数项级数

§ 1. 引入数项级数理论

在引入任何概念之前，最好先对其进行动机说明。下面我们将讨论几个“锚点”——即那些引发关于无限数量可加项行为以及可能与它们进行的操作的问题的时刻。我们考虑纯粹的“分析”问题，以及初等物理（即均匀运动问题）甚至几何问题。

(1) 启发性思考

让我们从一些我们认为可以启发性地引导我们的例子开始。

例84（分析问题）。

关于序列极限算术性质的定理解决了当可加项的数量有限（且，比如说，所有这些可加项都有极限，定理7）时求和极限的问题。但是，如果随着 n 的增加，可加项的数量无限增长呢？例如，让我们考虑一个我们已经熟悉的例子（例17），并且在级数理论中起着关键作用的序列，

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

它的极限是多少？如果我们尝试应用求和极限的定理，那么由于每个可加项的极限为零，我们可能会说序列 x_n 的极限也是0。但这个假设很容易被推翻，因为很容易验证，

$$x_n \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2},$$

这在 x_n 趋向于零的情况下是不可能的。问题在于，正如你可能已经猜到的那样，随着 n 的增加，可加项的数量也在增加（而且是无限增加！），而序列 x_n 中可加项的数量也是如此。这种无限数量可加项的求和是一个需要单独研究的问题。

现在让我们讨论一个“物理”的例子。

例85（物理问题）。

还有一个来自古希腊哲学家芝诺的悖论，被称为“阿喀琉斯和乌龟”。我们可以这样表述它：假设阿喀琉斯比乌龟快十倍。当阿喀琉斯开始追赶时，乌龟已经在前面了。那么，阿喀琉斯什么时候能追上乌龟呢？每当阿喀琉斯到达乌龟原来的位置时，乌龟又向前走了十分之一的距离。因此，阿喀琉斯必须再走这段距离，而在这段时间里，乌龟又向前走了更短的一段距离，以此类推。这个过程会无限持续下去，阿喀琉斯永远也追不上乌龟。

这显然是荒谬的，因为事实并非如此。让我们用数学符号来表示这个问题。设 S 是阿喀琉斯和乌龟之间的初始距离，v 是乌龟的速度。

阿喀琉斯在时间 $t_1 = \frac{S}{10v}$ 内跑完距离 S。

在这段时间内，乌龟移动到新的位置，距离为

$$S_1 = vt_1 = \frac{S}{10}$$

阿喀琉斯跑完距离 S_1 需要时间 $t_2=\frac{S_1}{10v}=\frac{S}{100v}$，而乌龟在这段时间内移动的距离为

$$S_2=vt_2=\frac{S}{100}$$

很明显，按照这种方式描述的过程不会有一个终点，这意味着阿喀琉斯永远不会追上乌龟，因为它总是存在但不是无穷大，而是无穷小。为什么会这样?

为了回答这个问题，我们需要计算阿喀琉斯追上乌龟所需的确切时间。显然，这个时间等于阿喀琉斯所有部分时间的总和:

$$T=t_1+t_2+t_3+\cdots$$

我们面前的是一个无限数量项的求和。古希腊的争论归结为以下观点：人们认为无限数量正数项的总和总是无穷大。然而，正如我们将看到的，情况并非总是如此。让我们写下给定级数的“和”:

$$T=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n+\cdots=\frac{S}{10v}+\frac{S}{100v}+\frac{S}{1000v}+\cdots+\frac{S}{10^nv}+\cdots=$$

$$=\frac{S}{v}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right).$$

这个和以通常的形式写出来，就是众所周知的几何级数的和，其中公比小于1。因此我们得出结论，

$$T=\frac{S}{v}\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{S}{9v}.$$

这就是由已知 S 和 v 确定的有限值。我们讨论并证明了几何级数的收敛性。

例86（几何问题）。

另一个说明无限数量项求和有意义的例子可以是以下观察。假设我们面前有一个边长为1×1的正方形。显然，它的面积等于1。现在让我们用以下方式“填充”这个正方形：首先从它那里切下一个边长分别为1和0.5、面积为0.5的矩形。接下来，从剩余的矩形中切下一个边长均为0.5、面积为0.5^2的矩形。再从剩下的矩形中切下一个边长分别为0.5和0.5^2、面积为0.5^3的矩形，以此类推。

从几何上显而易见，最终填充的总面积应该等于原始正方形的面积。那么填充的总面积是多少呢？再次，它是无限递减几何级数的和，即:

$$0.5+0.5^2+0.5^3+\cdots+0.5^n+\cdots=\frac{0.5}{1-0.5}=1.$$

(2) 级数的概念及其和

正如我们之前提到的，到目前为止，如果我们考虑的是有限数量项的求和。上面的例子表明，这种做法不能完全令人满意。与此类似，就像我们引入了广义积分一样，我们将引入级数的概念。

定义132（级数的概念）。

设给定一个序列 a_k。符号

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$$

称为具有通项 a_k 的数项级数。

现在我们引入预备概念——级数的部分和。

定义133（部分和的概念）。

具有通项 a_k 的级数的第 n 个部分和是指量

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

因此，部分和是某个有限数量项的和，这些项是从级数“开始”取的。

注释217。

请注意，这样引入的序列 S_n 是正确定义的：它的每个成员都是序列 a_k 中有限数量元素的和。

现在我们引入级数和的概念。

定义134（级数和的概念）。

具有通项 a_k 的级数的和是指极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

如果它在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中存在。

请注意以下注释。

注释218。

感兴趣的读者可能会注意到，我们在上面的几个定义与广义积分理论中的情况有明显的相似之处。在那里，为了“部分和”的存在，我们需要函数的局部可积性。其余的一切都是以类似的方式完成的。

就像在广义积分理论中一样，合理的做法是引入以下定义。

定义135（收敛级数的概念）。

具有通项 a_k 的级数称为收敛的，如果它的和存在于 $\mathbb{R}$ 中。否则，级数称为发散的。

显然，级数收敛当且仅当其部分和序列收敛；而当部分和序列发散时，级数发散。

让我们举一些例子来说明所引入的概念。从最简单的、我们认为是平凡的例子开始。

例87.

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 0$ 收敛，其和显然等于 0。

现在我们给出一个发散级数的例子。

例88.

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ 发散，因为

$$S_n = n, \quad S_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

所写级数的和显然等于 $+\infty$。

现在我们考虑一个没有和的发散级数。

例89.

级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ 发散，因为它的部分和序列定义如下：

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

没有极限。

现在让我们给出一个更实质性的例子，并顺便了解一下为什么无限递减几何级数存在和。

例90（几何级数）。

设 $a \in \mathbb{R}$。我们研究级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k,$$

在后续内容中称为几何级数。

显然，根据（或类比）上面给出的例子，当 $a = \pm 1$ 时，该级数发散。如果 $a \neq \pm 1$，则

$$S_n = a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a(1-a^n)}{1-a}.$$

这个序列只有在 $|a| < 1$ 时才有有限极限。在这种情况下，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-a}.$$

否则，级数发散。

因此，如上所示，“无限和”几何级数仅在公比的绝对值小于1的情况下定义。这就是所谓的“无限递减”级数的情况。再举一个例子。

例91（望远镜求和）。

研究级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

显然，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

这意味着，级数收敛于和为1。

让我们注意一个重要注释。

注释219。

级数通项的编号不仅可以从1开始，还可以从任何 $m \in \mathbb{Z}$ 开始。级数的定义

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots$$

与通项 $a_k, k \geq m$ 类似地给出。

设 $n \geq m$，那么级数的部分和合理地定义为等式

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

其余定义保持不变。

§ 2. 级数的柯西收敛准则

(1) 柯西准则

由于级数的收敛等价于其部分和序列的极限存在，因此很自然地会想到我们熟悉的柯西准则。现在我们将陈述本节的主要定理。

定理127（柯西准则）。

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

证明。 根据定义，级数的收敛性即为其部分和序列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 的收敛性。

根据柯西准则（定理16），这个序列收敛当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon): \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

最后一个不等式等价于 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$。

因此，我们再次面对一个非常著名的断言，它简短但不够精确。相对于级数，它可以更准确地表述为：级数收敛当且仅当对于任意给定的正数 ε，从某个时刻开始，级数的任何“尾巴”都小于 ε。

通常，柯西准则更多用于证明级数的发散性。

注释220。

让我们写出柯西准则的否定形式。

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散当且仅当

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0,\ \exists p \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \geq \varepsilon.$$

现在我们将应用引入的准则来研究一个重要级数——调和级数。

(2) 调和级数的研究

利用柯西准则的否定形式，我们将证明所谓的调和级数发散。

例92（调和级数）。

研究级数（调和级数）

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

在柯西准则中取 $p = n$，并考虑以下变换链：

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

因此，取 $\varepsilon = 0.5$，对于任意预先给定的 n_0，只需取 $n > n_0$ 和 $p = n$，使得和

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

大于 0.5。也就是说，我们落入了柯西准则的否定范围内，所研究的级数发散。

§ 3. 收敛级数的性质

在本节中，我们将讨论收敛级数的一些基本性质。本质上，它们都源于收敛序列的类似性质。

(1) 级数收敛的必要条件

在本点中，我们将确定一个看似直观的事实：收敛级数的通项趋向于零。然而，事实是，如果级数的通项不趋向于零，那么“尾巴”可能有多大呢？让我们以定理的形式记录这个想法。

定理128（级数收敛的必要条件）。

设级数具有通项 a_k 并且收敛。那么

$$a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

证明。 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。由于级数收敛，因此 S_{n-1} 是 S_n 的子序列（定理27）

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}.$$

那么

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0.$$

■

让我们注意几个重要的注释。

注释221。

定理中陈述的否定形式通常并不正确。发散级数的通项可以趋向于零到无穷大，正如我们在调和级数的例子（例92）中看到的那样。

注释221.

定理中陈述的否定形式通常并不正确。发散级数的通项可以趋向于零到无穷大，正如我们在调和级数的例子（例92）中看到的那样。

注释222.

特别需要注意的是，在广义积分理论中没有类似的已证明的事实。可以通过不同的方式来解释这一点。我们通过以下例子来说明：

设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}.$$

根据定理89，很容易理解

$$\int_0^\infty f\,dx = 0,$$

但在无穷远处函数 f 没有极限。无需额外解释，我们可以注意到，在这个例子中，f 可以在 $[0, +\infty)$ 上是连续且正的。

2 级数的残差收敛

现在让我们转向与行相关的另一个对象——行的剩余部分。

定义 136.

设给定一个通项为 a_k 的级数。那么

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

称为该级数的第 m 个余项。

引入这个概念的动机应该是显而易见的，因为对于任意的 $m \in \mathbb{N}$，我们希望写成

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m,$$

其中 S_m 是级数的第 m 个部分和，R_m 是第 m 个余项。当然，这些对象的和的存在性需要在某种程度上加以说明，我们现在就来解决这个问题。

因此，我们陈述关于级数收敛性的余项定理。

引理 82（关于级数收敛性的余项）。

为了使通项为 a_k 的级数收敛，必要且充分条件是它的任何一个余项 R_m 收敛。在这种情况下，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + R_m = S_m + R_m.$$

证明。

显然，当 $n > m$ 时，等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

由于等号右边的第一个求和项是一个不依赖于 n 的数，所以原级数的收敛性等价于余项 R_m 的收敛性。所声明的等式通过直接过渡得到。

注释 223.

实际上，在充分性方面，上述断言可以弱化：为了使原级数收敛，只需某个余项 R_m 收敛即可。由此立即得出任何余项的收敛性。

再记一个有用的断言。

引理 83（关于余项趋于零）。

为了使级数收敛，必要且充分条件是

$$\lim_{m \to \infty} R_m = 0.$$

证明。

1. **证明必要性**。设级数收敛。那么根据前一条引理，

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k=S_m+R_m.$$

因为 $\lim_{m\to\infty} S_m=S$，所以 $\lim_{m\to\infty} R_m=0$。
2. **证明充分性**。设 $\lim_{m\to\infty} R_m=0$。那么对于所有的 m，R_m 都是确定的和有限的，这意味着例如 R_1 收敛。但根据上面的注释，这意味着级数本身也收敛。

这个定理应该直观上很容易理解，它在某种程度上重复了柯西准则：我们取的“尾巴”越短，它就越小。

3线性和单调性求和

在这个部分我们将讨论一些对收敛级数进行的算术运算。请注意，目前可对收敛级数进行的操作列表将非常有限：我们只讨论线性和单调性。其余的性质如结合律或交换律则显得相当“狡猾”，我们将在稍后讨论。

首先从线性的性质开始。

引理 84（关于求和的线性）。

设通项分别为 a_k 和 b_k 的级数收敛。那么对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，通项为 $\alpha a_k+\beta b_k$ 的级数也收敛，并且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

证明。

令

$$S^A=\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\quad S_n^A=\sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$S^B=\sum_{k=1}^{\infty} b_k,\quad S_n^B=\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

那么

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha S_n^A+\beta S_n^B\xrightarrow{n\to\infty}\alpha S^A+\beta S^B,$$

这就证明了断言。

现在我们来讨论求和的单调性性质。

引理 85（关于求和的单调性）。

设 $a_k\le b_k$，且通项分别为 a_k 和 b_k 的级数在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中有和。那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\le\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

证明。

令

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

根据条件，

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^A \leq \lim_{n\to\infty} S_n^B \Rightarrow S^A \leq S^B.$$

□

§ 4. 比较判别法。广义调和级数

(1) 比较判别法

正如在处理反常积分时一样，在讨论级数的收敛性时，我们常常很难直接通过定义来判断。这是因为部分和序列通常难以“压缩”成某种紧凑的形式，从中可以立即看出收敛性或发散性。然而，为了应用数值方法求和级数，了解级数是否收敛非常重要。因此，在这里以及接下来的部分中，我们将学习级数收敛性的判别法。首先，我们将研究具有非负项的级数的收敛性判别法——单调序列的收敛准则。

定理 129（正项级数的收敛准则）。

设 $a_k \geq 0$。那么部分和序列

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

是递增的，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

因此，级数的收敛性等价于其部分和序列的有界性。

证明。

由于 $a_k \geq 0$，则有

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n.$$

因此，关于极限的存在性（和有限性）的问题 S_n 归结为序列 S_n 的有界性问题（魏尔斯特拉斯定理（定理 11））。

现在，类似于在反常积分中所做的那样，我们将证明所谓的比较判别法。

定理 130（比较判别法）。

设 $0 \leq a_k \leq b_k$。那么：

1. 通项为 b_k 的级数收敛，则通项为 a_k 的级数也收敛，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

2. 通项为 a_k 的级数发散，则通项为 b_k 的级数也发散，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

3. 如果当 $k \to +\infty$ 时 $a_k \sim b_k$，则通项分别为 a_k 和 b_k 的级数同时收敛或同时发散。

证明。

1. **证明第一点**。令

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

   显然，在定理的条件下，

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

   由于序列 S_n^A 有界，根据前一个定理，我们得出 S_n^A 具有有限极限。
2. **证明第二点**。反证法，如果通项为 b_k 的级数收敛，那么根据已证明的第一点，通项为 a_k 的级数也收敛。这与条件矛盾。
3. **证明第三点**。因为当 $k \to +\infty$ 时 $a_k \sim b_k$，所以存在 $\alpha_k = \frac{a_k}{b_k}$，其中 $\alpha_k \xrightarrow{k\to+\infty} 1$。那么

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2} b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2} b_k.$$

   进一步的讨论类似于积分中相应定理 123 的类似推理，并作为练习留待读者完成。

对所获得的结果进行评论。

注释 224.

所陈述的定理，正如我们所认为的，应该是直观上可以理解的：

1. 第一点断言，如果一个级数收敛，其项更大，则包含项更小的级数也收敛。
2. 第二点断言，如果一个级数发散，其项更小，则包含项更大的级数也发散。
3. 第三点说明，如果当 k 较大时通项以“相似的方式”表现，并且具有这些通项的级数也以相同的方式表现：要么两个级数都收敛，要么两个级数都发散。

现在让我们将已证明的定理应用于研究一个“标准”的级数——广义调和级数或狄利克雷级数。

(2) 广义调和级数

在讨论反常积分时，特别重要的角色是函数 $1/x^{\alpha}$ 的积分（最终关于无限区间）。在级数理论中，有一个自然的类比——通项为 $1/k^{\alpha}$ 的级数。我们将研究它的收敛性问题。

示例 93（广义调和级数或狄利克雷级数）。

研究级数（广义调和级数，狄利克雷级数）的收敛性：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

正如我们已经知道的，当 $\alpha = 1$ 时，所考虑的级数是调和级数（示例 92），这意味着它是发散的。由于当 $\alpha < 1$ 时满足不等式

$$\frac{1}{k^{\alpha}} \geq \frac{1}{k},$$

因此根据比较判别法定理 130，当 $\alpha < 1$ 时所考虑的级数发散。

假设 $\alpha > 1$，在区间 $[n, n+1]$ 上，$n \in \mathbb{N}$，考虑函数 $x^{1-\alpha}$。根据拉格朗日定理 (56)，

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{\xi^{\alpha}}, \quad \xi \in (n, n+1).$$

那么，

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\xi^{\alpha}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

对 $n \in \{1, \ldots, k\}$ 进行求和，得到

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

由于

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

因此根据比较判别法定理 130，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

收敛，这意味着我们研究的级数也收敛。综上所述，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \iff \begin{cases} \text{收敛}, & \alpha > 1 \\ \text{发散}, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

§ 5. 柯西和达朗贝尔判别法

我们之前学习的比较判别法在我们知道要与什么进行比较时非常方便。然而，在实际应用中，这种理解往往缺乏。因此，在本节中我们将讨论特殊的判别法——柯西和达朗贝尔判别法。这些判别法允许我们将所考虑的级数与几何级数（示例 90）进行比较，而无需直接进行比较。

(1) 柯西根值判别法

让我们从讨论柯西根值（或根值）判别法开始。它的思想相当简单：如果当 n 较大时通项 $a_n \geq 0$ 的行为类似于某个常数 q，即

$$\sqrt[n]{a_n} \sim q, \quad n \to \infty.$$

这个观察是正确的，尽管以稍微复杂的形式呈现，我们将证明这一点。

定理 131（柯西根值判别法）。

设 $a_k > 0$ 并且

$$\varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

那么：

1. 如果 $l > 1$，则通项为 a_k 的级数发散。
2. 如果 $l < 1$，则通项为 a_k 的级数收敛。

证明。

1. **证明第一点**。由于上极限是一个部分极限（引理 29），可以找到一个子序列 a_{k_m}，使得

   $$\lim_{m \to \infty} \sqrt[k_m]{a_{k_m}} = l.$$

   因为 $l > 1$，所以从某个编号 n_0 开始，

   $$\sqrt[k_m]{a_{k_m}} > 1 \Rightarrow a_{k_m} > 1.$$

   这意味着 a_{k_m} 不趋于零，不满足级数收敛的必要条件（定理 128），因此通项为 a_k 的级数发散。
2. **证明第二点**。令 $\varepsilon = (1-l)/2$。根据上极限的性质，

   $$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1.$$

   实际上，否则我们可以从序列 $\sqrt[k]{a_k}$ 中提取一个子序列，其所有项都大于 $(l+1)/2$，这意味着其上极限至少为 $(l+1)/2 > l$，这与条件矛盾。从得到的不等式得出，当 $k > k_0$ 时，

   $$a_k < \left(\frac{l+1}{2}\right)^k.$$

由于级数

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{l+1}{2}\right)^k$$

作为公比小于 1 的几何级数收敛（示例 90），根据比较判别法（定理 130），级数

$$R_{k_0}=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}a_k$$

也收敛，这意味着（定理 82）原级数收敛。

再次注意到，正如从证明中可见，柯西根值判别法——一个与几何级数比较的复杂化版本。现在我们单独列出几个重要的注释。

注释 225.

当

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=1,$$

时，关于级数的收敛性问题仍然是开放的。实际上，对于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\quad 和 \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

对应的极限等于 1（定理 14），但第一个级数发散，而第二个级数收敛（示例 93）。这个结果不应令人惊讶，因为幂函数的增长速度越慢，其行为就越接近于可积函数，并且只有当 $q=1$ 时才可能与公比为 q 的几何级数进行比较。

注释 226.

如在柯西根值判别法第一点的证明中所示，在 $l>1$ 的情况下，通项 a_k 不趋于零，因此不满足级数收敛的必要条件（定理 128）。此外，如果已知

$$1<l=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k},$$

则容易证明（基于同一证明），当 $k\to\infty$ 时，

$$a_k\to+\infty.$$

②达朗贝尔准则

几何级数的另一个特征在于，相邻项的比值等于该级数的公比。正是基于这一性质，我们引入并使用了达朗贝尔准则。

定理 132（达朗贝尔准则）.

设 $a_k>0$ 并且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=l\in[0,+\infty].$$

那么：

1. 如果 $l > 1$，则通项为 a_k 的级数发散。
2. 如果 $l < 1$，则通项为 a_k 的级数收敛。

证明

1. **证明第一点。** 因为 $l > 1$，所以当 $k > k_0$ 时，有不等式

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_k \geq a_{k_0+1} > 0,$$

   由此得出 a_k 不趋向于零。这与级数收敛的必要条件（定理 128）相矛盾。
2. **证明第二点。** 设 $\varepsilon = (1-l)/2$。根据极限定义，存在 k_0，使得当 $k > k_0$ 时，

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

   即

$$a_{k+1} < \left(\frac{l+1}{2}\right) a_k.$$

通过归纳法，当 $k > k_0$ 时，我们有

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}.$$

由于级数

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1}$$

作为公比小于 1 的几何级数（例 90）是收敛的，因此根据比较准则（定理 130），级数

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$$

也是收敛的，这意味着原级数收敛。

证毕。

再次注意，从证明中可以看出，柯西准则实际上是与几何级数进行比较的可视化准则。现在我们单独列出几个重要的注释。

证明

1. **证明第一点。** 因为 $l > 1$，所以当 $k > k_0$ 时，有不等式

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_k \geq a_{k_0+1} > 0,$$

由此得出 a_k 不趋向于零。这与级数收敛的必要条件（定理 128）相矛盾。

2. **证明第二点。** 设 $\varepsilon = (1-l)/2$。根据极限定义，存在 k_0，使得当 $k > k_0$ 时，

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

即

$$a_{k+1} < \left(\frac{l+1}{2}\right) a_k.$$

通过归纳法，当 $k > k_0$ 时，我们有

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}.$$

由于级数

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1}$$

作为公比小于 1 的几何级数（例 90）是收敛的，因此根据比较准则（定理 130），级数

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$$

也是收敛的，这意味着原级数收敛。

证毕。

再次注意，从证明中可以看出，柯西准则实际上是与几何级数进行比较的可视化准则。现在我们单独列出几个重要的注释。

注释 227

在以下情况下，

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$

级数的收敛性问题仍然悬而未决。实际上，对于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

第一个级数发散（例 93），而第二个级数收敛。因此，这个结果不应令人惊讶。

注释 228

如达朗贝尔准则第一点的证明所示，在 $l > 1$ 的情况下，级数的通项 a_k 不趋向于零，即不满足级数收敛的必要条件（定理 128）。同样，在这种情况下很容易证明 $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$。

③进一步的讨论和推广

本节主要面向感兴趣的读者，可能不会进入课程的主要教学计划。然而，剥夺读者即使只是大致了解一些自然产生的问题的机会，我们认为是不明智的。

需要注意的是，我们之前讨论的准则允许直观地比较所考虑的级数与几何级数的行为。自然而然地，会产生以下问题：是否也可以直观地比较所考虑的级数与广义调和级数的行为？例如，拉贝准则就是为此目的而设的。

定理 133（拉贝准则）

设 $a_k > 0$ 并且

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = l \in \mathbb{R}.$$

那么：

1. 如果 $l > 1$，则通项为 a_k 的级数收敛。
2. 如果 $l < 1$，则通项为 a_k 的级数发散。

这个准则的证明与达朗贝尔准则的证明差别不大。更重要的是，从以下方案可以看出，拉贝准则是直接从达朗贝尔准则推导出来的，该方案允许“生成”无数个级数收敛性的准则。

定理 134（库默尔方案）

设 $a_k, b_k > 0$，并且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

发散。此外，

$$\lim_{k\to\infty} \left(b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1}\right) = l \in \mathbb{R}.$$

那么：

1. 如果 $l > 0$，则通项为 a_k 的级数收敛。
2. 如果 $l < 0$，则通项为 a_k 的级数发散。

证明

1. **证明第一点。** 因为 $l > 0$，所以存在 k_0，使得当 $k > k_0$ 时，

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} > \frac{l}{2} a_{k+1} > 0.$$

特别地，$a_k b_k > a_{k+1} b_{k+1}$，这意味着序列 $a_k b_k$ 在 $k > k_0$ 时单调递减。此外，该序列有下界，例如零，因此它具有极限（定理 11），设为 A。那么

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k_0+1}^{k} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (a_{k_0+1} b_{k_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) = a_{k_0+1} b_{k_0+1} - A < +\infty.$$

这意味着（定理 130）级数 $\sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛，因此通项为 a_n 的级数也收敛（定理 82）。

2. **证明第二点。** 设 $l < 0$。那么存在 k_0，使得当 $k > k_0$ 时，

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} < 0 \Rightarrow b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} < 0.$$

由此得出 $b_{k+1} a_{k+1} > b_k a_k$，即序列 $b_k a_k$ 在 $k > k_0$ 时单调递增。这意味着

$$a_k b_k \geq a_{k_0+1} b_{k_0+1} \Rightarrow a_k \geq \frac{a_{k_0+1} b_{k_0+1}}{b_k},$$

因此根据比较准则（定理 130），级数 $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ 发散。

证毕。

注释 229

达朗贝尔和拉贝准则是从库默尔方案中得到的，如果分别取 $b_k = 1$ 和 $b_k = k$。这正是几何级数（$a_k = 1^k$）和广义调和级数（$a_k = 1/k$）的“边界情况”。

值得注意的是，在证明第二点对应的定理时，仅使用了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ 发散这一事实，该定理确定了通项为 a_k 的级数发散。

定理 135

设 $a_k > 0$，且 $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$。

1. 如果通项为 a_k 的级数发散，则存在序列 b_k，使得 $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$，并且通项为 $a_k b_k$ 的级数也发散。
2. 如果通项为 a_k 的级数收敛，则存在序列 b_k，使得 $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$，并且通项为 $a_k b_k$ 的级数也收敛。

证明

1. **证明第一点。** 设

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}}, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad S_0 = 0.$$

那么

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

显然，具有该通项的级数发散，因为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}) = \sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

2. **证明第二点。** 设

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}}, \quad R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i.$$

那么

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq$$

$$\leq 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}).$$

显然，通项为 $(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})$ 的级数收敛，因为

$$\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{R_0},$$

因此根据比较准则（定理 130），所需的级数收敛。

证毕。

§6. 柯西积分准则

在本节中，我们将学习另一种判断正项级数收敛性的准则——柯西积分准则，并了解一些利用该准则研究渐近行为的方法。

(1) 柯西积分准则

我们直接给出相应定理的表述。

定理 136（柯西积分准则）。

设 $f \in R_{\text{loc}}[1, \infty)$ 并且在 $[1, +\infty)$ 上单调递减。那么通项为 $f(k)$ 的级数收敛当且仅当积分

$$\int_1^\infty f\,dx$$

收敛。

证明

假设 f 单调递减。那么，如果 $f(x_0) < 0$，由于单调性，在 $x > x_0$ 时有不等式 $f(x) \leq f(x_0) < 0$，这意味着 $f(k)$ 不趋向于零，因此通项为 $f(k)$ 的级数发散。此外，

$$\int_{x_0}^A f\,dx \leq f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} -\infty,$$

这意味着积分也发散。因此，$f(x) \geq 0$。

在这种情况下，考虑到 f 单调递减，显然有以下不等式：

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f\,dx \leq f(k),$$

这导致不等式

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f\,dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

注意到函数

$$F(\omega) = \int_1^\omega f\,dx$$

是递增的，为了存在极限 $\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega)$，只需（当然也是必要的）存在极限 $\lim_{n \to \infty} F(n+1)$（请证明这一点！）。然后通过令 $n \to \infty$ 的极限过渡和类似于比较准则第三点证明中的讨论（定理 130），可以轻松获得定理的结论。

证毕。

注释 230

要求 $f \in R_{\text{loc}}[1, \infty)$ 在 f 单调的情况下是多余的。然而，我们将其引入，因为这样的定理尚未被证明。

示例 94

研究级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

仅利用已证明的准则，可以得出结论：该级数的收敛性等价于积分

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

的收敛性。

现在很容易得出已知结论：广义调和级数在 $\alpha > 1$ 时收敛，在 $\alpha \leq 1$ 时发散。

(2) 调和级数的渐近行为

分析中的一个基本任务是研究某个或某些量的渐近行为。在柯西积分准则的证明中使用的思想，常用于研究不同求和的渐近行为，特别是在估计它们的增长速度（变化）时。

引理 86

设 f 非负、在 $[1, +\infty)$ 上单调递减且 $f \in R_{\text{loc}}[1, +\infty)$。那么序列

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f\,dx$$

有极限。

证明

我们将证明 A_n 是递增的。实际上，

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f\,dx \geq 0.$$

接下来证明 A_n 有上界。为此，我们进行以下变换：

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f\,dx.$$

证明的继续

由于

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

根据柯西积分准则证明中得到的不等式，

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f\,dx \le 0,$$

从而得出

$$A_n \le f(1) - f(n+1) \le f(1).$$

接下来，我们可以引用魏尔斯特拉斯定理（定理 11）。

注释 231

关于寻找渐近行为，已证明的引理可以这样使用。设 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f\,dx = A + \alpha_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f\,dx + A + \alpha_n,$$

其中 $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。特别有趣的情况是当左边的级数发散时。这时（当 $n \to \infty$ 时）

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^{n+1} f\,dx.$$

我们给出一个例子。

示例 95

考虑调和级数并找到其部分和的渐近行为。显然，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n.$$

注释 232

由此可见，“量化”调和级数的发散性是一个非常复杂的问题。例如，如果取 10^6（百万）项，则部分和大约等于整个序列的总和

$$S_{10^6} \approx \ln 10^6 = 6 \ln 10 \approx 13.8.$$

取 10^9（十亿）项，部分和的增加将远小于项的数量：

$$S_{10^9} \approx \ln 10^9 = 9 \ln 10 \approx 20.7.$$

这个例子再次表明了对级数收敛性问题进行分析回答的重要性。

等式中的常数 A

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n$$

被称为欧拉常数，并且通常用 γ 表示。其值大约为 0.577。

§7. 绝对收敛与条件收敛

类似于我们在广义积分理论中的处理方式，我们将研究具有任意符号项的级数，以及在这种情况下出现的新类型的收敛性。

(1) 绝对收敛与条件收敛的概念

我们从熟悉的定义开始。

定义 137（绝对收敛的概念）。

如果通项为 a_k 的级数收敛，则称该级数绝对收敛，当且仅当通项为 $|a_k|$ 的级数收敛。

正如在广义积分的情况下，以下定理成立。

定理 137（关于绝对收敛级数的收敛性）。

如果通项为 a_k 的级数绝对收敛，则它收敛。

证明

利用柯西准则（定理 127）。设 $\varepsilon > 0$，则存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$，

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

同时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

因此根据柯西准则（定理 127），通项为 a_k 的级数收敛。

证毕。

显然，在研究级数的绝对收敛性时，可以使用之前学习过的各种判别法。

示例 96

研究级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}.$$

由于

$$\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2},$$

而通项为 $\frac{1}{k^2}$ 的级数收敛（例 93），因此根据比较准则（定理 130）和已证明的定理 137，原级数绝对收敛。

现在我们引入条件收敛的概念。

定义 138（条件收敛的概念）

如果通项为 a_k 的级数收敛，但不绝对收敛，则称该级数条件收敛。

研究级数的收敛性通常比研究积分的收敛性复杂得多。这主要是因为我们很难用“方便的形式”表示某个或某些和。因此，在给出一个条件收敛级数的例子之前，我们先证明莱布尼茨准则——交错级数的收敛性判别法。

定理 138（莱布尼茨准则）。

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

其中 $a_k \ge 0$ 且 a_k 单调递减趋于零，是收敛的。

证明

考虑部分和序列 S_{2n} 的子序列。通过分组，我们得到

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

这里不等式成立是因为括号内的每一项都是非负的（由于 a_k 单调递减）。因此，子序列 S_{2n} 是递增的。此外，

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

因此 S_{2n} 有上界。根据魏尔斯特拉斯定理（定理 11），子序列 S_{2n} 有极限，设为 S。那么

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S,$$

因为通项趋于零。现在设 $\varepsilon > 0$，则存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，

$$|S_{2n} - S| < \varepsilon,$$

存在 n_1，使得对于所有 $n > n_1$，

$$|S_{2n-1} - S| < \varepsilon.$$

如果 $k > \max(2n_0, 2n_1 - 1)$，那么 $k = 2n$ 且 $n > n_0$，或者 $k = 2n - 1$ 且 $n > n_1$，这意味着

$$|S_k - S| < \varepsilon,$$

这证明了所考虑级数的收敛性。

证毕。

通项形式符合莱布尼茨准则条件的级数，常被称为莱布尼茨型级数。

现在我们可以给出一个条件收敛级数的例子。

示例 97

我们来研究级数的收敛性并找到其和：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

显然，该级数不绝对收敛。然而，根据莱布尼茨准则（定理 138），它是收敛的，这意味着它条件收敛。接下来我们找出它的和。

为此，考虑偶数项的部分和：

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=H_{2n}-H_n,$$

其中

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

是调和级数的第 n 个部分和。根据例 95，

$$H_n=\ln(n+1)+\gamma+\alpha_n=\ln n+\gamma+\bar{\alpha}_n,\quad \alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\quad \bar{\alpha}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

因此

$$S_{2n}=H_{2n}-H_n=\ln(2n)+\gamma+\bar{\alpha}_{2n}-\ln n-\gamma-\bar{\alpha}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln 2.$$

由于通项趋于零，可以理解 $S_{2n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln 2$。通过类似于莱布尼茨准则证明中的推理，得出所考虑的级数条件收敛于和 $\ln 2$。

注释 233

如在莱布尼茨准则的证明中所示，

$$0\le S_{2n}\le a_1.$$

这意味着 $0\le S\le a_1$。

上述注释可以更通用地表述为以下引理。

引理 87（关于莱布尼茨型级数的余项）。

设考虑的是级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,$$

其中 $a_k \geq 0$ 且 a_k 单调递减趋于零。那么

$$|R_n| \leq a_{n+1}, \quad R_n(-1)^n \geq 0.$$

证明

为了证明引理，只需注意到莱布尼茨型级数的余项——在莱布尼茨型级数符号的意义上——与第一个被舍弃项的模相比不超过它。此外，余项与第一个被舍弃项的符号相同。

证毕。

(2) 关于绝对收敛和条件收敛级数性质的一些讨论

在本节中，我们将展示我们对数字进行的操作并不总是可以应用于级数。我们仅通过示例和一般注释来说明这一点。

从以下示例开始。显然，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

发散。另一方面，如果这样分组：

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

那么得到的“分组”级数收敛到和为 0。如果这样分组：

$$-1+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

那么得到的“分组”级数收敛到和为 -1。显然，还可以得到其他结果。考虑以下一个玩笑的例子。

示例 98

“证明”

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots=-\frac{1}{12}.$$

设所求和等于 $S \in \mathbb{R}$。那么

$$-3S = S-4S = (1+2+3+\ldots)-4(1+2+3+\ldots) = (1+2+3+\ldots)-2(2+4+6+\ldots) =$$

$$= 1-2+3-4+\ldots = 1-(2-3+4-\ldots) = 1-((1-2)+(3-4)+\ldots)-((1-1)+(1-1)+\ldots).$$

由于（例 90）

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots = \frac{1}{1+a},$$

因此，（不合法地）代入 $a = 1$，我们得到

$$(1-1) + (1-1) + \ldots = \frac{1}{2},$$

从而

$$-3S = 1 + 3S - \frac{1}{2} \Rightarrow S = -\frac{1}{12}.$$

事实证明，即使对于收敛级数，也不能总是进行常规的算术运算。考虑以下示例。

示例 99

考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

这个级数的和我们已经知道（例 97），它等于 $\ln 2$。现在我们交换级数项的位置，并研究以下级数：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

考虑新级数的部分和，编号为 $3n$ 的部分和：

$$\bar{S}_{3n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n},$$

其中

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2,$$

我们得到

$$\bar{S}_{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ln 2}{2}.$$

容易理解，$\bar{S}_{3n+1}$ 和 $\bar{S}_{3n+2}$ 具有相同的极限，这意味着可以断言（类似于莱布尼茨准则证明中的推理），所考虑的重新排列后的级数的和等于 $0.5\ln 2$。因此，在重新排列项后，级数的和改变了。

注释 234

可以证明，通项为 a_k 的级数绝对收敛的特征是：由仅包含非负项 a_k^+ 和仅包含非正项 a_k^- 组成的级数分别收敛，其中

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geq 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad a_k^- = \begin{cases} a_k, & a_k \leq 0 \\ 0, & a_k > 0 \end{cases}.$$

在条件收敛的情况下，原级数的项必然发散。因此，绝对收敛意味着总项以足够快的速度单调趋于零，而条件收敛则意味着正项和负项之间的“补偿”。这正是为什么在重新排列项后，级数的和可能会完全不同。

函数级数

§1. 函数序列与函数级数

在本节中，我们将讨论函数序列和函数级数的逐点收敛性和一致收敛性的概念。

(1) 函数序列与函数级数的概念

函数级数的概念与函数序列的概念紧密相关，我们从定义函数序列开始。

定义 139（函数序列的概念）。

序列 $f_k : X \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$，称为函数序列。

请注意，现在序列中的每个元素都是定义在某个集合 X 上的函数。

示例 100。

考虑函数序列 $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。显然，

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3,$$

以此类推。

有了函数序列，自然会想到如何定义函数级数。

定义 140（函数级数的概念）。

设给定一个函数序列 $f_k : X \to \mathbb{R}$。符号

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots$$

称为通项为 f_k 的函数级数。

我们给出一个例子。

示例 101。

考虑通项为 $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数序列。那么，通项为 f_k 的函数级数是形式为

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots$$

的符号。

在最后一个级数中，类似于几何级数的和（示例 90）是有用的。思考一下如何确定这个级数的和，以及一般情况下函数级数的和是什么。我们如何过渡到解释这个概念呢？

(2) 函数序列与函数级数的逐点收敛性

我们引入一个看似引导性的概念，即函数序列的逐点收敛性。

定义 141（函数序列的逐点收敛性）。

如果对于集合 $D \subset X$ 中的每个 x，存在极限

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) \in \mathbb{R},$$

则称函数序列 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 在集合 D 上逐点收敛（或简称为收敛）。

此时，集合 D 称为函数序列 f_k 的逐点收敛域。

因此，这个定义是自然的：取一个点，将其代入（函数）序列中，然后判断得到的（数值）序列是否收敛。显然，从一点到另一点所写的极限可能会改变。我们在以下注释中确认这一点。

注释 235

在逐点收敛域 D 上出现了一个函数

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x),\quad x\in D.$$

这个函数被称为函数序列 f_k 在集合 D 上的极限（或逐点极限）。

现在给出一个例子。

示例 102

考虑我们已经熟悉的函数序列 $f_k(x)=x^k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。显然，

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,1),\\ 1, & x=1\end{cases},$$

而在其他情况下没有收敛性。

现在，类比我们在数列理论中的做法，引入函数级数的部分和与和的概念。

定义 142（函数级数的部分和）。

通项为 $f_k:X\to\mathbb{R}$ 的函数级数的第 n 个部分和是指量

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k.$$

最后，我们引入函数级数的收敛性概念。

定义 143（函数级数的收敛性）

如果对于集合 $D\subset X$ 中的每个 x，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

收敛，则称通项为 $f_k:X\to\mathbb{R}$ 的函数级数在集合 D 上逐点收敛（或简称为收敛）。

此时，集合 D 称为通项为 f_k 的函数级数的（逐点）收敛域。

我们再次强调所给定义的自然性。实际上，我们将每个考虑的点 x 代入函数序列 f_k 中，并研究通项为 $f_k(x)$ 的（数值）级数。当且仅当该级数收敛时，通项为 f_k 的函数级数才被称为在点 x 处收敛。现在我们陈述以下显而易见的注释，它将函数级数的收敛性和函数序列的收敛性联系起来。

注释 236

通项为 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 的函数级数在集合 $D \subset X$ 上的收敛意味着函数序列 S_n （该级数的部分和）在这个集合上的收敛，即

$$\forall x \in D \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_n(x) \in \mathbb{R}.$$

现在给出一个例子。

示例 103

设 $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。容易理解，函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

的收敛域是集合 $(-1, 1)$。在这个集合上，所考虑的级数绝对收敛。

确定了函数序列的极限（函数级数的和），自然而然地会引发关于极限函数（函数级数的和）的性质的问题：连续性、可微性、可积性。下面的例子表明，逐点收敛性通常不保留上述性质。

示例 104

设 $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。尽管 $f_k \in C(\mathbb{R})$，但所考虑的序列仅在 $x \in (-1, 1]$ 时收敛，其极限是一个分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

设

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

这个序列收敛到函数 $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$。然而，其导数

$$f_k'(x) = \cos kx, \quad x \in \mathbb{R},$$

从不收敛到零。

现在设

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + \frac{1}{k}}, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

根据定理 91，容易理解序列的所有项在 $[0, 1]$ 上都是可积的，但极限函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

由于无界性，在 $[0,1]$ 上不可积。

因此，我们引入一种更严格的收敛类型——一致收敛性，它允许将序列项的性质扩展到极限函数上。

(3) 函数序列与函数级数的一致收敛性

现在我们直接从定义开始。

定义 144（函数序列的一致收敛性）。

如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k>k_0$ 和所有 $x\in D$，有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数序列 $f_k: X\to\mathbb{R}$ 在集合 $D\subset X$ 上一致收敛到函数 f。

这记作：

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{D} f.$$

将这个定义与之前引入的逐点收敛性的定义进行比较是有益的。

注释 237

让我们明确写出函数序列 f_k 在集合 D 上逐点收敛到 f 的定义，并解释引入的定义之间的区别。因此，逐点收敛性的定义可以写成如下形式：

$$\forall x\in D\ \forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}:\ \forall k>k_0\ |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

一致收敛性的定义可以写成如下形式：

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}:\ \forall k>k_0\ \forall x\in D\ |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

可以看出，这个定义与逐点收敛性的定义不同之处在于，在逐点收敛性的情况下，找到的 n_0 通常依赖于 x，而在一致收敛性中，n_0 对所有 x 都是相同的。这种区别应该已经熟悉：它在概念上与函数的连续性和一致连续性之间的区别相吻合。

接下来是一个显而易见的注释。

注释 238

从上面的讨论中可以清楚地看出，如果函数序列 f_k 在集合 D 上一致收敛到 f，那么它在 D 上也逐点收敛。因此，极限函数可以作为函数序列的逐点极限来理解，并进一步研究其性质。

现在我们给出几个例子。首先考虑一个一致收敛的函数序列的例子。

示例 105

考虑函数序列

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, \quad D = \mathbb{R},$$

它在集合 D 上一致收敛（到零）。证明这一点。设 $\varepsilon > 0$，则有

$$\left| \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon \Rightarrow k > \frac{1}{\varepsilon}.$$

取

$$k_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right],$$

就得到了一致收敛性的定义。

现在我们来看一个不一致收敛的函数序列的例子。

示例 106

证明函数序列 $f_k(x) = x^k$ 在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛到函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

写出该序列一致收敛的否定：

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \ \forall k_0 \in \mathbb{N} \ \exists k > k_0 \ \exists x \in D : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

取 $k \in \mathbb{N}$，令

$$x_k = 1 - \frac{1}{k}.$$

显然，$f(x_k) = 0$。同时，

$$f_k(x_k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k \to \infty]{} e^{-1},$$

这意味着一致收敛性不存在。因此，逐点收敛性通常不会导致一致收敛性。

现在我们将一致收敛性的概念扩展到级数上。

定义 145（一致收敛级数的概念）。

如果通项为 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 的函数级数的部分和序列在集合 $D \subset X$ 上一致收敛，则称该级数在 D 上一致收敛。

给出以下等价的一致收敛性定义。

注释 239

用 $\varepsilon - \delta$ 语言，上述断言可以写成：

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \, \forall k > k_0 \, \forall x \in D \, |S_k(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

最后一个不等式可以重写为：

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

量

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k,$$

如前所述，称为（函数）级数的第 n 个余项。因此，在 D 上的一致收敛性意味着

$$R_n \xrightarrow[n \to \infty]{D} 0.$$

“直接”检查级数的一致收敛性是可能的，但会带来相当大的技术困难。我们把例子留到下一节，在那里我们将获得一些稍微方便的一致收敛性准则，这些准则可能会使我们的任务变得轻松一些。

§2. 柯西准则与魏尔斯特拉斯判别法

在本节中，我们将讨论自然出现的一致收敛性准则和判别法。然而，我们先从柯西准则开始。

(1) 柯西准则

现在我们来看柯西准则。

定理 139（函数序列一致收敛的柯西准则）。

为了使函数序列 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 在集合 $D \subset X$ 上一致收敛，必要且充分条件是：

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \, \forall k > k_0 \, \forall p \in \mathbb{N} \, \forall x \in D \, |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

证明：

首先证明必要性。设 $\varepsilon > 0$。由于 f_k 一致收敛到某个函数 f，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k > k_0$ 和所有 $x \in D$，有

$$|f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $p \in \mathbb{N}$，则 $k + p > k_0$，根据三角不等式，

$$|f_{k+p} - f_k| \leq |f_{k+p} - f| + |f - f_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

接下来证明充分性。条件

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \ \forall k > k_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

保证了对于每个 $x \in D$，数值序列是基本序列，即（根据定理 16）收敛。令

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

设 $\varepsilon > 0$。根据条件，可以找到 k_0，使得当 $k > k_0$ 且 $p \in \mathbb{N}$ 时，

$$\forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

当 $p \to \infty$ 时取极限，得到

$$\forall x \in D \ |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

从而得出所需结论。

需要注意的是，柯西准则总体上是标准的：一致收敛意味着任意两个足够远的序列项之间的距离（同时对所有 (x \)）保持接近，反之亦然。

既然级数的一致收敛性就是其部分和序列的一致收敛性，那么以下定理成立。

定理 140（函数级数一致收敛的柯西准则）

通项为 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 的级数在集合 $D \subset X$ 上一致收敛当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

证明：

证明直接来自前一个定理，因为级数的一致收敛性就是其部分和序列的一致收敛性。

从柯西准则中，我们很容易得到所谓的一致收敛性的必要条件。

定理 141（一致收敛性的必要条件）

如果通项为 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 的级数在集合 $D \subset X$ 上一致收敛，则

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{D} 0.$$

证明：

证明立即得出，如果在柯西准则中取 $p = 1$。

需要注意的是，一致收敛性的必要条件"复制"了级数收敛性的必要条件，并以自然的方式区分了一致收敛性和（通项）趋于零的级数。

示例 107

通项为 $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的级数在区间 $[0, 1]$ 上不一致收敛到零，因为 f_k 不一致收敛到零。事实上，正如我们在示例 106 中已经看到的，

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1} \neq 0.$$

(2) 魏尔斯特拉斯判别法

现在我们来阐述魏尔斯特拉斯判别法——一致收敛性的判别法。

定理 142（魏尔斯特拉斯判别法）

设 $f_k : X \to \mathbb{R}, D \subset X$。如果存在序列 a_k，使得

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in D,$$

并且通项为 a_k 的级数收敛，则通项为 f_k 的函数级数在 D 上一致收敛（且绝对收敛）。

证明

设 $\varepsilon > 0$。利用柯西准则（定理 127）并考虑到 a_k 的非负性，我们有

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

同时，

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

对所有 $x \in D$ 都成立。因此，利用级数一致收敛的柯西准则（定理 140）以及绝对收敛性的定义，我们得到所需结论。

现在我们来看一个例子。

示例 108

研究级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \quad D = \mathbb{R},$$

的一致收敛性。

由于对于 $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2},$$

且通项为 $1/k^2$ 的级数收敛，根据魏尔斯特拉斯判别法（定理 142），可以得出所考虑的级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛（且绝对收敛）。

为了防止误解绝对收敛性和一致收敛性之间的关系，我们给出以下注释。

注释 240

存在一些级数，它们绝对收敛但不一致收敛，或者一致收敛但不绝对收敛。例如，绝对收敛但不一致收敛的级数（示例 107）是

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in [0,1).$$

一致收敛但不绝对收敛的级数的例子（示例 99）是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

显然，如果数值级数收敛，则它在任何集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛。

此外，存在一些绝对收敛且一致收敛的级数，其模级数不一致收敛（即不能应用魏尔斯特拉斯判别法）。我们不提供这类级数的例子。

§3. 一致收敛性的性质

在讨论逐点收敛性时，我们遇到了一系列问题，粗略地说，这些问题可以归结为以下几点：逐点收敛性通常不保留函数的某些重要性质——连续性、可微性和可积性。为了解决这些出现的问题，我们引入了一种新的收敛类型——一致收敛性。然而，直到现在，我们还没有详细探讨这种“轻松生活”的方式。

(1) 两个极限过程的交换

值得注意的是，实际上所有我们提出的问题都可以归结为一个问题：极限过程顺序交换的合法性问题。从现在开始，我们将解决这个问题。

定理 143（关于极限过程的交换）。

设 $f, f_k : D \to \mathbb{R}$，满足：

1. 序列 f_k 在 D 上一致收敛到函数 f。
2. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在极限

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

   其中 x_0 是 D 的极限点。

那么极限

$$\lim_{k \to \infty} a_k \quad \text{和} \quad \lim_{x \to x_0} f(x)$$

都存在（在 $\mathbb{R}$ 中）且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

证明：

设 $\varepsilon > 0$。根据柯西准则（定理 139），

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \ \forall k > k_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

当 $x \to x_0$ 时取极限，得到

$$|a_{k+p} - a_k| \leq \varepsilon,$$

这表明序列 a_k 是基本序列，因此（作为其结果）收敛。设其极限为 A。剩下要证明的是

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

设 $\varepsilon > 0$，则由于 D 上的一致收敛性，

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \ \forall k > k_0 \ \forall x \in D \ |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于序列 a_k 收敛到数 A，存在 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$\forall k > k_1 \ |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

设 $m = 1 + \max(k_0, k_1)$，则同时满足对所有 $x \in D$，

$$|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

根据函数极限的定义，

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \ |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，当 $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ 时，我们有

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon,$$

这完成了证明。

由此可见，一致收敛性允许交换两个极限过程的位置。

示例 109

正如之前提到的，仅逐点收敛不足以进行极限过程顺序的交换。实际上，设 $D = [0, 1]$，则

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

但此时

$$\lim_{x \to 1-0} \lim_{k \to \infty} x^k = 0, \quad \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to 1-0} x^k = 1.$$

然而，一致收敛性并不是极限过程顺序交换的必要条件。

类似的结果也适用于级数。

定理 144（关于部分和极限的交换）

设 $f_k : D \to \mathbb{R}$，满足：

1. 通项为 f_k 的级数在 D 上一致收敛到和 S。
2. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在极限

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

其中 x_0 是 D 的极限点。

那么通项为 a_k 的级数收敛到和 A，且

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x).$$

证明

为了完成证明，只需将前一个定理应用于所考虑级数的部分和序列。

(2) 极限函数的连续性和级数和的连续性

上述定理解决了极限函数的连续性问题。

定理 145（关于极限函数的连续性）。

设 $f, f_k : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$，满足：

1. 序列 f_k 在 D 上一致收敛到函数 f。
2. 序列的所有项 f_k 在 x_0 处连续。

那么 f 在 x_0 处也连续。特别地，如果序列的所有项 f_k 在 D 上都连续，则 f 在 D 上也连续。

证明：

如果 x_0 是孤立点，则任何函数在其定义域的孤立点处都是连续的（定理 33），因此结论成立。如果 x_0 是极限点，则满足定理 143 关于极限过程顺序交换的条件（其中 $a_k = f_k(x_0)$）。因此，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0),$$

这完成了证明（定理 33）。

类似的结果也适用于级数。

定理 146（关于级数和的连续性）。

设 $f_k : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$，满足：

1. 通项为 f_k 的级数在 D 上一致收敛到和 S。
2. 级数的所有项 f_k 在 x_0 处连续。

那么级数的和 S 在 x_0 处也连续。特别地，如果级数的所有项 f_k 在 D 上都连续，则级数的和 S 在 D 上也连续。

证明：

为了证明这一点，只需将前一个定理应用于所考虑级数的部分和序列。

我们注意到一个标准的注释。

注释 241

在极限函数的连续性和极限过程顺序交换的问题中，同样的注释也适用：逐点收敛通常不足以保持连续性，在这种情况下，一致收敛不是保持连续性的必要条件。

(3) 积分与极限过程

现在我们讨论积分运算与极限过程的可交换性。

定理 147（积分与极限过程）

设 $f_k, f : [a,b] \to \mathbb{R}$，且 $f_k \in C[a,b]$，如果

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} f.$$

那么 $f \in C[a,b]$ 并且

$$\int_a^x f_k \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} \int_a^x f \, dx.$$

证明：

$f \in C[a,b]$ 的结论由定理 145 关于极限函数的连续性得出。现在我们来证明定理的第二部分。设 $\varepsilon > 0$。由于一致收敛性，

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \ \forall k > k_0 \ \forall x \in [a,b] \ |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

设 $k > k_0$，则有

$$\left| \int_a^x f_k \, dx - \int_a^x f \, dx \right| \leq \int_a^x |f_k - f| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

其中最后一个不等式对所有 $x \in [a,b]$ 都成立。这证明了一致收敛性。

显然，类似的结果也适用于级数。

定理 148（关于逐项积分）

设 $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$，且 $f_k \in C[a,b]$。如果通项为 f_k 的级数在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 S，则 $S \in C[a,b]$，并且

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_k \, dx \right), \quad x \in [a,b].$$

证明：

为了证明这一点，只需将前一个定理应用于所考虑级数的部分和序列。

因此，一致收敛性允许交换极限和积分的位置，或者在级数的情况下，逐项积分。

(4) 微分与极限过程

接下来讨论极限函数的可微性问题。在最简单的情况下，可以通过以下定理来解决这个问题。

定理 149（微分与极限过程）

设 $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$，且 $f_k \in C^1[a,b]$。如果：

1. 存在 $x_0 \in [a,b]$，使得序列 $f_k(x_0)$ 收敛。
2. 序列 f_k' 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 g，

$$f_k' \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} g,$$

并且 $f' = g$ 在 $[a,b]$ 上成立。特别地，$f \in C^1[a,b]$。

证明

首先，根据定理 145，我们知道 $g \in C[a,b]$。根据定理 147 关于积分和极限过程，

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_k' \, dx = \int_{x_0}^{x} g \, dx,$$

其中最后的收敛是一致的对所有 $x \in [a,b]$。

同时，根据定理 100，

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_k' \, dx = \lim_{k\to\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int_{x_0}^{x} g \, dx.$$

由于条件中存在极限

$$C = \lim_{k\to\infty} f_k(x_0),$$

因此

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = C + \int_{x_0}^{x} g \, dx,$$

其中最后的收敛也是一致的对所有 $x \in [a,b]$。利用变上限积分的导数定理（定理 99），我们得到

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a,b],$$

这完成了证明。

类似的结果也适用于级数。

定理 150（关于逐项微分）

设 $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$，且 $f_k \in C^1[a, b]$。如果：

1. 存在 $x_0 \in [a, b]$，使得通项为 $f_k(x_0)$ 的级数收敛。
2. 通项为 f_k' 的级数在 $[a, b]$ 上一致收敛到和 $\bar{S}$。

那么通项为 f_k 的级数在 $[a, b]$ 上一致收敛到和 S，且 $S' = \bar{S}$ 在 $[a, b]$ 上成立。特别地，$S \in C^1[a, b]$。

证明：

为了证明这一点，只需将前一个定理应用于所考虑级数的部分和序列。

值得注意的是，在讨论微分时，定理的条件更为严格：需要函数列（或级数）的导数的一致收敛性。这是因为与积分不同，积分通常会改善函数的性质，而微分则可能破坏这些性质。

§ 4. 幂级数及其性质

在研究了函数项级数的一般性质之后，我们终于可以开始讨论对我们来说最感兴趣的（在当前时刻）类型的级数——幂级数。

(1) 幂级数的概念

让我们从基本定义开始讲解。

定义 146

幂级数是指形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

的函数项级数，其中 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $a_k \in \mathbb{R}$。

显然，将这种级数称为函数项级数的原因在于，级数的每一项仅包含 x 的幂次（通常为 $(x - x_0)$ 的幂次）。然而，有时也称这样的级数为（更精确地）关于 $(x - x_0)$ 的幂级数，或以点 x_0 为中心的幂级数，或在 x_0 邻域内的幂级数。

注释 242

已知任何幂级数的收敛集非空——它至少在点 $x = x_0$ 收敛。

注释 23

接下来是一个重要（为了简洁起见）且显而易见的时刻。通过线性变换 $t = x - x_0$，任意幂级数可化简为形式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

的幂级数，即中心在零点的幂级数。不失一般性，在后续讨论中我们将考虑这类级数——即在零点邻域内的幂级数，当 $x_0 = 0$ 时。

根据我们之前介绍的内容，当我们得到某个函数项级数（在本例中为幂级数）时，自然会产生以下问题：

1. 幂级数的收敛集是什么？
2. 幂级数和的性质如何？
3. 给定的函数是否可以用幂级数表示？

每个问题都有其重要性。然而，如果不回答第一个问题，研究其他问题就变得毫无意义。因此，让我们先描述幂级数的收敛集。

(2) 阿贝尔第一定理。幂级数收敛集的描述。柯西-阿达马公式

我们直接从以下定理开始，该定理通常被称为阿贝尔第一定理。

定理 151（阿贝尔第一定理）。

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数。

1. 如果存在 x_1，使得级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$$

   收敛，则对于所有满足 $|x| < |x_1|$ 的 x，通项为 $a_k x^k$ 的级数绝对收敛。
2. 如果存在 x_1，使得级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$$

   发散，则对于所有满足 $|x| > |x_1|$ 的 x，通项为 $a_k x^k$ 的级数发散。

证明：

1. **证明第一点。** 显然，考虑 $x_1 \neq 0$ 的情况是有意义的，否则满足 $|x| < |x_1|$ 的 x 集合为空。设 $x_1 \neq 0$ 且 $|x| < |x_1|$，则有

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k .$$

由于通项为 $a_k x_1^k$ 的级数收敛，其通项趋于零（定理 128），因此有界。即存在常数 C，使得 $|a_k x_1^k| \leq C$，从而

$$|a_k x^k| \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k .$$

注意到

$$0 \le \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

因此通项为 $C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k$ 的级数作为几何级数（例 90）收敛。根据比较判别法（定理 130），原级数也收敛，并且是绝对收敛的。

2. **证明第二点。** 反证法。如果存在 x 满足 $|x| > |x_1|$ 使得级数收敛，那么根据已证明的第一点，当 $x = x_1$ 时级数也应该收敛，这与条件矛盾。

从这个定理可以立即得出幂级数收敛集的形式。

推论 31（关于幂级数收敛集的形式）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数。那么存在 $R \in [0, +\infty]$，使得当 $x \in (-R, R)$ 时，级数绝对收敛；而当 $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 时，级数发散。

接下来是一个指导性的注释和定义。

注释 244

因此，通项为 $a_k x^k$ 的幂级数的收敛集是一个关于零点对称的区间。当然，对于通项为 $a_k(x - x_0)^k$ 的级数，其收敛集是关于点 x_0 对称的区间——即区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$。

我们固定这个结论，并给出以下定义。

定义 147

在上述推论中证明存在的数 R，称为通项为 $a_k x^k$ 的幂级数的收敛半径，而区间 $(-R, R)$ 称为相应幂级数的收敛区间。

在收敛区间的端点处，级数的行为可能不同。我们在单独的注释中指出这一点。

注释 245

当 $x = \pm R$ 时，情况可能不同。例如，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

具有收敛半径 $R = 1$，并且仅在 $x \in (-1, 1)$ 时收敛。同时，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

也具有相同的收敛半径 $R = 1$，但在 $x \in [-1, 1]$ 时收敛，并且是绝对收敛的。级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

同样具有收敛半径 $R = 1$，但在 $x \in (-1, 1)$ 时绝对收敛，在 $x = -1$ 时条件收敛，在 $x = 1$ 时发散。也可能出现当 $x = \pm R$ 时级数条件收敛的情况。

为了计算幂级数的收敛半径，可以使用达朗贝尔判别法、柯西根式判别法等。从理论角度看，以下定理提供了重要的视角。

定理 152（柯西-阿达马公式）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，则有

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

(3) 幂级数的一致收敛性。阿贝尔第二定理

为了回答关于幂级数和的性质的问题，我们决定先讨论幂级数的一致收敛性问题。解决这个问题将分为“两步走”。第一步是：幂级数在任何闭区间 $[-r, r]$ 内一致收敛。

定理 153（关于幂级数的一致收敛性）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，并设 R 是其收敛半径。那么对于任意 $r \in (0, R)$，该幂级数在 $[-r, r]$ 上一致收敛。

证明：

对于幂级数的通项，在 $x \in [-r, r]$ 时有估计

$$|a_k x^k| \le a_k r^k.$$

由于 $r \in (0, R)$，因此通项为 $a_k r^k$ 的级数收敛。这意味着，根据魏尔斯特拉斯判别法（定理 142），原定理的结论成立。

上述定理在一般情况下不能直接得出级数在点 $\pm R$ 处的行为。更具体地说，它不能解决这些点是否属于一致收敛集的问题。为此需要更精细的结果。

定理 154（阿贝尔第二定理）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，并设 R 是其收敛半径。如果通项为 $a_k R^k$ 的级数收敛，则原级数在 $[0, R]$ 上一致收敛。

证明：

由于通项为 $a_k R^k$ 的级数收敛，根据柯西准则（定理 127），对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n > n_0$ 和 $p \in \mathbb{N}$，

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \right| < \varepsilon.$$

设 $n > n_0$，$m > n$，并记

$$A_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k, \quad A_n = 0,$$

注意到

$$|A_m| < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

此时，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} \left(\frac{x}{R}\right)^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + A_{n+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}.
\end{aligned}$$

由于 $x \in [0, R]$，则

$$\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \geq 0, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + |A_{n+p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \\
&< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

由此，根据柯西一致收敛准则（定理 140），结论得证。

综上所述，上述定理使我们可以得出以下结论：幂级数在任何闭区间内一致收敛，只要该区间位于收敛集内部。

(4) 幂级数和的性质

现在我们准备应用关于幂级数一致收敛性的已证明事实，来研究幂级数和的性质问题。第一个问题是关于幂级数和的连续性——这个问题很容易解决。

定理 155（关于幂级数和的连续性）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，并设 R 是其收敛半径。那么该幂级数的和在收敛区间 $(-R, R)$ 上是连续的。

证明：

设 $x_0 \in (-R, R)$，并令

$$\delta = \min\left(\frac{R - x_0}{2}, \frac{x_0 + R}{2}\right).$$

此时，$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$，根据幂级数的一致收敛性定理（定理 153），该幂级数在区间 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上一致收敛。由于幂级数的每一项在这个区间上都是连续的，根据和函数的连续性定理（定理 146），幂级数的和在这个区间上也是连续的。特别地，在 $x = x_0$ 处是连续的。

假设 $x_0 = R$，$R \in (-R, R)$，则根据阿贝尔第二定理（定理 154），所考虑的幂级数在区间 $[0, R]$ 上一致收敛。类似地，上述推理表明，当 $x = R$ 时，幂级数的和不连续。同样可以讨论 $x_0 = -R$，$-R \in (-R, R)$ 的情况。

现在我们转向幂级数积分的问题。

定理 156（关于幂级数的积分）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，并设 R 是其收敛半径。那么该幂级数的和在收敛集内的任意闭区间 $[a, b]$ 上可积，且有

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

证明：

根据定理 153 和定理 154，上述定理是关于一致收敛级数积分定理（定理 148）的直接推论。

在解决幂级数微分的问题之前，我们先证明以下辅助引理。

引理 88

幂级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

的收敛半径相同。

证明：

例如，我们证明第一个和第二个幂级数的收敛半径相同。因为当 $1 \le \sqrt[k]{k} \to 1$ 时，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 k_0，使得对所有 $k > k_0$，

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le \sqrt[k]{k|a_k|} < (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|a_k|}.$$

取上极限，得到

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \le (1+\varepsilon) \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

由于 ε 的任意性，

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

这意味着，根据柯西-阿达马公式（定理 152），这两个幂级数的收敛半径相同。同理可证第三个幂级数的收敛半径也相同。

定理 157（关于幂级数的微分）

设给定一个通项为 $a_k x^k$ 的幂级数，其收敛半径为 R，和函数为 S。则有 $S \in C^\infty(-R, R)$，并且

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

证明：

根据引理中的结论，通过形式上的微分得到的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

具有与原级数相同的收敛半径 R。

设 $x_0 \in (-R, R)$，并选择

$$\delta = \frac{1}{2}\min(R - x_0, x_0 + R),$$

则有

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R).$$

这意味着（根据定理 153），通过形式上微分得到的级数在该区间上一致收敛。由于原级数在 x_0 处收敛（即使在端点 $\pm R$ 处可能不收敛），根据函数级数的微分定理（定理 150），我们得出

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

因为 x_0 是收敛区间内的任意一点，所以可以得出 S 在 $(-R, R)$ 上可微，并且

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

根据幂级数和的连续性定理（定理 155），我们可以进一步得出 $S \in C^1(-R, R)$。后续的证明可以通过归纳法进行。

注释 246

关于幂级数和在收敛集边界点 $\pm R$ 处的微分问题，可以再次使用阿贝尔第二定理（定理 154）和相应的函数级数微分定理（定理 150）。为了避免每次直接验证定理的条件，建议每次都检查相应的条件。

§ 5. 泰勒级数

在本节中，我们将讨论一个重要的推广，即之前学习的泰勒公式——用多项式逼近函数的方法，推广到泰勒级数——用幂级数表示函数的方法。

(1) 泰勒公式中余项的积分形式

在讨论泰勒公式时，我们已经讨论了余项 r_n 的形式，在表达式

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x, x_0),$$

中，余项的形式相当一般（定理 65）。实际上，尽管当时没有明确说明，但提出的一系列余项的获取方法是非常巧妙的。现在，通过学习积分理论，我们可以提出一种更自然、更本质的获取这一系列余项的方法，而且在实际应用中具有相同的前提条件。

定理 158（余项的积分形式）

设函数 f 在区间 $[x_0, x]$ 上 $n+1$ 次连续可微。则有

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt.$$

证明：

利用牛顿-莱布尼茨公式（定理 100）和分部积分法（定理 102），我们有

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x - t)'\, dt \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\, dt \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + \left[f''(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)((x - t)^2)'\, dt \right]. \end{aligned}$$

继续这个过程，最终得到

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt.$$

这样，我们就得到了余项的积分形式，这为泰勒公式的应用提供了更广泛的理论基础。

(2) 泰勒级数和麦克劳林级数

现在我们回到形式定义。

定义 148（泰勒级数的概念）

设函数 f 在点 x_0 处无限次可微。则级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

称为在点 x_0 处由函数 f 生成的泰勒级数。当 $x_0 = 0$ 时，该级数常被称为麦克劳林级数。

引入这个定义后，可能会立即产生一些问题。其中一个关键问题是：泰勒级数是否总是收敛到它所对应的函数？如果收敛，那么它在什么集合上收敛？以下注释将回答这个问题。

注释 247

请注意，泰勒级数至少在一点 x_0 收敛到它所对应的函数。然而，可能存在这样的情况：泰勒级数对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都收敛，但仅在一点处收敛到它所对应的函数。考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

不难证明 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$，并且除了这一点外，

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

这意味着由函数 f 生成的麦克劳林级数为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0.$$

该级数在所有地方都收敛到其和——零，但在唯一的一点处收敛到它所对应的函数——零。这种特殊现象是由于函数 f 在零点处的非解析性引起的。

显然，以下定理成立：

通过上述讨论，我们可以看到泰勒级数和麦克劳林级数在数学分析中的重要性和复杂性。它们不仅提供了函数逼近的有力工具，还揭示了函数性质的深刻内涵。

定理 159（函数可由其泰勒级数表示的准则）

为了使由函数 f 构造的泰勒级数在点 x 处收敛到该函数，必要且充分的条件是

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

证明：

证明直接从表达式

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0)$$

得出。

接下来是一个关于泰勒级数收敛到其生成函数的充分条件。

定理 160（函数可由其泰勒级数表示的充分条件）

设函数 f 在区间 I 上无限次可微，区间 I 的端点为 x_0 和 x。如果在这个区间上函数的各阶导数 $f^{(n)}$ 均匀有界，即存在常数 M，使得对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $t \in I$，

$$|f^{(n)}(t)| \leq M,$$

则有

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

也就是说，由函数 f 构造的泰勒级数在点 x 处收敛到该函数。

证明：

考虑拉格朗日余项形式（20）。根据条件，

$$|r_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

其中最后一个不等式成立是因为引理 23。最后的结论由定理 159 得出。

不难理解，在定理的条件下，上述陈述不仅正确而且更一般地表述为：

$$r_n(t, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad t \in I.$$

这意味着，泰勒级数在整个区间 I 上收敛到其生成函数。

定理 161（唯一性定理）

设当 $|x - x_0| < R$ 时，有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

则有

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

证明：

根据幂级数和的微分定理（定理 157），

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

将 $x = x_0$ 代入上式，得到

$$f^{(m)}(x_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m,$$

从而

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

(3) 简单函数的麦克劳林级数展开

在本节中，我们将回顾在泰勒公式段落中学到的内容，并将其主要结果以定理的形式呈现。

指数函数

这个结果我们已经完全了解了。

定理 162（指数函数的麦克劳林级数）

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明:

首先证明第一个等式。设 $f(x) = e^x$。由于 $f^{(n)}(x) = e^x$，因此在区间 $[0, x]$ 上满足不等式条件，根据定理 160，结论成立。

对于第二个等式，注意到

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

因为 $x \ln a \in \mathbb{R}$，所以该结论由已证的指数函数展开式得出。

正弦和余弦

现在我们讨论正弦和余弦的展开。

定理 163（正弦和余弦的麦克劳林级数）

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明:

以第一个等式为例进行证明。设 $f(x) = \sin x$。由于

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

因此在区间 $[0, x]$ 上有

$$|f^{(n)}(t)| \leq 1,$$

这意味着结论由定理 160 得出。第二个等式的证明类似。

对数函数

在本节中，我们将讨论对数函数的展开。

定理 164（对数函数的麦克劳林级数）

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1,1].$$

证明：

设 $f(x) = \ln(1+x)$。则有

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

因此 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上是有界的，但不均匀有界。

利用柯西余项形式（21），得到

$$|r_n(x,0)| = \left|\frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}}\right| |x| = \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n.$$

当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leq \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} \leq 1 + \frac{|x|-1}{1-|\xi|} \leq 1 + |x| - 1 = |x|,$$

从而

$$|r_n(x,0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|\xi|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

最后，当 $x=1$ 时，根据莱布尼茨判别法（定理 138），所声明的级数收敛，其和为非负值（定理 155），不仅在 $(-1,1)$ ，而且在 $[-1,1]$ 上成立，这意味着所声明的展开式在 $x=1$ 处也成立。

顺便说一句，我们再次得到了已知的等式

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

下面用另一种方法进行推理，这在实践中很有用，首先是为了记忆“正确的”等式。

注释 248

我们知道（例 90），

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1,1).$$

将 x 替换为 $-x$，得到

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad x \in (-1,1).$$

现在，根据定理 156，在区间 $[0,x]$ 上对上述级数进行积分（当 $x\in(-1,1)$ 时），我们得到

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},\quad x\in(-1,1).$$

关于点 $x=1$ 的讨论仍然适用。请注意，在这种处理方法中，我们从未使用任何余项。

反正切函数

在本节中，我们将讨论反正切函数的展开。我们将使用与对数函数展开注释中相同的推理方法。

定理 165（反正切函数的麦克劳林级数）

$$\arctan x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1},\quad x\in[-1,1].$$

证明：

在正确的等式（例 90）

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\quad x\in(-1,1),$$

中，将 x 替换为 $-x^2$，得到

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},\quad x\in(-1,1).$$

现在，根据定理 156，在区间 $[0,x]$ 上对上述级数进行积分（当 $x\in(-1,1)$ 时），我们得到

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1},\quad x\in(-1,1).$$

根据莱布尼茨判别法（定理 138），右侧的级数在 $x=\pm1$ 处收敛，这意味着其和是非负的（定理 155），不仅在 $(-1,1)$，而且在 $[-1,1]$ 上成立。因此，所声明的展开式在 $x=\pm1$ 处也成立。

二项式

在本节中，我们将讨论二项式的展开。

定理 166（二项式的麦克劳林级数）

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k,\quad x\in(-1,1),\alpha\in\mathbb{R}.$$

证明：

设 $f(x)=(1+x)^\alpha$。由于

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

因此当 $\alpha-n<0$ 时，$f^{(n)}(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上没有界，更不用说均匀有界了。

利用柯西余项形式（21），得到

$$|r_n(x,0)|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^n\right|.$$

当 $x\in(-1,1)$ 时，由于 $1+\xi<2$，类似对数函数的证明，

$$|r_n(x,0)|\le 2^{\alpha-1}|x|^{n+1}\left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right|.$$

当 n 足够大时（取决于 α 和 x），随着 n 的增加，右侧不等式的右边乘以

$$\left|\frac{\alpha}{n+1}-1\right||x|<q<1,$$

因此 $r_n(x,0)$ 随着 n 的增大趋于零，从而证明了结论。

无需证明，我们可以注意到以下关于所写级数行为的注释：当 $x=\pm1$ 时，有时对于某些 $x\in\mathbb{R}$，该级数的行为可能会有所不同。

注释 249

显然，如果 $\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，则所声明的等式对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都成立，此时 $(1+x)^\alpha$ 是一个多项式。

如果 $\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$，则该等式在 $x\notin[-1,1]$ 时不成立，因为当 n 足够大时，$f^{(n)}(x)$ 在 $x=-1$ 处无限次可微，这与幂级数和的无限次可微性相矛盾。如果考虑的级数仅在 $x=-1$ 或 $x=1$ 处收敛，则问题可以通过使用定理 155 来解决。总结一下关于收敛性的结果：

1. 如果 $\alpha\ge0$，则所考虑的级数在 $x=\pm1$ 处绝对收敛。
2. 如果 $\alpha\in(-1,0)$，则所考虑的级数在 $x=-1$ 处条件收敛，在 $x=1$ 处发散。
3. 如果 $\alpha\le-1$，则所考虑的级数在 $x=\pm1$ 处发散。

在所有这些情况下，关于级数和值的结果留给读者作为练习。

注释 250

例如，利用达朗贝尔判别法可以轻松验证，当 $\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ 时，级数

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

的收敛半径为 1。设 S 为其和。我们将证明 $S(x)=(1+x)^{\alpha}$。根据定理 157，在 $x\in(-1,1)$ 上逐项微分级数，得到

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}kx^{k-1}.$$

移动求和索引，得到

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!}x^k.$$

将初始表示 $S'(x)$ 乘以 x 并添加（零）项，

$$xS'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}kx^k.$$

将最后两个表达式相加，得到

$$(1+x)S'(x)=\alpha S(x).$$

令

$$g(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}},$$

则有

$$g'(x)=\frac{(1+x)S'(x)-\alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}=0,$$

因此（定理 58）$g=C$，其中 $C\in\mathbb{R}$。由于 $g(0)=S(0)=1$，所以 $g\equiv 1$，从而

$$S(x)=(1+x)^{\alpha},\quad x\in(-1,1).$$

反正弦函数

在本节中，我们将讨论反正弦函数的展开。

定理 167（反正弦函数的麦克劳林级数）

$$\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad x\in[-1,1].$$

证明：

可以通过使用二项式展开对函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 进行展开，然后对得到的等式进行积分来完成证明。其余细节留给读者作为练习。

§ 6. 三角傅里叶级数

(1) 三角级数的概念

现在我们来研究另一个特殊的函数级数——三角级数。

定义 149（三角级数的概念）

级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

称为由函数集 $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$ 构造的三角级数。

级数的收敛性，如通常一样，是指其部分和序列的收敛性。因此，自然会提出以下注释。

注释 251

三角级数的部分和是形如

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

的三角多项式。

很自然地会产生这样一个问题：如何根据给定的函数 f 确定所构造的三角级数的系数 a_k 和 b_k？回答这个问题，我们从考虑以下技术引理开始。

引理 89（三角函数系统的正交性）

设 $k, m \in \mathbb{N}$。则有以下关系成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi.$$

证明：

证明通过直接计算得出，并作为练习留给读者。

注释 252

为了更好地理解这个引理，我们给出以下重要的解释。在线性代数中，通常会引入向量空间元素之间的标量积（$\langle \cdot, \cdot \rangle$）的概念，并由此得出两个元素之间的角度概念。如果两个元素的标量积为零，则称它们是正交的。在本引理中，函数 $\sin kx$ 和 $\cos mx$ 的正交性以及当 $k \neq m$ 时函数 $\sin kx$、$\sin mx$ 和 $\cos kx$、$\cos mx$ 的正交性是在实线性空间 $R[-\pi, \pi]$ 中相对于预标量积定义的，该预标量积定义为

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} fg\, dx.$$

与标量积不同的是，预标量积允许 $(f, f) = 0$ 不仅在 $f = 0$ 时成立。我们不会使用这种“不严谨”的情况。

此外，有了标量积，就可以引入元素（在这种情况下是长度的类比）的范数（预范数），根据公式

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

前一个引理的最后一行告诉我们关于预范数元素 $1, \sin kx, \cos kx, k \in \mathbb{N}$ 相对于上面引入的预标量积的信息。

现在假设对于某个 $x \in \mathbb{R}$，有

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx.$$

可以很容易地看出以下观察（部分是断言）：

1. 级数的系数必须依赖于函数。
2. 如果上述等式在整个实数域 $\mathbb{R}$ 上成立，则 f 是周期为 2π 的周期函数。特别是，f 完全由其在任意长度为 2π 的区间上的值确定。
3. 反过来，逻辑上可以推测，任何 2π-周期函数都可以展开成上述级数。然而，这并不总是正确的。

假设所写的级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛，则 $f \in C[-\pi, \pi]$，并且可以逐项积分（定理 148）。这给出了完全确定系数 a_k 和 b_k 的方法。我们将考虑的等式乘以 $\cos mx$ 并进行积分，得到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos mx\, dx = \frac{a_0(f)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx + b_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx\, dx.$$

§ 6. 三角傅里叶级数

利用引理 89 关于三角函数系统正交性的结论，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cos mx\, dx = a_m(f) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi a_m(f),$$

从而有

$$a_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\,dx.$$

为了确定 $a_0(f)$，我们将整个表达式乘以 1 并进行积分。再次使用引理 89，得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = \frac{a_0(f)}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = \pi a_0(f),$$

因此，

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos 0x\,dx.$$

这意味着，

$$a_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\,dx, \quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

类似地，

$$b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sin mx\,dx, \quad m\in\mathbb{N}.$$

现在我们可以引入本节的关键定义。

定义 150

如果对于函数 f 存在上述定义的数 $a_m(f)$ 和 $b_m(f)$，则级数

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

称为函数 f 的三角傅里叶级数，而 $a_m(f)$ 和 $b_m(f)$ 称为函数 f 相对于函数系 $\{1, \cos kx, \sin kx, k\in\mathbb{N}\}$ 的傅里叶系数。

接下来是注释和进一步的讨论。

注释 253

请注意，计算傅里叶系数的操纵是线性代数中处理有限维空间标量积技术的推广。如果 $e_k, k\in\{1,\ldots,n\}$ 是某个 n-维空间 X 中的正交基，则其任意元素 $x\in X$ 可以唯一表示为基元素的线性组合：

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

从这个表示出发，通过与上面类似的推理，我们立即得到

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

我们的问题在于无限维的情况，即我们不知道是否可以将等式

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

推广到无限个项，并且即使可以，我们应该如何理解这个等式的含义？

接下来我们将研究所写级数的逐点收敛性。

(2) 复数形式的傅里叶级数和狄利克雷核

为了便于进一步的阐述，我们将所考虑的级数重写为复数形式，利用欧拉公式：

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

从这个公式中可以立即得到：

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

将这些关系代入傅里叶级数，我们得到：

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k(f) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikx} \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} + e^{-ikx} \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx},$$

其中

$$c_k(f) = \begin{cases} \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, & k > 0, \\ \frac{a_0(f)}{2}, & k = 0, \\ \frac{a_{-k}(f) + ib_{-k}(f)}{2}, & k < 0, \end{cases}$$

而所获得级数的收敛性（具有复数项！）是指“对称”部分和序列（通常是实数的）

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

的收敛性。

将先前推导出的关系代入 $a_k(f)$ 和 $b_k(f)$，我们得到 $c_k(f)$ 的表达式：

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikx}\,dx,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

因此，我们得出以下定义。

定义 151（复数形式的傅里叶级数）

如果对于函数 f 存在系数 $c_k(f)$，如上所述，则级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

称为函数 f 的复数形式的傅里叶级数，而 $c_k(f)$ 是函数 f 相对于函数系 $\{e^{ikx}, k\in\mathbb{Z}\}$ 的傅里叶系数。

注释 254

对于 $c_k(f)$ 的计算涉及复值函数的积分——形如

$$w(t)=u(t)+iv(t),$$

其中 u, v 是实变量的实值函数。我们理解这种函数的积分如下：如果它存在，则有

$$\int_a^b w\,dt=\int_a^b u\,dt+i\int_a^b v\,dt.$$

显然，$w\in R[a,b]$ 当且仅当 $u,v\in R[a,b]$。我们在后续讨论中使用的该积分的性质源于黎曼积分的性质，并保持其作为读者的困扰。

请注意，引入的积分并不保留黎曼积分的所有性质。特别是，与不等式相关的性质不再适用，因为复数集上没有顺序关系。定理 96 中的中值定理在这种情况下也不成立，例如，

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,dt=0,$$

但 $e^{it}\neq 0$ 对任何 $t\in\mathbb{R}$ 都成立。

我们将傅里叶级数的部分和转换为更方便的形式：

$$T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt.$$

单独考虑求和项（当 $e^{ip}\neq 1\Leftrightarrow p\neq 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ 时）：

$$D_n(p)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikp}=\sum_{k=-n}^{n}(e^{ip})^k=\frac{e^{-inp}(1-e^{ip(2n+1)})}{1-e^{ip}}=\frac{e^{-inp}-e^{ip(n+1)}}{1-e^{ip}}.$$

将分子和分母都除以 $e^{ip/2}$，得到

$$D_n(p)=\frac{e^{-ip(n+1/2)}-e^{ip(n+1/2)}}{e^{-ip/2}-e^{ip/2}}=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})p)}{\sin(\frac{p}{2})}.$$

当 $e^{ip}=1$ 时，显然 $D_n(p)=2n+1$。因此，

$$D_n(p)=\begin{cases}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})p)}{\sin(\frac{p}{2})}, & p\neq 2\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ 2n+1, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

定义 152（狄利克雷核）

函数 $D_n(p)$ 称为狄利克雷核。

我们注意到狄利克雷核的一些基本性质。

引理 90（狄利克雷核的性质）

狄利克雷核具有以下性质：

1. $D_n(p)$ 是一个以 2π 为周期的周期函数。
2. $D_n(p)$ 是偶函数。
3. 满足归一化条件：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(p)\,dp=1.$$

证明

所有这些性质都可以直接从狄利克雷核的原始表示中得出：

$$D_n(p)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikp}$$

细节作为练习留给读者。

因此，傅里叶级数的部分和可以表示为：

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

为了研究上述积分，我们将使用所谓的黎曼引理。

引理 91（黎曼引理）

设 $f\in R_{\text{loc}}(a,b)$ 并且

$$\int_a^b |f|\,dx<+\infty.$$

则有

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

在证明上述命题之前，我们先做一个注释。

注释 255

命题中的极限是形如

$$w(t) = u(t) + iv(t),$$

其中 u, v 是实变量的实值函数。我们理解这种函数的极限如下：如果它存在，则有

$$\lim_{t \to t_0} w(t) = \lim_{t \to t_0} u(t) + i \lim_{t \to t_0} v(t).$$

关于引入概念的性质的细节留给读者。

现在我们开始证明。

证明

首先注意到，如果 $f(x) = c$ 是某个常数，并且 (a, b) 是一个有限区间，则

$$\int_a^b ce^{i\lambda x}\,dx = c\left(\int_a^b \cos\lambda x\,dx + i\int_a^b \sin\lambda x\,dx\right) =$$

$$= c\left(\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda} - i\frac{\cos\lambda b - \cos\lambda a}{\lambda}\right) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0,$$

因此定理的结论成立。我们将一般情况归结为这种情况。

首先证明，对任意 $\varepsilon > 0$，存在子区间 $[\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

根据积分绝对收敛的条件，可以找到 δ_1 和 δ_2，使得 $\delta_1 < \delta_2$ 并且

$$\int_a^{\delta_1} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_2}^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

对于找到的 δ_1 和 δ_2，我们有：

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| = \left|\int_a^{\delta_1} f(x)e^{i\lambda x}\,dx + \int_{\delta_2}^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^{\delta_1} |f(x)|\,dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\delta_1} |f(x)|\,dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由于 $f \in R[\delta_1, \delta_2]$，存在一个分割 τ 将区间 $[\delta_1, \delta_2]$ 分成子区间 Δ_i，$i \in \{1, \ldots, n\}$，使得

$$0 \le \int_{\delta_1}^{\delta_2} f\,dx - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

其中

$$s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

是下达布和。设 $g(x)=m_i$ 当 $x\in\Delta_i$（在公共端点处，g 的值可以任意取），则

$$0\le\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|=\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2}(f(x)-g(x))e^{i\lambda x}\,dx\right|\le$$

$$\le\int_{\delta_1}^{\delta_2}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{\delta_1}^{\delta_2}(f-g)\,dx,$$

因为 $f(x)\ge g(x)$。最后一个积分可以重写为：

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx-\int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)\,dx=\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx-s_\tau(f)<\varepsilon.$$

因此，

$$0\le\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|<\varepsilon.$$

最后，注意到

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx=\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i e^{i\lambda x}\,dx=0,$$

这是因为最后一项是一个有限求和，每一项都趋向于零，如最初证明所示。由于 ε 的任意性，黎曼引理完全得证。

接下来我们做一个注释。

注释 256

在黎曼引理的条件下，我们得到：

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

特别地，

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\xrightarrow[k\to+\infty]{}0,\quad b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

因此，函数 f 的傅里叶级数满足收敛的必要条件（定理 128）。

④ 迪尼条件。傅里叶级数收敛的充分条

在本节中，我们将讨论傅里叶级数收敛到其生成函数的充分条件。我们从以下引理开始。

引理 92

设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 2π-周期的。则有

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) \, dt.$$

证明

回忆一下，

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, dt.$$

我们做变量替换 $p = x - t$，并注意到根据条件和狄利克雷核的性质（引理 90），被积函数是 2π-周期的。因此，

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-p) D_n(p) \, dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-p) D_n(p) \, dp.$$

由于狄利克雷核是偶函数（引理 90），则有

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-p) + f(x+p)) D_n(p) \, dp,$$

这证明了引理。

现在，我们将介绍所谓的迪尼条件，这些条件将帮助我们在后续确定傅里叶级数收敛的充分条件。

定义 153（迪尼条件）

称函数 $f : U(x) \to \mathbb{R}$ 在点 $x \in \mathbb{R}$ 满足迪尼条件，如果：

1. 函数 f 在点 x 存在单侧极限 $f(x \pm 0)$。
2. 积分

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt \quad 和 \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

   在某个 $\delta > 0$ 下收敛。

现在我们可以陈述并证明（对我们来说）傅里叶级数收敛的主要充分条件。

定理 168（傅里叶级数收敛的充分条件）

设 f 是在 $\mathbb{R}$ 上的 2π-周期函数，并且 $|f| \in R[-\pi, \pi]$。如果函数 f 在点 $x \in \mathbb{R}$ 满足迪尼条件，则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

证明

根据引理 92，

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) \, dt,$$

并且根据引理 90，

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi,$$

因此，

$$T_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-t)+f(x+t))D_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+0)+f(x-0))D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{f(x-t)-f(x-0)+f(x+t)-f(x+0)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

由于当 $t \to 0+$ 时，$\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$，根据迪尼条件，积分

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \quad 和 \quad \int_0^{\pi} \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt$$

是收敛的，这意味着我们满足了黎曼引理（引理 91）的条件。因此，

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

让我们回顾一下之前遇到的定义（99），关于分段连续函数的定义，虽然这里以另一种形式呈现。

注释 257（分段连续函数的概念）

我们说函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是分段连续的，如果存在一个分割 $[a,b]$，使得

$$f \in C(x_{i-1}, x_i), \quad i \in \{1,\ldots,n\},$$

并且在 $\mathbb{R}$ 中存在单侧极限 $f(x_i \pm 0)$，$i \in \{1,\ldots,n-1\}$，$f(x_0+0)$ 和 $f(x_n-0)$。

定义 154（分段可微函数的概念）

具有分段连续导数的函数 f，在区间 $[a,b]$ 上称为分段可微函数。

推论 32

分段可微函数满足迪尼条件。

在本节中，我们将讨论傅里叶级数的一些应用，并查看将函数展开为傅里叶级数的例子。

⑤一些例子和应用

倒数平方级数

设函数 $f(x) = x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上定义，并且周期性地扩展到 $\mathbb{R}$ 上。根据定理 168，其傅里叶级数收敛到它本身在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处。我们计算展开系数。

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

对于 $k \geq 1$，我们有：

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx,$$

其中最后一个等式成立是因为被积函数是偶函数，且积分区间对称（定理 104）。通过两次分部积分并注意到 $\cos \pi k = (-1)^k$，我们得到：

$$a_k(f) = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

接下来，

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = 0,$$

因为被积函数是奇函数，而积分区间对称（定理 105）。因此，在 $[-\pi, \pi]$ 上，

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx.$$

令 $x = \pi$，则有

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

从而得出

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

正弦的无穷乘积

考虑函数 $\cos \alpha x$，$\alpha \in \mathbb{R}$，在 $[-\pi, \pi]$ 上定义，并周期性地扩展到 $\mathbb{R}$。根据定理 168，其傅里叶级数在所有点 $x \in \mathbb{R}$ 收敛到该函数的值。我们计算傅里叶系数。

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha - k)\pi}{\alpha - k} + \frac{\sin(\alpha + k)\pi}{\alpha + k} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha - k} + \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha + k} \right) = \frac{(-1)^k}{\pi} 2\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

接下来，

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin kx \, dx = 0,$$

正弦的无穷乘积（续）

由于被积函数是奇函数，且积分区间对称（定理 105），则在 $\mathbb{R}$ 上，由周期延拓的不连续性，在

$$\cos\alpha x=\frac{2\alpha}{\pi}\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha^2-k^2}\cos kx\right).$$

令 $x=\pi$，则有

$$\cos\pi\alpha=\frac{2\alpha}{\pi}\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-k^2}\right)$$

和

$$\cot\pi\alpha=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}\right)$$

或

$$\cot\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}.$$

当 $|\alpha|\le a_0<1$ 时，上述级数一致收敛，因此可以逐项积分：

$$\int_0^x\left(\cot\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}\right)d\alpha=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}\,d\alpha,$$

从而得出

$$\ln\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right|\Bigg|_0^x=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|\alpha^2-k^2\right|\Bigg|_0^x$$

或

$$\ln\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1-\frac{x^2}{k^2}\right|.$$

去掉对数，我们得到

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),\quad |x|<1.$$

因此，我们得到了正弦函数的无穷乘积形式，这是比祖定理的无穷类比，但针对的是正弦函数而非多项式。

§6. 长度为 $2l$ 的任意区间上的傅里叶级数

到目前为止，我们讨论了定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 2π-周期函数。那么，如果函数的周期不同呢？假设函数 f 定义在区间 $[-l, l]$ 上，并周期性地扩展到 $\mathbb{R}$。容易理解，如果 $x \in [-l, l]$，则

$$y = \frac{\pi}{l} x \in [-\pi, \pi].$$

这意味着，函数 f 可以对应一个傅里叶级数

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k(f) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

其中

$$a_k(f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k(f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

之前所有结果都保持不变，只需将区间端点从 $\pm\pi$ 替换为 $\pm l$ 即可。