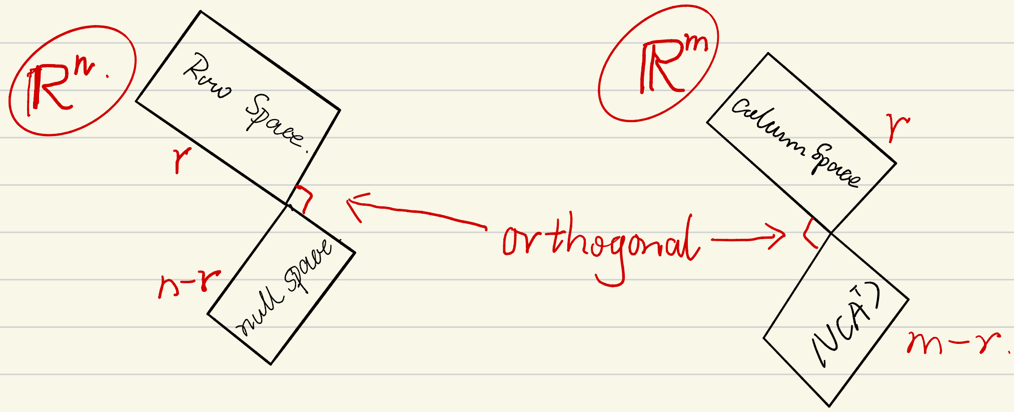
Lecture 14. Orthogonal Vector and subspace

1. Overview

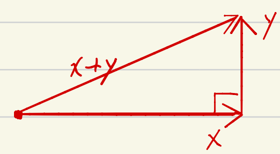


2. Orthogonal (Perpendicular)

2.1 什么是正交？

In N-D Space, the angle between those vectors is 90°.

即 they form a right triangle.



2.2 如何判断是否正交？

Take dot product. $x^T y = 0$

证明：已知是直角三角形.

有：$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

$$\begin{aligned} x^T x + y^T y &= (x+y)^T (x+y) \\ &= x^T x + y^T y + x^T y + y^T x \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^T y + y^T x = 0$ 　 $x^T y$ 与 $y^T x$ 结果一样

$\Rightarrow 2x^T y = 0$

得 $x^T y = 0$

例：$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x+y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\|x\|^2 = 14$ 　 $\|y\|^2 = 5$ 　 $\|x+y\|^2 = 19$

注：0 向量和任何向量都正交

2.3. Subspace 之间正交.

- 定义.

  Subspace S is orthogonal to subspace T means:

  $\boxed{\text{Every vector in } S \text{ is orthogonal to every vector in } T.}$

- 如果两个 Space 正交，那么，

  They don't Intersect in any Non-zero vector.

  如黑板和地面不是正交。

- 子空间角度：

  假设一个 R^2 的子空间，有三种：

  1. 整个 plane : D
  2. 一条过原点 Line : L
  3. 原点 : O

  1. L 与 D 何时正交？

     Never!
  2. L 与 O 何时正交？

     Always
  3. L 与另一个 L 何时正交？

     Perpendicular.

2.4 Row Space 和 Null Space.

- Row Space is orthogonal to Null Space.

  why?

  1、因为 $Ax=0$
  $$\begin{bmatrix} \text{Row 1 of } A \\ \text{Row 2 of } A \\ \cdots \\ \text{Row N of } A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

  可知所有的 Row dot product x equal to 0. 它们 orthogonal.

  2、要构成 Row Space，除了已知的 Row 以外，还有它们所有线性组合.

  证明：$c_1(\text{Row }1)^T x = 0$，$c_2(\text{Row }2)^T x = 0$ ……

  $(c_1 \text{Row }1 + c_2 \text{Row }2 + \cdots c_n \text{Row }N)^T x = 0$

  所以 Row space 与 Null Space 正交。

- Row Space 和 Null Space 的关系：

类似于将一个空间一分为二的两个子空间。
也就是说维数之和要等于 N。

反例：　一个 R^3 Space 中，

一条 Line 与另一条 Line 垂直，
它们不是一个 Row Space 和一个 Null Space，
因为维数之和不等于 3。

正例：
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 10\end{bmatrix} \qquad \overset{\text{rank}}{\dim}(R(A))=1$$

$$Ax=0$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$n=3 \quad r=1 \qquad \dim(N(A))=2.$$

A 的 Row Space 是一条一维的直线，对应的 Null Space 是一二维平面。
互相垂直。维数相加为 3.

所以得到以下定义：

$$\boxed{\text{Null Space 与 Row Space 是 Orthogonal Complements in } R^n}$$

也就是说：
　Null Space Contains All vectors $\perp$ row space.

3. "Solve" $Ax=b$，当无解时，求最优解.

在上一节中我们看到了，矩阵的数据来源于实际测量，那么就势必会有测量不准确的时候，例如有时候我们求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 方程时，如果 $\boldsymbol{A}$ 的列数太多，那么其中就很有可能混进去一些不准确的数据。这时，我们以往的手段求解方程并不会求出准确的解。这就引出了我们这部分内容。

既然无法求出解，那么我们就用一些手段求出方程最优解。类似于一种拟合。大致如下：
将方程改写成：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$，求解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 即为最优解。(注意：不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解)

首先研究 A^TA 的性质：

- A^TA 是方阵.

$$\underset{n\times m}{A^T}\ \underset{m\times n}{A} = \underset{n\times n}{A^TA}$$

- A^TA 是对称的.

$$(A^TA)^T = A^TA$$

☆ 但 A^TA 不一定可逆：

当 A 的 column vector 线性相关时，A^TA 不可逆。

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\1&3\\1&3\end{bmatrix},\quad A^TA=\begin{bmatrix}3&9\\9&27\end{bmatrix}$$

如何判断是否可逆？

1. $N(A^TA)=N(A)$：A^TA 与 A 的 Null Space 相同
2. $Rank(A^TA) = Rank(A)$

所以，如果 A^TA 可逆，则：

$N(A^TA)$ 只有 0 $\longrightarrow$ 各列线性无关.

求最优解前，先判断 A 的各列是否 Linear Independence.