Lecture 16. Projection Matrix & Least Squares.

1. Overview

- Project Matrix
- Least Squares.
- Orthonormal Vector

2. Projection Matrix.

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T \qquad p = P \cdot b.$$

2个特殊情况:

① 如果 b 在 Column Space 当中: $Pb = b$.

证明: 因为 b 在 Column Space 中. 有 $Ax = b$.

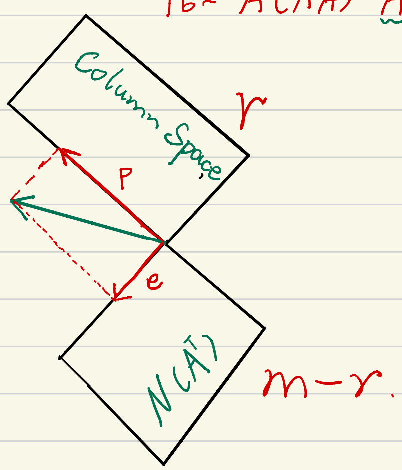
则 $Pb = A(\underbrace{A^TA})^{-1}\underbrace{A^TA}x = Ax = b$.

② 如果 b 垂直于 Column Space: $Pb = 0$

证明: 因为 b perp. to Column Space.

则有 $A^Tb = 0$, b是 $N(A^T)$

$Pb = A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^Tb}_{0} = 0$



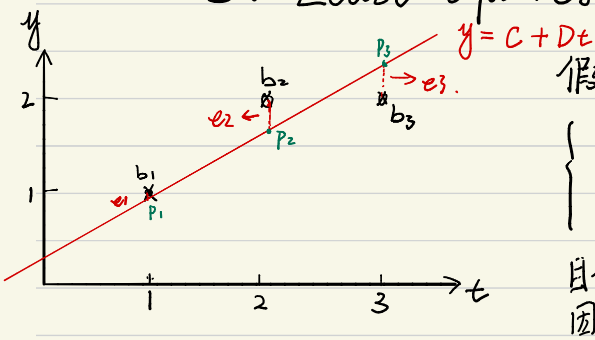
- $p + e = b$

p 和 e 是 b 在 Column Space 和 Null Space 上的投影.

- $p = Pb$
- $e = (I - P)b$

  $\uparrow$ proj. onto $\perp$ space.

3. Least Squares



假设过三个点:

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ C + 2D = 2 \\ C + 3D = 3 \end{cases} \quad \text{无解.}$$

改写成 $Ax = b$ 的形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

目的: 找到最优解。

因为无法同时经过三个点, 那么最优解一定和这三个点各有一定的 error. 现在 errors 的 sum of square 最小。

Least Square.

$$\min \quad \|e\|^2 = \|b - A\hat{x}\|^2$$

$$= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$Ax=b$ 无解，而 $A\hat{x}=p$ 是有解的.

Now find $\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}$, p

$$\boxed{A^TA\hat{x}=A^Tb}$$

1. $A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\6&14\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\1&2&2\\1&3&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}3&6&5\\6&14&11\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}3&6&5\\0&2&1\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}3\hat{C}+6\hat{D}=5\\6\hat{C}+14\hat{D}=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=\frac{2}{3}\\ \hat{D}=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \hat{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}t.$$

- Calculus perspective.

$$\min \|e\|^2=\|b-A\hat{x}\|^2$$
$$=e_1^2+e_2^2+e_3^2$$
$$=(C+D-1)^2+(C+2D-2)^2+(C+3D-2)^2$$

求偏导.

$b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $p=\begin{bmatrix}7/6\\5/3\\13/6\end{bmatrix}\Rightarrow e=\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/6\\+1/3\\-1/6\end{bmatrix}$

$b=\underbrace{p}_{\text{Column space}}+\underbrace{e}_{N(A^T)}$. 我们可以发现: $p\perp e$，又因为 p 在 $C(A)$ 中，所以 $e\perp C(A)$

eg. $e\perp\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

最终就是求 $\begin{cases}A^TA\hat{x}=A^Tb\\p=A\hat{x}\end{cases}$

结论：如果 A 的各列线性无关，则 A^TA 可逆。

证明：假设 $A^TAx=0$，如果证明 x 仅为 0，则能证明 A^TA 可逆。
现有如下假设：

- A 的各列线性无关、

乘上一个 x^T 变成 $x^TA^TAx=0$

$$(Ax)^TAx=0$$

$$\Rightarrow \quad Ax=0$$

因为 A 的各列线性无关，要使 $Ax=0$，
则 x 必为 0

所以 A^TA 可逆.

4、Orthonormal Vectors.

Columns definitely independent if they are

perp. unit vectors.

Ortho normal vectors.

Ortho：相互正交.

Normal：长度为 1，eg. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$