Lecture 21. Eigenvalues and Eigenvectors.

1. Overview

了解定义并求解。

2.

2.1 Definition.

有矩阵 A，Ax 可以理解为 x 是一个输入量，Ax 是一个输出量，在矩阵运算中，x 是一个向量。在 x 众多不同输入中，我们对输入和输出处在同一个方向上的 x 感兴趣。也就是说 Ax 与 x 平行，那么这个关系就可以写成以下形式：

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

这个 x 就是 eigenvector，λ 是 eigenvalue。

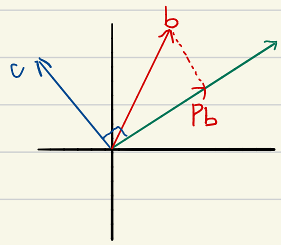
- 当 $\lambda = 0$ 时，

$$Ax = 0$$

Eigenvector x 处于 Null Space $N(A)$

当 A 是 Singular 时，(也就 x 存在非 0 向量使 $Ax=0$)，$\lambda = 0$ 就是一个 Eigenvalue.

- 投影矩阵的 Eigenvalue 和 Eigenvector 是什么呢？



1. b 不是 eigenvector，因为 b 和 Pb 不是同一方向
2. a 是 eigenvector (或任意在投影空间中的向量)，$Pa = a$，eigenvalue 等于 1.
3. c 是 eigenvector，它与投影方向垂直。$Pc = 0$，eigenvalue 等于 0.

1、For x in plane，$Px = x$，$\lambda = 1$
2、For $x \perp$ plane，$Px = 0$，$\lambda = 0$

- Permutation Matrix，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

1. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$Ax = x$，$\lambda = 1$
2. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$Ax = -x$，$\lambda = -1$

注：1. $n \times n$ 矩阵有 n 个特征值。
2. 所有特征值的和，等于对角线的和 (Trace)

$$\text{Sum of } \lambda\text{'s} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots a_{nn} = \text{Trace}(A)$$

2.2 求解 $Ax = \lambda x$

$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$

如果存在非0 x，那么 $A-\lambda I$ 一定 Singular.

Singular Matrices 的特点：行列式为0. $|A-\lambda I| = 0$

于是可以来寻找 λ。

例1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

解：

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$$

求 eigenvector.

① $\lambda = 4$, $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

② $\lambda = 2$, $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

通过例1可以发现，$\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)$，同时，$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A|$

例2. 在例1基础上，求 $A + 3I$ 的 eigenvalues 和 eigenvectors.

已知 $Ax = \lambda x$，$3Ix = 3x$，

所以 $(A+3I)x = (\lambda+3)x$

新的 eigenvalue 为 $\lambda + 3$，eigen vector 不变。

通过例2可以发现，一个矩阵在$\underbrace{\text{对角线上同时加上一个数 } b}_{+nI}$，$\lambda_{new} = \lambda_{old} + b$，x 不变。

反例：例3、已知 $Ax = \lambda x$，$Bx = \alpha x$，求 $A+B$ 的特征值与特征向量。

$(A+B)x = (\lambda + \alpha)x$ 是不成立的，

因为 $Ax = \lambda x$ 对应的x 和 $Bx = \alpha x$ 对应的x 通常是不一样的。

$$\left(\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}\right)$$

例4. Rotation Matrix Q that rotate vectors $90°$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
求 eigen value 和 eigenvectors.

已知 $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(Q) = 0$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |Q| = 1$

$$|Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$$

由此发现：如果一个矩阵是 anti-symmetric matrix, $A^T = -A$,
就没有实数特征值，只有虚数特征值。Vice versa

例5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2 - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3. \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

发现：此时只有一个特征值和特征向量
这种矩阵的特点是上三角矩阵，对角线元素相同。
这会造成 eigenvector 小于 n。

	λ	x
对称矩阵	n个实数	n个向量
反对称矩阵	n个虚数	
部分对称，	$\le n$	$\le n$.