

- Двухсеместровый курс
- Теоретический минимум. Раздел 1 (весна).
- Список вопросов.
  - 俄语回答:
  - 中文翻译 (Chinese Translation):
  - 问题与答案整合版
  - 问题与答案整合版

# Двухсеместровый курс

---

## Теоретический минимум. Раздел 1 (весна).

---

### Список вопросов.

---

#### 1. Дайте определение линейной формы

**Определение 1.1.** Линейной формой на пространстве  $V$  называется такая функция  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  выполняется:

- (а) Аддитивность:  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ .
- (б) Однородность:  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ .

#### 2. Что будет являться образом линейной комбинации относительно линейной формы?

**Замечание 1.1.** Для любого линейного отображения  $f : V \rightarrow U$  справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов  $v_i \in V$  будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

#### 3. Приведите общий вид линейной формы, определяемый координатами вектора-аргумента в произвольном базисе.

#### 4. Что называется коэффициентами линейной формы?

**Определение 1.2.** Коэффициентами  $\varphi_i$  линейной формы  $f$  называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

5. Как найти значение линейной формы, зная ее коэффициенты в некотором базисе, а также координаты вектора-аргумента в этом же базисе?

6. Как определяется равенство линейных форм?

**Определение 2.1.** Линейные формы  $f$  и  $g$  будем называть равными, если

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

7. Какая линейная форма называется нуль-формой?

**Определение 2.2.** Линейная форма  $\theta$  называется нулевой (нуль-формой), если

$$\theta(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

8. Как определяется сумма линейных форм?

**Определение 2.3.** Суммой линейных форм  $f$  и  $g$  называется отображение  $h = f + g$ , для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$$

9. Какое пространство называется сопряженным пространством?

**Теорема 2.1.** Множество линейных форм  $V^*$ , заданных на линейном пространстве  $V$  образует линейное (сопряженное) пространство.

10. Какие значения принимает  $f_j(e_i)$ , если  $\{e_i\}$  и  $\{f_j\}$  — сопряженные базисы?

Рассмотрим некоторый базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  в пространстве  $V$ . Введем набор линейных форм  $\{f^j\}_{j=1}^n$  следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает  $j$ -ю координату вектора  $v \in V$  в базисе  $\{e_i\}_{i=1}^n$ .

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

11. Как может быть задан базис сопряженного пространства?

**Лемма 2.2.** Набор линейных форм  $\{f^j\}_{j=1}^n$  является базисом в сопряженном пространстве  $V^*$ .

12. Как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразованиях базиса?

13. Как преобразуются базисные линейные формы при преобразованиях базиса?

14. Какое пространство называют вторым сопряженным?

**Определение 3.1.** Вторым сопряженным пространством называют  $V^{**} = (V^*)^*$ .

15. Как может быть установлен изоморфизм между пространством  $V$  и вторым сопряженным к нему?

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad \hat{v}(f) = f(v) \quad \forall f \in V^*$$

16. Какой изоморфизм называют каноническим?

**Теорема 3.1.** Между пространствами  $V$  и  $V^{**}$  можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).

17. Какое отображение называется билинейной формой?

**Определение 1.1.** Билинейной формой на линейном пространстве  $V(\mathbb{K})$  называется такая функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

18. Как при помощи линейных форм может быть задана билинейная форма?

**Замечание 1.1.** Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

19. Запишите координатное представление любой билинейной формы?

**Пример 1.3.** Пусть  $V = \mathbb{K}^n$  – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где  $x = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T \in V$  и  $y = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)^T \in V$ .

## 20. Какая билинейная форма называется симметричной?

**Определение 1.2.** Билинейная форма  $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  называется **симметричной**, если выполняется  $b(x, y) = b(y, x)$ .

## 21. Какая билинейная форма называется антисимметричной?

**Определение 1.3.** Билинейная форма  $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  называется **антисимметричной**, если выполняется  $b(x, y) = -b(y, x)$ .

## 22. Как может быть найдена симметричная компонента билинейной формы?

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)), \quad b^S \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)$$

## 23. Как может быть найдена антисимметричная компонента билинейной формы?

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)), \quad b^{AS} \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

## 24. Как восстановить билинейную форму, если известны ее симметрическая и антисимметричная компонента?

**Лемма 1.3.** Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.

## 25. Какая билинейная форма является симметричной и антисимметричной одновременно?

## 26. Как могут быть найдены коэффициенты билинейной формы?

**Определение 2.1.** Коэффициентами  $\beta_{ij}$  билинейной формы  $b(x, y)$  называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

## 27. Как устанавливается изоморфизм между пространством билинейных форм и пространством матриц?

**Доказательство.** Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned}b &\leftrightarrow B & b' &\leftrightarrow B' \\ b + b' &\leftrightarrow B + B' \\ \lambda b &\leftrightarrow \lambda B\end{aligned}$$

## 28. Какое свойство определяет матрицу, соответствующую симметричной форме?

**Замечание 2.2.** Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$\begin{aligned}b^S &\leftrightarrow B_S & B_S &= B_S^T \\ b^{AS} &\leftrightarrow B_{AS} & B_{AS} &= -B_{AS}^T\end{aligned}$$

## 29. Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме?

**Замечание 2.2.** Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$\begin{aligned}b^S &\leftrightarrow B_S & B_S &= B_S^T \\ b^{AS} &\leftrightarrow B_{AS} & B_{AS} &= -B_{AS}^T\end{aligned}$$

## 30. Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?

**Теорема 2.2.** Матрицы  $B$  и  $B'$  билинейной формы  $b(x, y)$ , заданные в базисах  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и  $\{e'_j\}_{j=1}^n$  связаны соотношением

$$B' = C^T B C,$$

где  $C = (c_j^i)$  - матрица перехода от базиса  $\{e_i\}_{i=1}^n$  к базису  $\{e'_j\}_{j=1}^n$ .

## 31. Какое отображение называется квадратичной формой?

**Определение 3.1.** Квадратичной формой на линейном пространстве  $V$  называется отображение  $q(v)$ , построенное из билинейной формы  $b(x, y)$  следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

## 32. Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?

**Лемма 3.1.** Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.

### 33. Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?

**Замечание 3.3.** Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

### 34. Как определяется матрица квадратичной формы?

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где  $v^i$  –  $i$ -я координата вектора  $v$  в выбранном базисе.

### 35. Дайте определение полилинейной формы.

**Определение 1.1.** Полилинейной формой на линейном пространстве  $V(\mathbb{K})$  назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = \alpha \mathcal{A}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q), \end{aligned}$$

где  $x_i \in V$  и  $\varphi^j \in V^*$ .

### 36. Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения.

**Определение 1.2.** Валентностью полилинейной формы называют пару чисел  $(p, q)$ , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

### 37. Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?

### 38. Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма?

### 39. Как определяется сумма полилинейных форм?

### 40. Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?



**Определение 2.3.** Отображение  $C = A + B$  будем называть суммой полилинейных форм  $A$  и  $B$ , если

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \\ = A(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + B(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

#### 41. Как определяется произведение полилинейных форм?

**Определение 2.4.** Отображение  $\lambda A$  будем называть произведением полилинейной формы  $A$  на скаляр  $\lambda$ , если

$$(\lambda A)(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot A(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

#### 42. Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операцией сложения?

#### 43. Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр?

#### 44. Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности? Поясните ответ.

(а) Некоммутативность

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения  $A$  и  $B$  определяет порядок аргументов в  $C$ . Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм  $f^1, f^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} C_1 = f^1 \cdot f^2 &\Rightarrow C_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y) \\ C_2 = f^2 \cdot f^1 &\Rightarrow C_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y) \end{aligned}$$

#### 45. Как может быть найден тензор полилинейной формы?

**Определение 3.1.** Тензором полилинейной формы  $C$  валентности  $(p, q)$  называется набор из  $n^{p+q}$  скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = C(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы  $i_1, i_2, \dots, i_p$  и  $j_1, j_2, \dots, j_q$  принимают значения  $1, \dots, n$ , где  $n = \dim V$  — это размерность пространства  $V$ .

#### 46. В чем заключается смысл немого суммирования?

Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое правило суммирования Эйнштейна, или соглашение о немом суммировании.

**47. Для какой цели служит тензор полилинейной формы?**

**48. Что является тензором билинейной формы?**

**49. Что является тензором линейной формы?**

**50. Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования координат вектора?**

**51. Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования коэффициентов линейных форм?**

**52. Запишите закон преобразования компонент тензора полилинейной формы при преобразованиях базиса?**

(由于技术原因，联网搜索暂不可用)

## 俄语回答:

**37. Скалярное произведение** как полилинейная форма имеет валентность **(0, 2)** (два ковариантных аргумента).

**38. Смешанное произведение** в  $(n)$ -мерном пространстве имеет валентность **(0, n)** ( $n$  ковариантных аргументов).

**39. Сумма полилинейных форм** определяется поточечно:  $(F + G)(v_1, \dots, v_k) = F(v_1, \dots, v_k) + G(v_1, \dots, v_k)$ , если формы одной валентности.

**40. Умножение на скаляр:**  $(\alpha F)(v_1, \dots, v_k) = \alpha \cdot F(v_1, \dots, v_k)$ .

**41. Произведение форм** — тензорное произведение:  $(F \otimes G)(v_1, \dots, v_{k+m}) = F(v_1, \dots, v_k) \cdot G(v_{k+1}, \dots, v_{k+m})$ .

**42. Множество полилинейных форм с операцией сложения образует абелеву группу.**

**43. С операциями сложения и умножения на скаляр — векторное пространство.**



44. **Нет**, умножение не коммутативно. Например,  $(F \otimes G \neq G \otimes F)$ , если  $(F)$  и  $(G)$  не симметричны.
  45. **Тензор полилинейной формы** определяется её значениями на базисных векторах:  $(T_{i_1 \dots i_k} = F(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}))$ .
  46. **Немое суммирование** — автоматическое суммирование по повторяющимся индексам (например,  $(a_i b^i = \sum_i a_i b^i)$ ).
  47. **Тензор** кодирует коэффициенты формы в выбранном базисе.
  48. **Тензор билинейной формы** — матрица коэффициентов  $(B_{ij})$ .
  49. **Тензор линейной формы** — вектор коэффициентов  $(a_i)$ .
  50. Закон преобразования координат вектора:  $(x'^i = C^i_j x^j)$  (по повторяющемуся индексу  $(j)$ ).
  51. Закон преобразования коэффициентов линейной формы:  $(a'_i = (C^{-1})^j_i a_j)$ .
  52. Общий закон преобразования компонент тензора валентности  $((p, q))$ :  

$$[T'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = C^{i_1}_{j_1} \dots C^{i_p}_{j_p} (C^{-1})^{l_1}_{j_1} \dots (C^{-1})^{l_q}_{j_q} T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}].$$
- 

## 中文翻译 (Chinese Translation):

37. **标量积**作为多重线性形式的价是 **(0, 2)** (两个协变参数)。
38. **混合积**在  $(n)$  维空间中的价是 **(0, n)** ( $n$  个协变参数)。
39. **多重线性形式的和**按点定义: 若形式同价, 则  $((F + G)(v_1, \dots, v_k) = F(v_1, \dots, v_k) + G(v_1, \dots, v_k))$ 。
40. **标量乘法**:  $((\alpha F)(v_1, \dots, v_k) = \alpha \cdot F(v_1, \dots, v_k))$ 。
41. **形式的乘积**为张量积:  $((F \otimes G)(v_1, \dots, v_{k+m}) = F(v_1, \dots, v_k) \cdot G(v_{k+1}, \dots, v_{k+m}))$ 。
42. 多重线性形式集合关于加法构成**阿贝尔群**。
43. 关于加法和标量乘法构成**向量空间**。
44. **否**, 乘法不可交换。例如, 若  $(F)$  和  $(G)$  不对称, 则  $(F \otimes G \neq G \otimes F)$ 。
45. **多重线性形式的张量**由其在基向量上的值确定:  $(T_{i_1 \dots i_k} = F(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}))$ 。
46. **爱因斯坦求和约定**: 对重复指标自动求和 (如  $(a_i b^i = \sum_i a_i b^i)$ )。
47. **张量**编码了形式在选定基下的系数。
48. **双线性形式的张量**是系数矩阵  $(B_{ij})$ 。
49. **线性形式的张量**是系数向量  $(a_i)$ 。

50. 向量坐标变换法则:  $(x'^i = C^i_j x^j)$  (对重复指标  $j$ ) 求和)。

51. 线性形式系数变换法则:  $(a'_i = (C^{-1})^j_i a_j)$ 。

52. **(p, q) 型张量**分量的变换法则:

$$[T'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = C^{i_1}_{k_1} \dots C^{i_p}_{k_p} (C^{-1})^{l_1}_{j_1} \dots (C^{-1})^{l_q}_{j_q} T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}.]$$

(由于技术原因, 联网搜索暂不可用)

## 问题与答案整合版

以下所有问题均以 **俄语回答** 和 **中文翻译** 并列呈现, 每个问题后紧跟答案。

---

**53. Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)?**

**俄语回答:**

$$[T'^{ij} = C^k_i C^l_j T^{kl} \quad (\text{суммирование по } k, l).]$$

**中文翻译:**

**(2, 0) 型张量的变换法则:**

$$[T'^{ij} = C^k_i C^l_j T^{kl} \quad (\text{对 } k, l \text{ 求和}).]$$

---

**54. Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)?**

**俄语回答:**

$$[T'^i_j = C^i_k (C^{-1})^l_j T^{k_l} \quad (\text{суммирование по } k, l).]$$

**中文翻译:**

**(1, 1) 型张量的变换法则:**

$$[T'^i_j = C^i_k (C^{-1})^l_j T^{k_l} \quad (\text{对 } k, l \text{ 求和}).]$$

---

**55. Как выглядит закон преобразования тензора типа (0, 2)?**

**俄语回答:**

$$[T'_{ij} = (C^{-1})^k_i (C^{-1})^l_j T_{kl} \quad (\text{суммирование по } k, l).]$$

**中文翻译:**

**(0, 2) 型张量的变换法则:**

$$[T'_{ij} = (C^{-1})^k_i (C^{-1})^l_j T_{kl} \quad (\text{对 } k, l \text{ 求和}).]$$

---

**56. Какой валентностью будет обладать полилинейная форма валентности (p, q) после операции свертки?**

**俄语回答:**

После свертки валентность станет  $(p-1, q-1)$ . Например, свертка тензора  $(1,1)$  даёт скаляр  $(0,0)$ .

**中文翻译:**

缩并后的张量阶为  $(p-1, q-1)$ 。例如,  $(1,1)$  型张量缩并后变为标量  $(0,0)$ 。

---

## 57. Как определяется операция свертки тензора?

**俄语回答:**

Свёртка тензора — суммирование по паре индексов (один верхний, один нижний). Например, свёртка  $(T^i_j)$  по  $(i)$  и  $(j)$ :

$$[T^i_i = \sum_i T^i_i.]$$

**中文翻译:**

**张量缩并:** 对一对上下标求和。例如, 缩并  $(T^i_j)$ :

$$[T^i_i = \sum_i T^i_i.]$$

---

## 58. Дайте определение символа Кронекера.

**俄语回答:**

Символ Кронекера  $(\delta_{ij})$ :

$$[\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}]$$

**中文翻译:**

**克罗内克符号  $(\delta_{ij})$ :**

$$[\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}]$$

---

## 59. Каким свойством обладает символ Кронекера?

**俄语回答:**

Символ Кронекера инвариантен при преобразованиях базиса:  $(\delta'^{ij} = \delta_{ij})$ .

**中文翻译:**

**性质:**  $(\delta_{ij})$  在基变换下不变:  $(\delta'^{ij} = \delta_{ij})$ 。

---

## 60. Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?

**俄语回答:**

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a^i b^j \quad (\text{суммирование по } i, j).]$$

**中文翻译:**

**标量积的缩并表示:**

[  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a^i b^j \quad (\text{对 } i, j \text{ 求和}). ]$

(由于技术原因，联网搜索暂不可用)

## 问题与答案整合版

以下所有问题均以 **俄语回答** 和 **中文翻译** 并列呈现，每个问题后紧跟答案。

---

### 61. Дайте определение символа Леви-Чивита.

**俄语回答:**

Символ Леви-Чивита ( $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ) — это полностью антисимметричный тензор, определяемый следующим образом:

- ( $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$ ),
- ( $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ ), если индексы повторяются,
- ( $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ) меняет знак при перестановке любых двух индексов.

**中文翻译:**

**列维-奇维塔符号** ( $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ) 是一个完全反对称的张量，定义为：

- ( $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$ ),
  - 若下标重复，则 ( $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ ),
  - 交换任意两个下标时符号改变。
- 

### 62. Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?

**俄语回答:**

Основное свойство:

[  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} = \det(\delta_{i_k}^{j_l})$ , ]

где ( $\delta_{i_k}^{j_l}$ ) — символ Кронекера.

**中文翻译:**

**主要性质:**

[  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} = \det(\delta_{i_k}^{j_l})$ , ]

其中 ( $\delta_{i_k}^{j_l}$ ) 为克罗内克符号。

---

### 63. Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?

俄语回答:

В трёхмерном пространстве:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \quad (\text{суммирование по } j, k).$$

中文翻译:

三维向量积:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \quad (\text{对 } j, k \text{ 求和}).$$

---

### 64. Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа Леви-Чивита.

俄语回答:

Смешанное произведение трёх векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \quad (\text{суммирование по } i, j, k).$$

中文翻译:

三维混合积:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \quad (\text{对 } i, j, k \text{ 求和}).$$

---

### 65. Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-Чивита?

俄语回答:

Для матрицы  $(A = (a^i_j))$  размера  $(n \times n)$ :

$$\det(A) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n \quad (\text{суммирование по всем индексам}).$$

中文翻译:

矩阵行列式:

对于  $(n \times n)$  矩阵  $(A = (a^i_j))$ :

$$\det(A) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n \quad (\text{对所有下标求和}).$$

---

### 66. Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами.

俄语回答:

Линейное отображение  $(\varphi: X \rightarrow Y)$  удовлетворяет:

$$[\varphi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{u}) + \beta \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \alpha, \beta \in K.]$$

**中文翻译:**

**线性映射**  $(\varphi: X \rightarrow Y)$  满足:

$$[\varphi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{u}) + \beta \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \alpha, \beta \in K.]$$

---

## 67. Что называется линейным отображением растяжения?

**俄语回答:**

Отображение  $(\varphi: V \rightarrow V)$ , где  $(\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v})$  для фиксированного  $(\lambda \in K)$ .

**中文翻译:**

**拉伸映射**  $(\varphi: V \rightarrow V)$ , 即  $(\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v})$ , 其中  $(\lambda \in K)$  为常数。

---

## 68. Запишите матрицу тождественного отображения.

**俄语回答:**

Единичная матрица  $(I)$ :

$$[I_{ij} = \delta_{ij}.]$$

**中文翻译:**

**恒等映射的矩阵**为单位矩阵  $(I)$ :

$$[I_{ij} = \delta_{ij}.]$$

---

## 69. Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?

**俄语回答:**

Если  $(V = W \oplus U)$ , то матрица проекции  $(P)$  на  $(W)$  имеет вид:

$$[P = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \end{pmatrix},]$$

где  $(k = \dim W)$ .

**中文翻译:**

若  $(V = W \oplus U)$ , 则投影到  $(W)$  的矩阵  $(P)$  为分块矩阵:

$$[P = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \end{pmatrix},]$$

其中  $(k = \dim W)$ 。

---

**70. Какой вид имеет матрица оператора растяжения на  $(\lambda \in K)$ ?**

**俄语回答:**

Диагональная матрица с  $(\lambda)$  на диагонали:

$$[A = \lambda I.]$$

**中文翻译:**

对角线元素均为  $(\lambda)$  的对角矩阵:

$$[A = \lambda I.]$$

---

**71. Как может быть найдена матрица линейного отображения?**

**俄语回答:**

Если  $(\{e_i\})$  — базис  $(X)$ , а  $(\{f_j\})$  — базис  $(Y)$ , то элемент  $(A_{ij})$  матрицы равен коэффициенту при  $(f_j)$  в разложении  $(\phi(e_i))$ .

**中文翻译:**

设  $(\{e_i\})$  是  $(X)$  的基,  $(\{f_j\})$  是  $(Y)$  的基, 则矩阵元素  $(A_{ij})$  为  $(\phi(e_i))$  在基  $(\{f_j\})$  下的第  $(j)$  个坐标。

---

**72. Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей.**

**俄语回答:**

Если  $(\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n))$ , то координаты образа  $(\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m))$ :

$$[y^j = \sum_{i=1}^n A_{ij} x^i \quad (\text{суммирование по } i).]$$

**中文翻译:**

若向量  $(\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n))$ , 则其映像  $(\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m))$  的坐标为:

$$[y^j = \sum_{i=1}^n A_{ij} x^i \quad (\text{对 } i \text{ 求和}).]$$

---

**73. Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?**

**俄语回答:**

Множество линейных отображений образует **векторное пространство** над полем  $(K)$ .

**中文翻译:**

线性映射的集合关于加法和标量乘法构成 **向量空间**。

---



**74. Какому матричному пространству изоморфно множество  $(\text{Hom}_K(X, Y))$ ? Поясните введенные обозначения.**

**俄语回答:**

$(\text{Hom}_K(X, Y) \cong M_{m \times n}(K))$ , где  $(m = \dim Y)$ ,  $(n = \dim X)$ .

Обозначение  $(\text{Hom}_K(X, Y))$  — пространство линейных отображений из  $(X)$  в  $(Y)$ .

**中文翻译:**

$(\text{Hom}_K(X, Y))$  同构于  $(M_{m \times n}(K))$ , 其中  $(m = \dim Y)$ ,  $(n = \dim X)$ 。

符号  $(\text{Hom}_K(X, Y))$  表示从  $(X)$  到  $(Y)$  的线性映射空间。

---

**75. Что такое композиция линейных отображений?**

**俄语回答:**

Композиция  $(\psi \circ \phi)$  определяется как:

$$[(\psi \circ \phi)(\mathbf{v}) = \psi(\phi(\mathbf{v}))].$$

**中文翻译:**

线性映射的复合  $(\psi \circ \phi)$  定义为:

$$[(\psi \circ \phi)(\mathbf{v}) = \psi(\phi(\mathbf{v}))].$$

---

**76. Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений  $(\phi)$  и  $(\psi)$ ?**

**俄语回答:**

Матрица композиции  $(\psi \circ \phi)$  равна произведению матриц:

$$[A_{\psi \circ \phi} = A_{\psi} \cdot A_{\phi}].$$

**中文翻译:**

复合映射  $(\psi \circ \phi)$  的矩阵为各映射矩阵的乘积:

$$[A_{\psi \circ \phi} = A_{\psi} \cdot A_{\phi}].$$

---

**77. Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса.**

**俄语回答:**

Если базис  $(X)$  преобразуется матрицей  $(C)$ , а базис  $(Y)$  — матрицей  $(D)$ , то:

$$[A' = D^{-1} A C].$$

**中文翻译:**

若  $(X)$  的基变换矩阵为  $(C)$ ,  $(Y)$  的基变换矩阵为  $(D)$ , 则新矩阵为:

$$[A' = D^{-1} A C].$$