Lecture 15. Projection into subspace.

1. overview.

Projection !!!

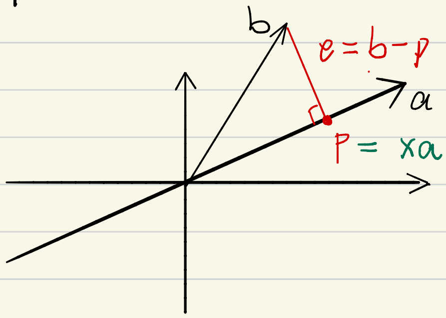
2. projection.

2.1 为什么要做 projection?

上一节讲过 $Ax=b$ 可能无解，因为 $m>n$ 而 b 不在 A 的 column space 中。所以就把 b 投影到 A 的 Column space 中，求得一个最优解。

$A\hat{x} = p$ (p: proj. of b onto column space)

2.2 二维空间中的投影.



p 是 b 在 a 上的投影，$p = xa$，x 是标量常数。Error $e = b - p$.
因为 a 与 e 垂直，得

$$a^T(b - xa) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x\,a^Ta = a^Tb.$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{a^Tb}{a^Ta} \qquad \boxed{p = ax}$$

Now $p = a \cdot \dfrac{a^Tb}{a^Ta}$

思考:

1. Double b 是否对 p 有影响?
   p 会变为原来的 2 倍
2. Double a 是否对 p 有影响?
   没有。

说明 b 对 p 有影响，所以把上式改写成:

☆ Proj. $p = Pb$. P 是一个 projection Matrix

$$\bullet\ P=\frac{aa^T}{a^Ta}$$ ← Matrix：col.×row.
← Number a^2

• P 投影矩阵有什么性质？

1、当一个 matrix 乘以一个向量，其结果可以理解为 matrix 的 column Space 关于 x 的一个线性组合，所以结果依然在这个 column Space 中。

回到 $p=Pb$，p 是一条直线，说明 $C(P)$ 也是一条直线。那么，$rank(P)=1$.

• P 是一个秩1矩阵，也可以通过 $a\cdot a^T$ 发现此规律。

2、P 是否对称呢？

$P=\frac{aa^T}{a^Ta}$，$P^T=\frac{aa^T}{a^Ta}$，所以 P 是 Symmetric matrix.

3、如果同时对 b 投影两次，结果是什么？

结果不变，因为第一次投影到 a，第二次 a 的投影是其本身。

$P^2b=Pb.\ \Rightarrow\ P^2=P$

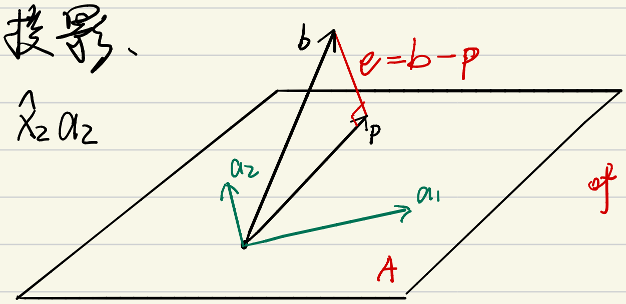
P is a rank 1 matrix.

1、$P^T=P$

2、$P^2=P$

2.3 三维空间投影、

$$p=\hat{x}_1a_1+\hat{x}_2a_2$$
$$=A\hat{x}$$



plane is a column space of $A=[a_1\ a_2]$

Question：$p=A\hat{x}$，Find $\hat{x}$.

$e=b-p=b-A\hat{x}$ is perp. to plane A

所以 $a_1^T(b-A\hat{x})=0$，$a_2^T(b-A\hat{x})=0$

合并 $\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\end{bmatrix}(b-A\hat{x})=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^T\underbrace{(b-A\hat{x})}_{e}=0\ \Rightarrow\ \boxed{A^TA\hat{x}=A^Tb}.$$

以上满足 $A^Tx=0$ 的形式，所以 e 是在 $N(A^T)$ 中。

又从4个基本空间可知：$N(A^T)\perp C(A)$

所以得 $e\perp C(A)$

已知. $A^TA\hat{x} = A^Tb$

- $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$
- $p = A\hat{x} = \boxed{A(A^TA)^{-1}A^T}b.$ 回忆：一维中是 $\frac{aa^T}{a^Ta}$

proj. matrix: $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 注：$(A^TA)^{-1}$ 不能拆分，因为A不一定是一个 Square Invertible Matrix.

- 验证 P 的 2 个性质：

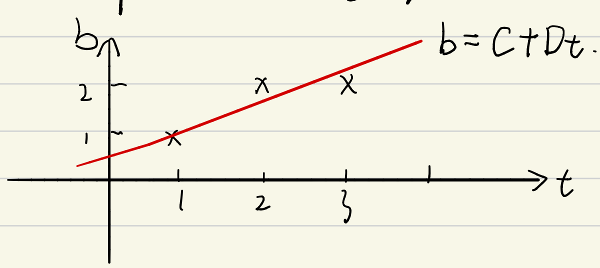
1. $P^T = P.$

$$(A(A^TA)^{-1}A^T)^T = (A^T)^T[(A^TA)^{-1}]^TA^T = A[(A^TA)^T]^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T$$

2. $P^2 = P$

$$A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T$$

3. Least squares. Fitting by a line.



t b.
(1,1) (2,2) . (3,2)
(代入) $b=C+Dt$

$$\begin{cases} C+D=1 \\ C+2D=2 \\ C+3D=2 \end{cases}$$ 无解. $\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$

求解该问题正是引入 Projection 的目的.