Espacio de Muestras y Eventos

Operaciones

$A \cup B$	Al menos A,B ocurre
$A \cap B$	A y B ocurren
$\overline{A}$	A no ocurre
$\varnothing$	El evento imposible
$A \cap B = \varnothing$	A y B son mut. excl.
$A \cap \overline{B}$	A ocurre y B no ocurre
$A \subset B$	S ocurre A => B

Medidas probabilísticas

Axiomas de σ-Algebra

A1 $\varnothing$ y Ω son elementos de F

A2 Si A $\in$ F, entonces $\overline{A} \in F$

A3 Si A_1,A_2,A_3,... son elementos de F => $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Axiomas de Medidas probabilísticas

A1 0 $\leq$ P[A] para cada evento de A.

A2 P[Ω] = 1

A3 P[A $\cup$ B] = P[A] + P[B] si los eventos de A y B son mutuamente excluyentes

A4 Si los eventos A_1,A_2,A_3,... son mutuamente excluyentes (eso es, $A_i \cap A_j = \varnothing$ if $i \neq j$), entonces

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]$$

Teorema

Sea P[$\cdot$] la medida de probabilidad definida en F de eventos del espacio de muestra Ω. Entonces:

(a) P[$\varnothing$] = 0

(b) P[A] = 1 - P[$\overline{A}$] para cada evento A

(c) P[A $\cup$ B] = P[A] + P[B] - P[A $\cap$ B] para cada evento A

(d) A $\in$ B implica que P[A] $\leq$ P[B] para cada evento A,B

Análisis combinatorio

Permutaciones y Combinaciones

Permutaciones	Combinaciones
Formas de seleccionar k elmt. de n elmt.	
Las repeticiones no están permitidas	
El orden es importante	El orden no es importante
Conj. ord. de n elmt. tomando k a la vez	Subconj. de n elmt. tomando k a la vez
$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Probabilidad Condicional

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Si los sucesos son independientes:

$$P[A|B] = P[A] \quad P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

Regla de multiplicación

$$P[A \cap B] = P[A]P[B|A]$$

$$P[A \cap B] = P[B]P[A|B] \quad if \quad P[A] \neq 0$$

Regla general de la multiplicación

$$P[A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n] = P[A_1]P[A_2|A_1]P[A_3|A_1 \cap A_1]$$
$$...P[A_n|A_1 \cap ... \cap A_n]$$

Ley de la Probabilidad Total

(a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ if $i \neq j$ (mutuamente excluyentes)

(b) $P[A_i] > 0, i = 1, 2, ..., n$

(c) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

$$P[A] = P[A_1]P[A|A_1] + P[A_2]P[A|A_2] + ...$$
$$... + P[A_n]P[A|A_n]$$

Teorema de Bayes

$$P[A_i|B] = \frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A_i]P[B|A_i]}{\sum p(A_i)P[B|A_i]} = \frac{P[A_i]P[B|A_i]}{P[A]}$$

Variables aleatorias

Propiedades de la función de Distribución

(D1) F es una función no descreciente; eso es; x < y implica F(x) $\leq$ F(y)

(D2) $lim_{x \to +\infty}$ F(x) = 1

(D3) $lim_{x \to -\infty}$ F(x) = 0

Función de Densidad

(a) $f(x) \geq 0$ para todo valor real de x

(b) f es integrable y

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx \text{ if a < b}$$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(d) $F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ para cada valor real de x

Parámetros de Variables Aleatorias

Media o valor esperado de X

$$\mu = E[x] = \sum_{x_i} x_i p(x_i)$$

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Varianza de X

$$\sigma^2 = Var[x] = E[(X-\mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

$$\sigma^2 = Var[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Coeficiente de Variación

$$C_x^2 = \frac{\sigma^2}{E[X]^2} = \frac{Var[X]}{E[X]^2}$$

Momentos de orden r

$$M_r(m) = \begin{cases} \sum\limits_i (i-m)^r P_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^r f(x)dr \end{cases}$$

Distribución conjunta

Distribución conjunta F de X e Y

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)]$$

$$p(x,y) = P[X = x, Y = y]$$

Distribución conjunta continua F de X e Y

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{u} f(x,y)dxdy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Progresiones

Aritmética

$$\sum a_i = \frac{a_n + a_1}{2} n$$

Geométrica

$$\sum a_i = \frac{a_n r - a_1}{r-1} n$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i n^{n-1}$$

Series

Exponencial

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$$

Taylor/McLaurin

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^{i-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Variables aleatorias discretas

Distribución	Rango	Func. probabilidad	E[X]	V[X]	F.G. Momento
Uniforme U(n)	x $\in \{0,1,...,x_n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{1}{n}\sum_i e^{tx_i}$
Bernoulli Be(p)	x $\in \{0,1\}$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	p(1-p)	$pe^t+(1-p)$
Binomial Bi(n,p)	x $\in \{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	np	np(1-p)	$[pe^t+(1-p)]^n$
Geométrica Ge(n,p)	x $\in \{1,...,\infty\}$	$p(1-p)^{x-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{np}{1-n(1-p)}$
Binomial negativa BN(r,p)	x $\in \{n,...,\infty\}$	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\frac{np}{1-n(1-p)}$
Poisson Po(λ)	x $\in \{0,...,\infty\}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

Variables aleatorias continuas

Distribución	Rango	Func. probabilidad	E[X]	V[X]	F.G. Momento
Uniforme continua U(n)	[a,b]	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Gaussiana $N(\mu,\sigma^2)$	$[-\infty,\infty]$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Exponencial $Exp(\lambda)$	$[0,\infty]$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-1}$
Erlang-K $E_k(\lambda)$	$[0,\infty]$	$\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-k}$
Gamma $Gamma(\alpha,\beta)$	$[0,\infty]$	$x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$

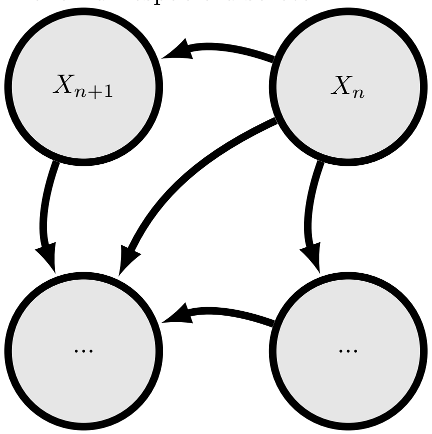
Procesos de Markov

Son procesos estocásticos de menor orden

$$P(x(t_{n+1} \leq x_{n+1}|x(t_n) = x_n, x(t_{n-1}) = x_{n-1}...) = P(x(t_{n+1} \leq x_{n+1}|x(t_n) = x_n)$$

El futuro solo depende del presente, no del pasado

Tienen un espacio discreto

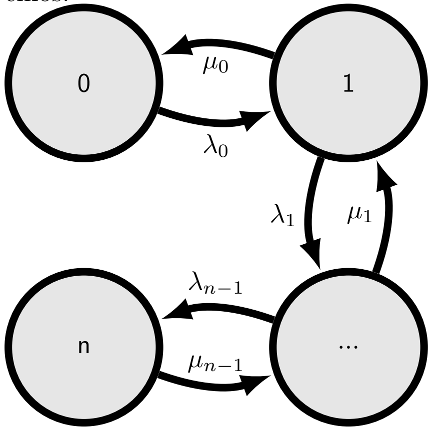


Cadenas de Markov Ergódicas
Desde cualquier estado podemos llegar a otro en un número finito de saltos de estado

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo (CTMC
No consideramos el factor **discreto**. Ya en los arcos no tenemos la probabilidad de transición, sino la tasa (número de transiciones por unidad de tiempo). Podemos utilizar un parámetro equivalente: **tiempo de permanencia**. Distribución aleatoria continua (sin memoria) exponencial cuyo parámetro λ es la **tasa de salida del nodo**.

Procesos de nacimiento y muerte

Los estados alcanzados solo son los vecinos.



λ: tasa de nacimiento
μ: tasa de muerte

Características

- CMTC homogénea: La probabilidad solo depende de la duración y no del instante inicial.
- Nacimiento y muerte son independientes.
- La probabilidad de llegada (nacimiento) con K usuarios es: $\lambda_k \Delta t + \theta(\Delta t)$
- La probabilidad de salida (muerte) con K usuarios es: $\mu_k \Delta t + \theta(\Delta t)$

Probabilidades

Probabilidad total

$$P_k(t+\Delta t) = \overbrace{P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}\Delta t + \theta(\Delta t)]}^{\text{Probabilidad nacimiento estado k-1}} + \overbrace{P_{k+1}(t)[\mu_{k+1}\Delta t + \theta(\Delta t)]}^{\text{Probabilidad muerte estado k+1}} + \overbrace{P_k(t)[(1-\lambda_k\Delta t) + (1-\mu_k\Delta t) + \theta(\Delta t)]}^{\text{Probabilidad no nacimiento y no muerte estado k}}$$

Caso particular K=0

$$P_0(t+\Delta t) = \overbrace{P_1(t)[\mu_1\Delta t + \theta(\Delta t)]}^{\text{Probabilidad muerte estado 1}} + \overbrace{P_0(t)[(1-\lambda_0\Delta t) + \theta(\Delta t)]}^{\text{Probabilidad no nacimiento estado 0}}$$

Aplicando el limite

$$dP_k(t) = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} - P_k(t)(\lambda_k + \mu_k)$$

Son muy complicados de resolver por eso existe una solución más sencilla para los **procesos de nacimiento y muerte**. **Eliminamos la dependencia del tiempo**
$0 = \lambda_{k-1}P_{k-1} + P_{k+1}\mu_{k+1} - P_k(\lambda_k + \mu_k)$
$0 = P_1\mu_1 - P_0(\lambda_0)$

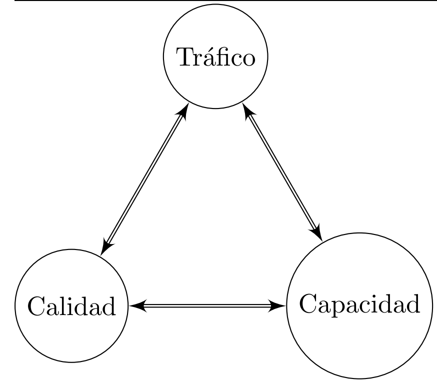
Probabilidades de estado

$$P_k = \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_k}P_0 = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu i+1}P_0$$

Probabilidades de sistema vacio

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$$

Conceptos de Teletráfico y QoS



- **QoS (Quality of Service)** (seguridad, calidad...)
- **GoS (Grade of Service)** es la calidad que ofrece cada elemento de la red. El GoS de P2P es la QoS.
- **Control de tráfico** verifica usuarios conectados a la red usan los servicios que tienen contratado

Introducción teoría de colas

$p_0 = \frac{1}{1+\sum_1^{\infty}\prod_0^{i-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$
$p_n = p_0(\prod_0^{i-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}})$
$A/B/m/K/N/Z$ Notación de Kendall
$T_o = \lambda\frac{1}{\mu} = T_c + T_p$ Tráfico ofrecido
B_{LL}: Congestión en llamdas
B_T: Congestión en tiempo
$\rho = \frac{T_c}{m}$: Ocupacion media
$\overline{\lambda}$: Tasa efectiva de llegadas
$\overline{N}$: Número medio de usuarios en el sistema
$\overline{Q}$: Número medio de usuarios en cola
$\overline{T}$: Tiempo medio de permanencia en el sistema
$\overline{W}$: Tiempo medio de espera
$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu}|$ Fórmula de Little:
$\overline{N} = \overline{T\lambda}$
$\overline{N} = \overline{Q} + m\rho$
$\overline{Q} = \overline{\lambda} \cdot \overline{W}$

$T_0 = \frac{1}{\mu}\sum_0^k \lambda_i p_i$ $\quad T_c = \frac{1}{\mu}\sum_0^k \mu_i p_i$

$T_p = \frac{1}{\mu}\lambda_k p_k$ $\quad B_T = \sum_m^k p_i$

$\overline{\lambda} = \sum_0^{k-1}\lambda_i p_i$ $\quad \overline{N} = \sum_1^k i p_i$

$\overline{Q} = \sum_{m+1}^k (i-m)p_i$ $\quad \overline{T} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}}$

$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\overline{\lambda}}$ $\quad \rho = \frac{\overline{\lambda}\frac{1}{\mu}}{m}$

Modelo de Erlang (Pérdidas)

M/M/m/m

$\lambda_i = \lambda \mu_i = i\lambda$

$p_0 = \frac{1}{\sum_1^m A^i i!}$ $\quad p_n = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_0^m A^i i!}$

$T_0 = \frac{\lambda}{\mu} = A$ $\quad T_c = A\cdot p_0 \sum_0^{m-1}\frac{A^i}{i!}$

$T_c = A(1-p_m)$

$T_p = A\frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_0^m \frac{A^i}{i!}}$

$B_{LL} = \frac{T_p}{T_o} = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_0^m \frac{A^i}{i!}} = E_{1,m}(A)$

$B_T = p_m = B_{LL}$

$\overline{\lambda} = \lambda(1-p_m)$

$\overline{N} = T_c$ $\quad \overline{Q} = 0$

$\overline{W} = 0$ $\quad \overline{T} = \frac{1}{\mu}$

$\rho = \frac{T_c}{m} = \frac{A(1-B_{LL})}{m}$

$T_{c_i} = A[E_{1,i-1}(A) - E_{1,i}(A)]$: Selecc seq.

$E_{1,m} = E_{1,m+1}(A + ATC)$

ATC: Capacidad por enlace adicional

Casos concretos

$\cdot M/M/\infty/\infty$

$\rho_0 = e^{-A} p_n = \frac{A^n}{n!}e^{-A} B_{LL} = \sum_{m+1}^{\infty} p_i$

$\cdot M/M/\infty/\infty$

$\rho_0 = \frac{1}{1+A} p_1 = \frac{A}{1+A}$

Modelo de Engset (Pérdidas)

M/M/m/m/N

$\lambda_i = \begin{cases}(N-i)\cdot\lambda & i = 0,...,m-1\\ 0 & \text{resto de casos}\end{cases}$

$\mu_i = \begin{cases}(i\mu) & i = 1,...,m\\ 0 & \text{resto de casos}\end{cases}$

$p_0 = \frac{1}{\sum_0^m \binom{N}{i}A^i}$

$p_n = p_0 A^n \binom{N}{n}$

$T_0 = A\cdot N\cdot p_0 \sum_0^m \binom{N-1}{i}A^i$

$T_c = A\cdot N\cdot p_0 \sum_0^{m-1} \binom{N-1}{i}A^i = \overline{N}$

$T_p = A\cdot N\cdot p_0 \binom{N-1}{m}A^m$

$BT = Eng_{1,m}(N+1, A) = p_m$

$BLL = Eng_{1,m}(N, A)$

$T_c = \frac{m\overline{\lambda}}{\mu}$

$\overline{T} = \frac{1}{\mu}$

$\rho = \frac{T_c}{m} = \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$

$A = \frac{a}{1-a(1-B_{LL})}$

(Suponemos B_{LL}, calculamos A, con esa A calculamos nueva B_{LL} y repetimos hasta que el resultado coverja)

Modelo de Bernoulli

Requisito: $N \le m$

$p_0 = \frac{1}{(1+A)^N}$

$p_n = \frac{\binom{N}{n}A^n}{(1+A)^N} = \binom{N}{n}\cdot a^n \cdot (1-a)^{N-m}$

$T_0 = aN = T_c; T_p = 0$

$B_{LL} = 0$

$B_T = a^N$

$\overline{\lambda} = \lambda N(1-a)$

$\overline{N} = aN$

$\overline{T} = \frac{1}{\mu}$

$\rho = \frac{aN}{m}$

Aproximaciones

Engset −> Erlang si (N>>m)

Engset −> Bernoulli si (N<2m) con $B_{LL} = \binom{N-1}{m}a^m(1-a)^{N-1-m}$

Modelo de Erlang (Espera)

M/M/m

$\lambda_i = \lambda$

$\mu_i = \begin{cases}(i\mu) & i = 1,...,m\\ m\lambda & m < i\end{cases}$

$p_0 = \frac{1}{\sum_0^m \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!}\cdot\frac{A}{m-A}}$

$p_n = \begin{cases}p_0\frac{A^n}{n!} & 1 \le n \le m\\ p_0\frac{A^n}{m!m^{n-m}} & m < n\end{cases}$

$T_0 = A$

$T_C = A$

$T_p = 0$

$T_d = A\cdot\frac{m}{m-A}p_m$

$B_d = \frac{m}{m-A}p_m = E_{2,m}(A)$

$E_{2,m}(A) = \frac{mE_{1,m}(A)}{m-A[1-E_{1,m}(A)]}$

$B_T = E_{2,m}(A)$

$B_{LL} = 0$

$\overline{\lambda} = \lambda$

$\overline{Q} = \frac{A}{m-A}E_{2,m}(A)$

$\overline{N} = T_c + \overline{Q} = A + \frac{A}{m-A}E_{2,m}(A)$

$\overline{T} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu(m-A)}E_{2,m}(A)$

$\rho = \frac{A}{m}$

$P(W > t) = E_{2,m}(A)e^{-(1-\rho)m\mu t}$

Caso particular: M/M/1

$p_0 = 1 - A$

$p_n = A^n(1-A)$

$T_d = A^2$

$B_d = E_{2,1}(A) = A$

$\overline{Q} = \frac{A^2}{1-A}$

$\overline{N} = \frac{A}{1-A}$

$\overline{W} = \frac{A}{\mu-A}$

$\overline{T} = \frac{A}{\mu-\lambda}$

$\rho = A$

Modelo de Engset (Espera)

M/M/m/N/N

$\lambda_i = (N-1)\lambda \quad 0 \le i \le N$

$\mu_i = \begin{cases}(i\mu) & i = 1,...,m\\ m\mu & m < i \le N\end{cases}$

$p_0 = \frac{1}{\sum_0^{m-1}\binom{N}{i}A^i + \sum_m^N \frac{i!}{m!\cdot m^{i-m}}\binom{N}{i}A^i}$

$p_n = \begin{cases}\binom{N}{n}A^n p_0 & 0 \le n \le m\\ \frac{n!}{m!m^{n-m}}\binom{N}{n}A^n p_0 & m \le n \le N\end{cases}$

$T_0 = AN\frac{p_0}{p_0|_{N-1}} = T_C$

$T_p = 0$

$T_d = ANp_0 \sum_m^{N-1}\frac{i!}{m!m^{i-m}}\binom{N-1}{i}A^i$

$B_T = \sum_m^N \frac{i!}{m!m^{i-m}}\binom{N}{i}A^i p_0$

$B_{LL} = 0$

$B_d = \sum_m^{N-1}\frac{i!}{m!m^{i-m}}\binom{N-1}{i}A^i p_0|_{N-1} = B_T|_{N-1}$

$Eng_{2,m}(N,A) = \frac{\sum_m^{N-1}\frac{i!}{m!m^{i-m}}\binom{N-1}{i}A^i}{\sum_0^{m-1}\binom{N-1}{i}A^i + \sum_m^{N-1}\frac{i!}{m!m^{i-m}}\binom{N-1}{i}A^i}$

$\overline{N} = p_0[\sum_{i=1}^{m-1} i\binom{N}{i}A^i + \sum_{i=m}^{N} i\binom{N}{i}A^i\frac{i!}{m!m^{i-m}}]$

$\overline{Q} = \overline{N} - m + p_0\sum_0^{m-1}(m-i)\binom{N}{i}A^i$

$T_0 = T_C = A(N-\overline{N})$

$\overline{\lambda} = (N-\overline{N})\lambda$

$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda(N-\overline{N})}$

$\overline{W} = \overline{T} - \frac{1}{\mu}$

$\rho = \frac{A}{m}(N-\overline{N})$

$A = \frac{a}{1-a(1+\mu\overline{W})} = \frac{a}{1-\frac{\overline{N}}{N}}$

Redes de Jackson (Abiertas)

Definición

Los usuarios entran, reciben el servicio y se van.

Características

- Los usuarios entran aleatoriamente a la red. (No todos los nodos permitan el acceso).
- K sistemas en cola
- Cada sistema tiene m_i servidores
- Todos los sistemas tienen capacidad ∞
- El tiempo de servicio es una exp. de media $\frac{1}{\mu_i}$
- Las llegadas del exterior siguen un proceso de Poisson de media γ
- Nodo de entrada aleatorio

Probabilidades

$q_{s,i}$	**Probabilidad de entrada** (P_s): o de que un usuario llegue al sistema por el nodo i-ésimo.
$q_{i,d}$	**Probabilidad de salida** (P_d): que un usuario abandone el sistema.
$q_{i,j}$	**Probabilidad de salto** (P_j): es decir, que vya de un sistema i a un sistema j. $q_{ii} \neq 0$
$\sum_{i=1}^{k} q_{s,i} = 1$	Todos los usuarios que llegan acceden a un nodo
$\sum_{j=1}^{k} q_{i,j} + q_{i,d} = 1$ $(1 \leq i \leq k)$	Todos los usuarios tienen que salir

Nota: Las redes que cumplen estas propiedades se llaman **REDES DE JACKSON (M / M / m_i)**
En este caso concreto:

$$P(n_1, n_2, ..., n_m) = \prod_{i=1}^{k} p_i(n_i)$$

Teorema de Burke

La salida de un sistema M/M/m con llegadas γ sigue teniendo tasa γ

$F(t) = P_r\{T \leq t\} = 1 - \sum_{0}^{\infty} G_i(t)$

$G_i(t) = p_i(t)e^{-\lambda t}$

$\begin{cases} p_i = \frac{\lambda}{i-\mu} p_{i-1} & 1 \leq i \leq m \\ p_i = \frac{\lambda}{m\mu} p_{i-1} & m \leq 1 \end{cases}$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - \sum_{0}^{\infty} p_i e^{-\lambda t}$

$\lambda_i = \gamma q_{si} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_{ji} \qquad 1 \leq i \leq k$

$\overline{T} = \sum_{1}^{k} \overline{TT_1}$

$e_i = \frac{\lambda_i}{\gamma}$

$\overline{T} \cdot \overline{T_1} = e\overline{T_1}$

$o_i = e_i \frac{1}{\mu_i}$

Redes cerradas

Defnición
Los usuarios permanecen en el sistema, ni entran ni salen. Población constante.
Características

- Los usuarios ya se encuentran en el sistema
- M sistemas. (M / M / m)
- Tenemos K usuarios

Probabilidades

$q_{s,i} = 0$	**Probabilidad de entrada** (P_s): o de que un usuario llegue al sistema por el nodo i-ésimo.
$q_{i,d} = 0$	**Probabilidad de salida** (P_d): que un usuario abandone el sistema.
$q_{i,j}$	**Probabilidad de salto** (P_j): es decir, que vya de un sistema i a un sistema j. $q_{ii} \neq 0$
$\sum_{i=1}^{k} q_{i,j} = 1$ $(1 \leq i \leq k)$	Probabilidad de salto entre nodos del sistema
$S = \{n_1, n_2, ..., n_m \mid n_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{m} n_i = k\}$	No todos los estados son posibles. Estados posibles del sistema

Gordon y Newell

$P(n_1, n_2, ..., n_M) = \frac{1}{G(k,M)} \prod_1^M P_i(n_i)$

$G(k, M) = \sum_S \prod_i^M p_i(n_i)$

$P(n_1, n_2, ..., n_M) = \frac{\prod_1^M p_i(n_i)}{\sum \prod_1^M p_i(n_i)}$

Caso particular (más usado)
M/M/1

$p_i(n_i) = (1 - A)A^{n_i}$

$P(n_1, n_2, ..., n_M) = \frac{\prod_1^M (1-A)A^{n_i}}{\sum \prod_{j=1}^M (1-A)A^{n_i}}$

$\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\mu}$

$\lambda_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji} \qquad i = 1, 2, ..., M$

Estos sistemas tienen infinitas soluciones del tipo:

$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_M) = \alpha(\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_M')$

Algoritmo de valor medio (Lavenberg y Raiser)

Recursivo en función de K.

$N_1[k-1] \overbrace{-->}^{\text{lleva a}} T_1[k] \overbrace{-->}^{\text{lleva a}} N_1[k] \overbrace{-->}^{\text{lleva a}} \lambda_i[k]$

$\alpha = \frac{\lambda_i[k]}{\lambda_i'}$

Teorema de llegadas (Lavenberg)

"En una red cerrada con k usuarios, la probabilidad de estado percibida por un usuario llegando a un nodo es la que tendría la red si hubiera un usuario menos."

$T_1[k] = \frac{1}{\lambda_i}(\overline{N_1[k-1]} + 1) -> $ Primer paso del proceso recursivo

$N_1[k] = k\frac{\lambda_i' T_1[k]}{\sum_{j=1}^M \lambda_j' T_j[k]} - >$ Segundo paso del p.r.

Lo anterior se repite hasta llegar a la población real del sistema y finalmente:

$\lambda_i[k] = \frac{\overline{N_1[k]}}{\overline{T_1[k]}} = k\frac{\lambda_j'}{\sum_{j=1}^M \lambda_j' T_j[k]}$

Sistemas de desbordamiento

Condiciones

1) $\overline{N}$ bajo
2) V[N]>E[N]
3) Para mismo $\overline{N}$,B_{LL} aumenta

Sistemas M/M/m/m

Sist. Ppal. $\begin{cases} \lambda_{ij} = \lambda \\ i = 0, ..., m-1 \text{ y } j = 0, ..., m' \\ \lambda_{ij} = 0 \text{ resto} \end{cases}$

Sist. Desbord. $\begin{cases} \lambda_{ij} = \lambda \\ i = m \text{ y } j = 0, ..., m' - 1 \\ \lambda_{ij} = 0 \; 1 < m \end{cases}$

Sistema Principal: $\mu_{ij} = i\mu$
Sistema Desbordamiento: $\mu_{ij} = j\mu$

Aproximación de Kosten

Supone $lim_\infty m' = \infty$

$p_{ij} = (-1)^j g_0(m) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-A)^k}{k!} \frac{g_k(i)}{g_{k+1}(m) g_k(m)}$

$g_k(l) = e^{-A} \sum_{i=0}^{l} \binom{k+i-l}{i} \frac{A^{l-i}}{(l-i)!}$

$g_0(l) = e^{-A} \frac{A^l}{l!}$

$p_j = \sum_{i=0}^m p_{ij}$

$B_{LL} = \sum_{i=0}^{m'} p_j$

Wilkinson

$E[j] = AB_{LL} = A_d$

$V[j] = A_d(1 - A_d + \frac{A}{1+m+A_d-A})$

$\lambda_j = \lambda(1-\theta) + j\theta\mu \qquad 0 \leq \theta \leq 1$

$p_0 = (1-\theta)^{A'}$

$A' = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1-\theta}{\theta}$

$\frac{\lambda}{\mu} = A_d$

$p_k = \binom{A'+k-1}{k}\theta^k(1-\theta)^{A'}$

$E[j] = A'\frac{\theta}{1-\theta} = A_d$

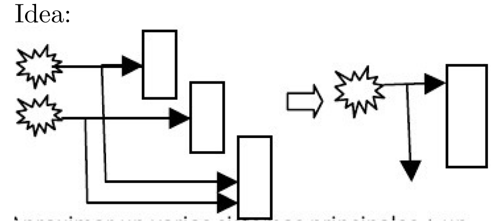
$V[j] = A'\frac{\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{A_d}{1-\theta}$

$\alpha = \sum \alpha_i$

$v = \sum v_i$

Modelo del tráfico aleatorio equivalente

Sólo sirve si buscamos el tráfico perdido por el sistema de desbordamiento
Idea:



Aproximar varios sistemas principales + un sistema de desbordamiento a un único sistema equivalente cuyas pérdidas sean las mismas.
Procedimiento:
1) Obtener α y v
2) Obtener A_{eq} y m_{eq}

Con tablas (abanicos de Wilkinson)
$\alpha = A_{eq} E_{1,m_{eq}}(A_{eq})$
$v = \alpha(1 - \alpha + \frac{A_{eq}}{1+m_{eq}+\alpha-A_{eq}})$
Con aproximación de Rapp:
$A_{eq} = v + 3z(z-1)$
$m_{eq} = \frac{A_{eq}}{1-\frac{1}{\alpha+z}} - \alpha - 1$
$z = \frac{v}{\alpha}$
3) Obtener A_{eq} y $m' + m_{eq}$
4) Resolver el sistema equivalente.
Importante: el único parámetro que coincide entre el sistema real y la aproximación es el tráfico perdido, no usar la aproximación para calcular cualquier otra cosa.
$G_0 S_i = \frac{T_{p_i}}{T_{o_i}} \frac{\alpha'}{\alpha} = (enM/M/m/m) \frac{\alpha_i}{A_i} \frac{\alpha'}{\alpha}$

Sistemas M/G/1

No son de nacimiento y muerte. No se puede hallar p_i
$\overline{Q} = \lambda \overline{W}$
$\overline{N} = \lambda \overline{T}$
$\overline{T} = \overline{W} + E[S]$
$\overline{W} = \overline{W_0} + \overline{W_1}$
$R[S] = \frac{E[S^2]}{2E[S]}$
$\overline{W_0} = R[S]\rho = \sum \frac{\lambda_i E[S_i^2]}{2}$ (Con varios)
$\overline{W_1} = \overline{Q} E[S]$
$\overline{W} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}$
$\overline{Q} = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)}$
$\overline{T} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} + E[S]$
$\overline{N} = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} + \rho$

Fórmulas de Pollaczek-Khinthine
$C_S^2 = \frac{V[S]}{E^2[S]}$
$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + C_S^2)$
$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + C_S^2)$

Fórmulas de Takácks
$E[W^2] = 2\overline{W}^2 + \frac{\lambda E[S^3]}{3(1-\rho)}$
$E[T^2] = E[W^2] + \frac{E[S^2]}{1-\rho}$
$E[S^2] = E^2[S](1 + C_S^2)$
$E[S^3] = E^3[S](1 + C_S^2)(1 + 2C_S^2)$

Sistemas M/G/1 con prioridades

P clases en la población.
λ_i: tasa de llegadas de la clase i-ésima
$E[S_i]$: tiempo medio de servicio de la clase i-ésima
$\rho_i = \lambda_i E[S_i]$
$\lambda = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i$
$E[S] = \sum_{i=1}^{P} \frac{\lambda_i}{\lambda} E[S_i]$ (También vale para momento orden 2)
$\rho = \sum_{i=1}^{P} \rho_i = \lambda E[S]$

Teorema de conservación
Para una disciplina conservativa y sin desalojo se cumple:
$\sum_{i=1}^{P} \rho_i \overline{W_i} = \frac{\rho \overline{W_0}}{1-\rho}$
La disciplina de cola típica en estos sistemas es HOL. **HOL (Head of line)**
Cuando un usuario llega al sistema, no se pone el último, se pone inmediatamente después del último usuario de prioridad menor o igual a la suya.
$\overline{W_r^0}$: tiempo medio al desalojo del servidor
$\overline{W_r^1}$: tiempo medio en servir a los que me preceden al llegar
$\overline{W_r^2}$: tiempo medio en servir a los más prioritarios durante la espera
$\overline{W_r} = \overline{W_r^0} + \overline{W_r^1} + \overline{W_r^2}$
$\overline{W_r^0} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\lambda_i E[S_i^2]}{2}$
$\overline{W_r^1} = \sum_{i=1}^{r} \rho_i \overline{W_i}$
$\overline{W_r^2} = \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i \overline{W_r}$
$\overline{W_r} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\lambda_i E[S_i^2]}{2} + \sum_{i=1}^{r} \rho_i \overline{W_i} + \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i \overline{W_r}$
Esto da lugar a un sistema de ecuaciones triangular que, resuelto empezando por la clase más prioritaria, da lugar a la fórmula de Cobham.

Fórmula de Cobham
$\overline{W_r} = \frac{\overline{W_0}}{(1-\sum_{i=1}^{r-1}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{r}\rho_i)}$

Función de costes
$\sum_{i=1}^{P} C_i \overline{W_i}$, asignamos prioridad de manera que:
$\frac{C_1}{\rho_1} > \frac{C_2}{\rho_2} > ... > \frac{C_p}{\rho_p}$

Anexo

Fórmula de Engset
$Eng_{1,m}(N, A) = \frac{\binom{N-1}{m} A^m}{\sum_0^m \binom{N-1}{i} A^i}$

Notación de Kendall

A/B/m/K/N/Z
A: Patrón de llegadas

- G: Tiempo entre llegadas con distribución General
- H_k: Distribución de tiempo entre llegadas para k etapas de tipo hiperexponencial.
- E_k: Distribución de tiempos entre llegadas de tipo Erlang-K.
- M: Distribución de tiempos entre llegadas de tipo exponencial
- D: Distribución de tiempos entre llegadas de tipo determinista

B: Patrón/Tiempo de servicio

- Idem al Patrón de llegadas

m: Número de servidores disponibles
K: Disciplina de la línea de espera

- FIFO (si es FIFO el valor se omite)
- LIFO
- SIRO (selección aleatoria de clientes)
- PRI (servicio por prioridad)

N: Capacidad del sistema

- Si es infinita se omite

Z: tamaño de la población

- Si es infinita se omite