Определение 43 (Понятие непрерывности функции).
Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f(U(x_0) \cap E) \subset V(f(x_0))$$

Определение 45 (Понятие точки разрыва).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.

Определение 46 (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.

Определение 47 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Определение 48 (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Определение 46 (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.

Определение 63 (Понятие производной функции).
Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 64 (Понятие дифференцируемости функции).
Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Определение 67.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Предел

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется правосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

Аналогично, предел

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется левосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

Определение 68.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение 69.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Пусть T – множество, $\varphi, \psi : T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad : T \to \mathbb{R}^2.$$

Определение 70 (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \ge f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Определение 72 (Производная высшего порядка).
Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x-\delta, x+\delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

Определение 74 (Дифференциал высшего порядка).
Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$

называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответсвующим приращению h.

Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора).
Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Определение 77 (Классификация точек экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f.

1. Если f дифференцируема в x_0, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

Определение 78 (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

Определение 79 (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f.

Определение 80 (Понятие асимптоты).
Прямая l называется асимптотой графика функции f, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

Определение 81 (Понятие вертикальной асимптоты).
Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) = -\infty$$

Определение 82 (Понятие наклонной асимптоты).
Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

Лемма 33 (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна в x_0.

Лемма 34 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Теорема 26 (Локальные свойства непрерывных функций).
Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.
2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 27 (О непрерывности композиции).
Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 28 (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда:

1. f ограничена на $[a, b]$.
2. f достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений.

Теорема 29 (Первая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Теорема 30 (Вторая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B)\ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Теорема 32 (Критерий непрерывности монотонной функции).
Пусть f – монотонная на $\langle a, b\rangle$ функция. Тогда:

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

Теорема 33 (Об обратной функции).
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f.
3. $f^{-1} \in C(\langle m, M\rangle)$.

Теорема 47 (Кантора).
Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Теорема 48 (О связи производной и дифференцируемости).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

Лемма 60 (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке x_0.

Лемма 61 (Об уравнении касательной).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного).
Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного).
Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема 50 (О производной композиции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Следствие 17 (О дифференциале композиции).
В условиях предыдущей теоремы,

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

Следствие 18 (О дифференциале обратного отображения).
В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

Теорема 53 (О производной функции, заданной параметрически).
Пусть $T = \langle a, b\rangle$, $t \in T$, $\varphi \in C(T)$, φ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi(\varphi^{-1})$ – параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Теорема 54 (Ферма).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 55 (Ролля).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

Теорема 56 (Лагранжа).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теорема 60 (Коши).
Пусть $f, g \in C[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Теорема 61 (Правило Лопиталя).
Пусть f, g дифференцируемы на (a,b), $g'(x) \neq 0$ на (a,b) и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty.$

выполняется

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Теорема 57 (Критерий монотонности функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда:

1. Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на (a,b).
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на (a,b).

Теорема 58 (Критерий постоянства функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Для того чтобы f была постоянной на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a,b).

Теорема 63 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция f в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Теорема 64 (О единственности многочлена Тейлора).
Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

Теорема 68 (О связи монотонности и производной).
Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда справедливы соотношения:

$$f'(x) > 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a,b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a,b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Теорема 74 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$ и дважды дифференцируема на (a,b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на (a,b) ($f''(x) \leq 0$ на (a,b)).
2. Если $f''(x) > 0$ на (a,b) ($f''(x) < 0$ на (a,b)), то f строго выпукла вниз (вверх).

Теорема 76 (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).
Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b_{\pm\infty}.$$