, & \text{收敛,}\\ \alpha\ge 1, & \text{发散.}\end{cases}(\beta>0)$（←瑕积分·实用版） 瑕点 $x=0$.

只看α.

第三招 遇到变形,用比较判别法



【例 3】下列反常积分发散的是 (BC).

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^3}}dx$; (B) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}dx$; 发 $x\to+\infty$ $\sim\frac{1}{2x}$

(A) $0\le\frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^3}}\le\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\le\frac{1}{x^{\frac32}}$, 由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac32}}dx$ 收敛, 故原积分收敛.

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}}{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}=1$ 由 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散, 故原积分发散.

(C) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tan x}dx$; (D) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(C) 瑕点 $x=0$ $I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\tan x}dx+\int_0^1\frac{1}{\tan x}dx$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac1x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\tan x}=1$, 由 $\int_0^1\frac1x dx$ 发, 故原积分发散.

$x\to0^+$ $\frac{1}{\tan x}\sim\frac1x$

(D) 瑕点 $x=\pm1$. $I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 由 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot2}}dx$ 收敛, 故原积分收敛.

$x\to1^-$ $\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\sim\frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot2}}$

● 无穷区间上的反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$

若始终有 $0\le f(x)\le g(x)$, 则 "大收小必收"

$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散.

(瑕积分有类似结论) "小发大必发"

● 极限形式 $f(x)\sim l\,g(x)$

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to\text{瑕点})}}\frac{f(x)}{g(x)}=l\ne0$ (同阶),

则 $f(x),g(x)$ 的反常积分敛散性相同.

正项级数敛散性

● 比较判别法的极限形式(自留款!巨好用!必考!)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\ (v_n>0)$ 是两个正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$ $\frac{1}{n^p}$

a. 若 $0<A<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 敛散性相同; "同阶"

b. 若 $A=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; $u_n<<v_n$

c. 若 $A=+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. $u_n>>v_n$

"只需看 $n\to\infty$ 时 u_n 的等价无穷小! 敛散性同!"

三个重要级数

① p-级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & 当p>1时, \\ 发散, & 当p\le 1时.\end{cases}$ （必考!）

- 做做看↓

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛/发散 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛/发散 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛/发散

调和级数

三个重要级数

一高数

$a+aq+aq^2+\cdots$

② 几何级数（等比级数）：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n(a\ne 0)\begin{cases}收敛, & 当|q|<1时, \\ 发散, & 当|q|\ge 1时.\end{cases}$ （必考!）

- 做做看↓

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 收敛/发散 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n$ 收敛/发散

三个重要级数

③ 广义 p-级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}\begin{cases}\text{当}\alpha>1\text{时，收敛；}\\ \text{当}\alpha<1\text{时，发散；}\\ \text{当}\alpha=1,\begin{cases}\beta>1\text{时，收敛，}\\ \beta\leq 1\text{时，发散.}\end{cases}\end{cases}$ （完整版!考到就赚到!）

● 做做看↓

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ln n}$ 收敛/发散 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ 收敛/发散 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛/发散

收敛级数的基本性质:

● 性质 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性相同（$k\neq 0$）.

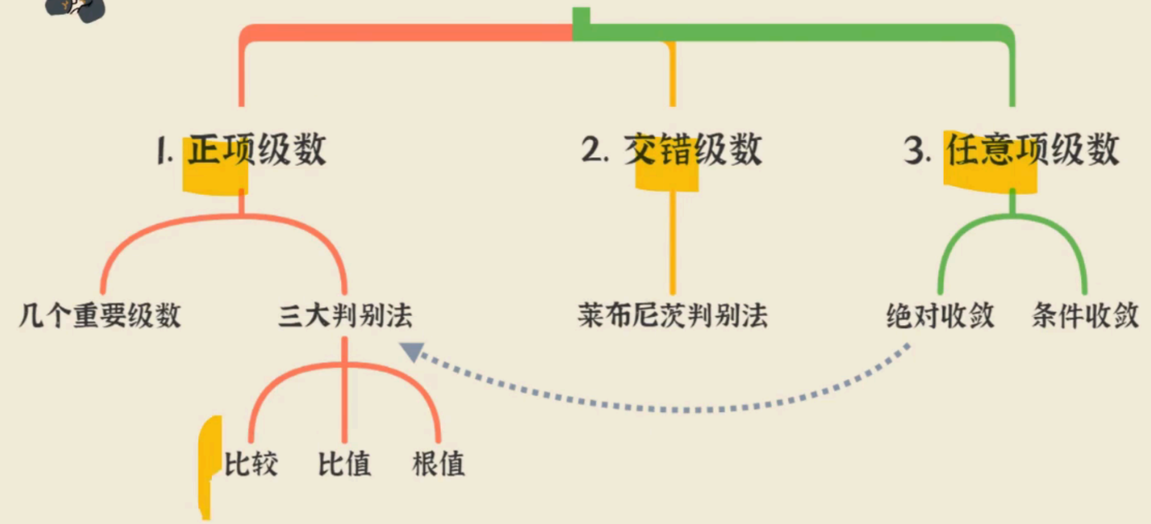
● 性质 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

● 性质 3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必发散；

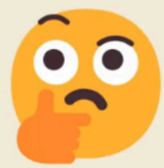
若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则无法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的收敛性.

数项级数敛散性



注：考研大纲在正项级数中增加了"积分判别法"，在记住广义p-级数结论后，此法用处不大。

正项级数敛散性



- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(u_n \geq 0\right)$　　通项非负的级数称为**正项级数**.

- 比较判别法-原版（偶尔用!不好用…）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，若存在 N，当 $n > N$ 时始终有 $u_n \leq v_n$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散.

"大收小必收，小发大必法"

正项级数敛散性

- 比较判别法的极限形式（自留款!巨好用!必考!）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ (v_n > 0)$ 是两个正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $\frac{1}{n^p}$

a. 若 $0 < A < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛散性相同；"同阶"

b. 若 $A = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛； $u_n << v_n$

c. 若 $A = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. $u_n >> v_n$

"只需看 $n\to\infty$ 时 u_n 的等价无穷小！敛散性同！"

正项级数敛散性 "相比"

"= 细节最完整的版本！

- 比值判别法（设 $u_n > 0$）

含$(n!)$，简单 a^n, n^n

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho，\text{则}\begin{cases} \text{当}\rho < 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛；} \\ \text{当}\rho > 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散，且} \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty; \\ \text{当}\rho = 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 敛散性无法判断.} \end{cases}$$

- 根值判别法（设 $u_n > 0$）

复杂 a^n, n^n

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho，\text{则}\begin{cases} \text{当}\rho < 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛；} \\ \text{当}\rho > 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散，且} \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty; \\ \text{当}\rho = 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 敛散性无法判断.} \end{cases}$$

交错级数敛散性

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$　交错级数

u_n不能加0.

$+,-,+,-$　$-,+,-,+$

$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$

$u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{3},\ u_4=\frac{1}{4},\cdots$

- 莱布尼茨判别法(必考!)

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足：

前≥后

① $u_n \ge u_{n+1}$（从某项起），② $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

① $u_n\downarrow$　② $u_n\to 0$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛.

注：u_n是各项去掉正负号后剩下的**正数**.

任意项级数

- $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$　各项为任意实数的级数称为**任意项级数**.

- **绝对收敛**：若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**.

  条件收敛：若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

- **定理**：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛.

一个级数拿到手

任意项级数 → $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$?

- 否,则发散
- 是 → $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 绝对收敛?
  - 否 → 交错级数判别法
  - 正项级数判别法 → 是,则绝对收敛

注：若用比值/根值判别法，$\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

$|u_n| \to +\infty$

典藏例题 4

判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的敛散性（绝对收敛、条件收敛、发散）.

解： $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

$n\to\infty$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛， $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.