Lecture 20. Cramer's Rule, Inverse Matrix and Volume

1. Overview

   3 applications

2. Inverse Matrix

A^{-1} 公式：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$ where C is cofactor matrix

例：2阶逆矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

n×n 矩阵 $\longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T \longleftarrow$ 每个元素由 n-1 个元素的乘积组成。

↑ n个元素的乘积，

证明：要证明 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$ 等同于证明 $AA^{-1} = \frac{1}{|A|} AC^T = I$.

即 $AC^T = |A|I$.

$$AC^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \; |A| \end{bmatrix} = |A|I.$$

• 为什么任取一行乘以不是该行对应的 Cofactor 就等于 0？

以A第一行和 C^T 的第二列为例：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{2n} \end{bmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}.$$

以上公式可以改写成以下表达形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}.$$

前两行相同，根据性质4，上式等于0.

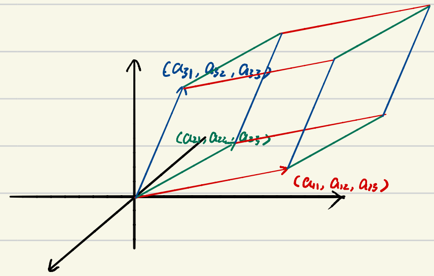
所以，$AC^T = \begin{bmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \; |A| \end{bmatrix}$

3. Cramer's Rule (No need)

$Ax = b \to x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} C^T b.$

用 elimination 最好.

4. Volume 体积.



假设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 对应的坐标:

$|A|$ 就是其体积.

4.1 单位矩阵. I.

即三个在坐标轴方向, 边长为 1 的向量组成的 Cube.
体积为 1.

4.2 Orthogonal Matrix Q

已知 $Q^TQ = I$, Q 的每一行向量之间都是正交关系, 长度为 1.
相当于 I rotate 了一下, 体积依然是 1.

证明: Volume = $\det Q$

$\det(Q^TQ) = \det I = 1$
$\det Q^T \cdot \det Q = 1 \quad \because \det A^T = \det A$

$(\det Q)^2 = 1 \Rightarrow \det Q = 1$

性质 3.b $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$