Linear Algebra.

May 13th 2020

Qi Jin

金骐.

Lecture 1. understand the matrix

1. Overview

从 row picture 和 column picture 的角度求解方程.

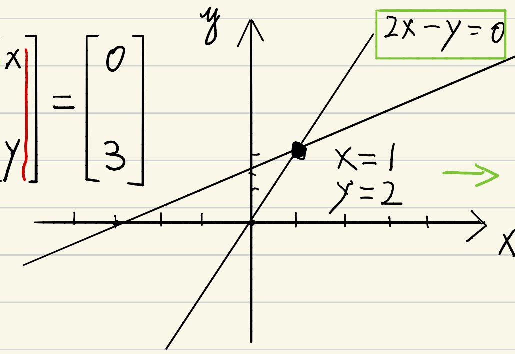
2. 几何解释.

eg1. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$AX = b$$

2.1 Row Picture: 一次取一行构成方程.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

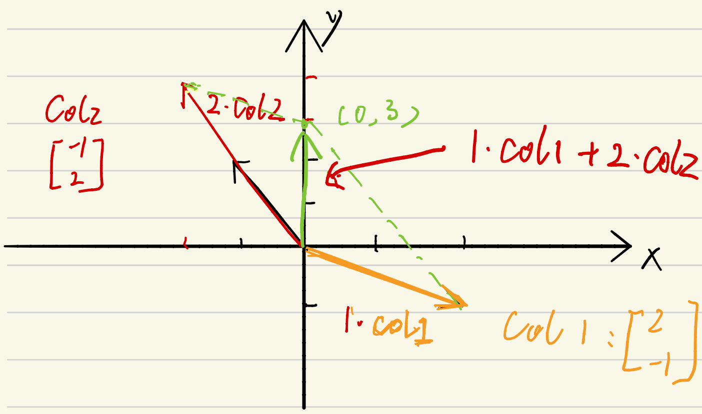


→ point on both line.

2.2. Column Picture.

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

find the $\boxed{\text{Linear Comb. of Columns.}}$



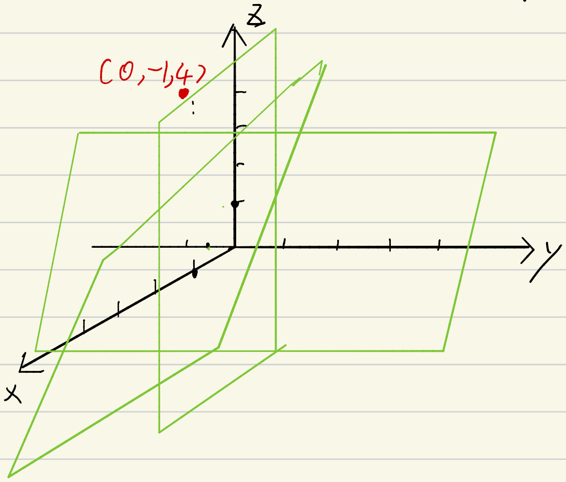
$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}}$

$AX = b$: $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 对于任意 x 和 y，可以得到矩阵 A 的列向量的所有线性组合，这个线性组合构成了矩阵 A 的列空间，该列空间构成 $\mathbb{R}^2$。从方程的角度出发，对于任意 b，Ax = b 有解。

3、推广

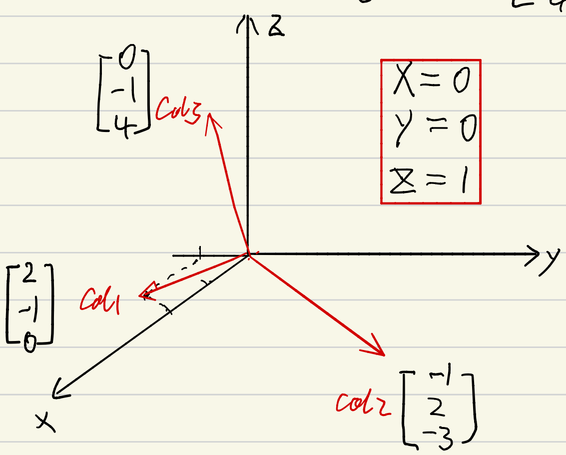
eg2. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

3.1 Row Picture：三个面交于一点



3.2 Column Picture

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Singular：一个列向量可以由其它列向量线性组合而成.

eg. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

只能构成一个平面.

Can I solve $Ax=b$ for every b?

从线性组合的角度来讲，问题变为：矩阵A的列向量的线性组合是否可以 fill 一个 3-D space?

☆ 对于 non-singular matrix A, the answer is Yes!!!

3.3、矩阵乘法

例如Ax ，如果我们已知一个矩阵 A 和一个向量 x，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如 A = $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$，x = $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，我们这样求：

- 方法 1：将矩阵 A 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即 x 每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做 A 各列的线性组合。

- 方法 2：将矩阵 A 看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2,5)\cdot(1,2)\\(1,3)\cdot(1,2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法：$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$$

Lecture. 2. Eliminate with Matrices.

1. Overview.

- Elimination：计算机方程求解
- Back - Substitution
- Elimination Matrics.
- Matrix Mulitiplication.

2. Elimination to solve equations: elimination & Back-subst.

2.1 Elimination:

主要以下2种情形：

- Success：Can find all non-zero pivots. 可逆
- Failure：At least one "pivot" is zero. 不可逆.

eg. 求解.
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

改写为 $Ax=b$ 的形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

- Pivot can not be Zero.

First Pivot. Second Pivot Third Pivot

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}}_{U}$$

(upper triangular)

如果 pivot 为0，则需换行，找到一个非0数。如果找不到，则矩阵不可逆，elimination 求出的结果不唯一。

2.2 Back-Substitution. 其实，该方法与 elimination 同时进行.

eg.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Augment Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad A \quad b.$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[(2,1)]{} \left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[(3,2)]{} \left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -10 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1x + 2y + z = 2 \\ \quad\quad 2y - 2z = 6 \\ \quad\quad\quad\quad 5z = -10 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{matrix}$$

3. 从矩阵角度看 elimination.

3.1 矩阵乘法：

- 矩阵与向量乘法：矩阵列向量的线性组合.

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \times \underline{\text{col}1} + b \cdot \underline{\text{col}2} + c \cdot \underline{\text{col}3}$$

- 行向量与矩阵的乘积：矩阵行向量的线性组合.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}_{1\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}_{3\times 3} = a \times \underline{\text{row}1} + b \cdot \underline{\text{row}2} + c \cdot \underline{\text{row}3}.$$

3.2. Elimination.（矩阵角度）：行变换：利用向量左乘矩阵.

- Step 1. Substract 3 times row 1 from row 2.

Row1 don't change

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Row3 don't change.

- Step 2. Substract 2 times row 2 from 3.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_{32}(E_{21} \cdot A) = U}$$

$$\Downarrow$$

$$EA = U$$

4. Permutation Matrix：行变换和列变换

4.1 行变换

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

* $AB \neq BA$

$(AB)C = A(BC)$

4.2 列变换

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

左乘 = 行变换，右乘 = 列变换.

5、Inverses：$U \longrightarrow A$.

$$\underset{E^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A \longrightarrow EA \longrightarrow U$$

$$U \longrightarrow E^{-1}U \longrightarrow A$$

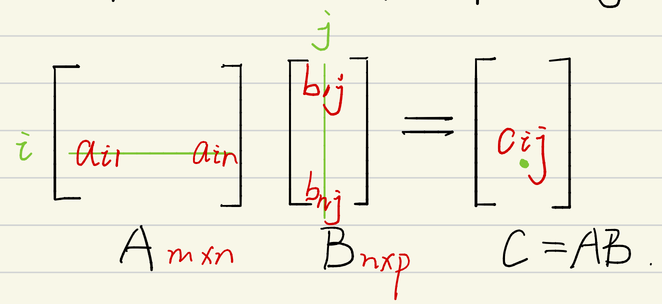
Lecture 3. Multiplication & Inverse Matrices

1. Over-view

矩阵乘法和逆矩阵的条件。

2. Matrices Multiplication.

2.1. 矩阵乘法定义视角求解：Regular Way.

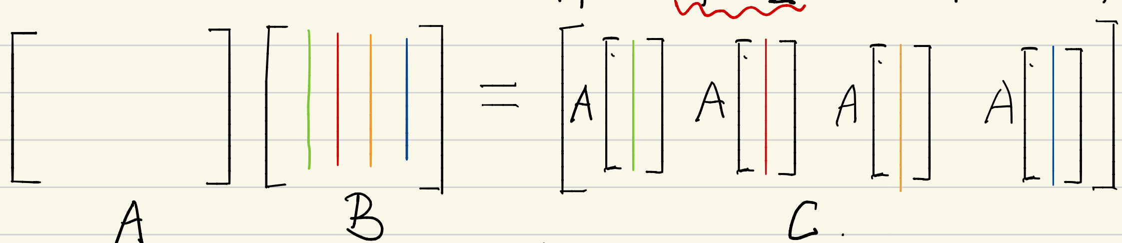


$$C_{ij} = (\text{row } i \text{ of } A)\cdot(\text{column } j \text{ of } B)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

2.2 从行向量/列向量线性组合的视角求解.

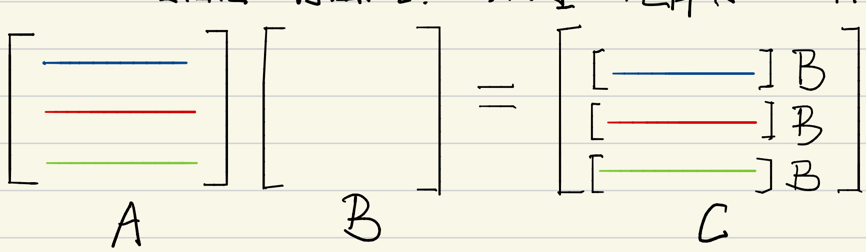
2.2.1 列组合：矩阵A·列向量 = 矩阵A的列向量的线性组合.



$A\cdot B_{col_j} = C_{col_j}$

矩阵A与一个列向量相乘，等于A的列向量的一个线性组合，再将该组合合并到C中。所以，C的列向量是由A的列向量线性组合而成。

2.2.2 行组合：行向量·矩阵A = 矩阵A的行向量的线性组合.



$A_{Row_i}\cdot B = C_{Row_i}$

C的行由B的行线性组合而成。

2.3. 列乘以行　$A \cdot B = C$.

$A * B = [A\text{的列} \times B\text{的行}]$ 求和.

eg.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 矩阵中每一列都与 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 同向，也就是列向量都在 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 这条线上，列空间是一条线。
- 同理，行向量都在 $[1 \quad 6]$ 直线上，行空间是一条线

2.4 block multiplication.

$$\underset{A}{\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]} \underset{B}{\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]} = \underset{C}{\left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & \\ \hline & \end{array}\right]}$$

3. Inverse

3.1 矩阵的逆，不存在逆的原因：

- If A^{-1} exists, then $\underline{A^{-1}A = I = AA^{-1}}$

  A: Square Matrix, 不是 singular Matrix.

- 如果存在非零向量 x, 使 $Ax = 0$ 成立，则 A <u>不可逆</u>

  证明：假设 A 可逆，则 $A^{-1}A = I$，且 $x \neq 0$

  $$A^{-1}Ax \neq A^{-1}0 \quad \text{当式不成立}$$

  ∴假设矛盾，A 不可逆.

3.2 存在逆，如何求逆？

eg. 求 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Gauss-Jordan (Solve 2 equations at once)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

(第一个矩阵下标：A　I；最后一个矩阵下标：I　A^{-1})

证明：上述过程实际上是 Elimination，使 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 变为 I，相当于左乘一个 E 进行行变换. $EA = I$，则 E 就是 A^{-1}.

$$E\left[A \,\vdots\, I\right] = \left[EA \,\vdots\, EI\right] = \left[I \,\vdots\, A^{-1}\right]$$

∴上述过程成立。

Lecture 4. Factorization into $A = LU$

因式分解

1. Over-view

- 完善 inverse
- LU 分解
- Permutation.

2. 逆矩阵的性质

Suppose A and B are invertable, what is the inverse of AB.

$$(AB)(AB)^{-1} = I = (AB)^{-1}(AB)$$

$$\Rightarrow ABB^{-1}A^{-1} = I$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

A. 2x2

$$\underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

U: upper triangular

L: Lower triangular

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 转置矩阵 Transform.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Transpose & Inverse.

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

$$\Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

方阵的逆运算与转置可以顺序颠倒。

3. A 的 LU 分解.

Elimination 实际上是初等变换的矩阵表示：

$$EA = U, \quad E \text{ 是 Elimination Matrix.}$$

- 2x2 A，如果 A 可逆，则存在

$$\underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}} = \underset{\overset{L}{E_{21}^{-1}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\overset{U}{U}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

• 3×3 A,(假设没有行变换),则有

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

因此,$A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U = LU$

例:

有 $E_{32} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $E_{31} = I$

且有 $E_{32}E_{31}E_{21}\cdot A = U$,求 $A = LU$ 的 L.

• $E_{32}E_{31}E_{21}A = U \Rightarrow A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U$

$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$ $I^{-1} = I$

$$L = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

• 从代价角度比较 Elimination $EA=U$ 和 $A=LU$

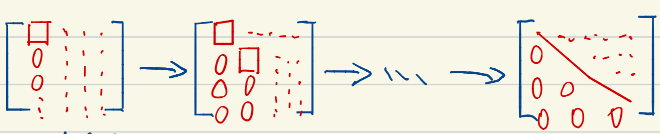
设 $N\times N$ matrix A:

1. $EA \doteq U$ $\begin{bmatrix}1&\cdots\\0&\cdots\\0&\cdot\\\vdots&\\0&\cdots\end{bmatrix}$

一行进行乘法运算,加上另一行进行加法运算

1、一行有N个元素,产生N次乘法和加法运算

2、对于第一列,共N-1行需要计算.



乘法cost $= N(N-1) + (N-1)(N-2) + \cdots + 2\times1 + 1\times0 \approx \frac{1}{3}N^3$ 加法一样.

2. $A \doteq LU$

cost $= O(N^2)$

4. Permutations

方形二进制矩阵，每行每列只有一个1，其它为0、

我们之前接触过行变换所用到的矩阵，即是将单位阵 I 按照对应行变换方式进行操作之后得到的矩阵。它可以交换矩阵中的两行，代替矩阵行变换。什么时候 我们需要使用矩阵行变换呢?

一个经典的例子就是：在消元过程中，当矩阵主元位置上面不是 1 时，我们就需要用行变换将主元位置换回 1。

这样的由单位阵变换而来的矩阵，通过矩阵乘法可以使被乘矩阵行交换。

我们将这样的矩阵称为置换矩阵（Permutation, P）。我们通过一个例子来熟悉一下置换矩阵。

例：求矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的所有 Permutations.

一共 6 个：任意 2 个相乘，结果依然在这个 Group 中.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

对于 N 阶矩阵，有 $n!$ 种 Permutations.

且 $P^T = P^{-1}$

例. $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ $A^T=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]}_{A\quad I} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]}_{I\quad A^{-1}}$$ Row Exchange !!!

$P^TP = I$， P的每一行的行向量与 P^{-1} 的每一列的列向量中 1 出现位置相同。

Lecture 5. Transpose, Permutations, Space R^n.

1. Over-view.
   - Permutation
   - Transpose
   - Symmetric
   - Vector Space & Subspace.

2. Permutation.

Permutation P: Identity matrix with reordered rows, which are used to execute row exchang.

P用于行变换。

上一节，$A = LU$ 是基于 Pivot 非 0，不用行变换
但如果 pivot 为 0，则要 row exchange，于是：

$$PA = LU$$ ，对于任意 Invertable A.

3. Transpose & Symmetric Matrices.

3.1 Transposes: 对于 A，$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{2} & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3.2 Symmetric Matrices: 对角线两侧元素对应相等.

- 对称矩阵性质：$A^T = A$
- 构造对称矩阵：

对于任意 Retangle Matrix R,
$R^T R$ 总是一个对称阵。

$(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T$

eg.
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{R^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 13 & 11 \\ 7 & 11 & 17 \end{bmatrix}}_{RR^T}$$

证明：如果 RR^T 是对称阵，
则 $(RR^T)^T$ 也是对称阵。

$(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T$
证毕.

4. Space：Vector Space & Null Space

4.1 Vector Spaces，表示一整个空间的向量。

定义：对以下运算满足封闭性，即两个向量相加 or 数乘后得到的向量仍然属于这个向量空间，即向量的线性组合之后所得向量仍然属于这个向量空间。

- 加法：$v+w$
- 数乘：av，a 是标量
- 线性组合：$av+bw$

$\boxed{\text{任何向量空间与其子空间都要满足封闭性。}}$

eg. R^2 是一个 2-D 向量空间，均为实向量（Real Vectors）

$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，…… 均在向量空间中。

空间是一个平面，这些向量的线性组合都在这个平面上，且含有零向量。任何 vector 数乘 0 都等于 0 向量，所以零向量在所有向量空间中。

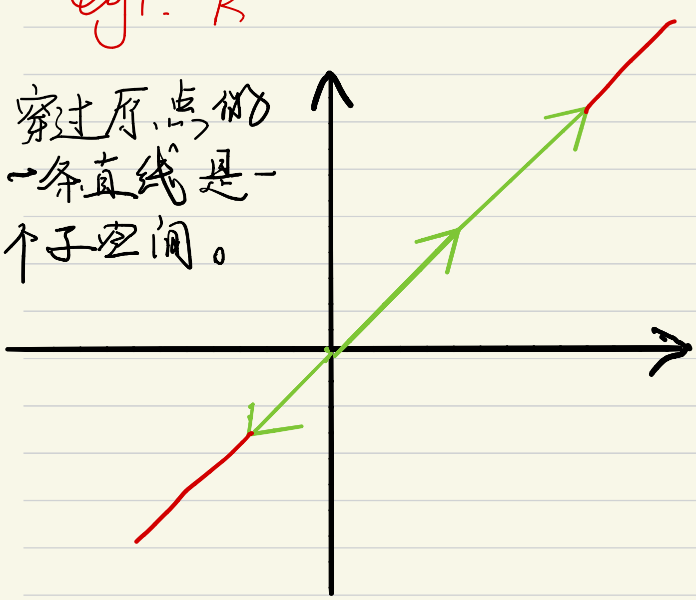
☆ 推广：$\boxed{R^n \text{ 是所有的 } n \text{ 维向量，所有 column vector 都有 } n \text{ 个实数分量。}}$

4.2 Subspace：取向量空间的一部分仍然构成向量空间。

A vector space inside R^n

eg1. R^2

穿过原点的一条直线是一个子空间。



eg2. R^3 的 subspace

1. 所有过原点的 plane
2. 所有过原点的 Line
3. Zero vector，原点。
4. R^3 本身

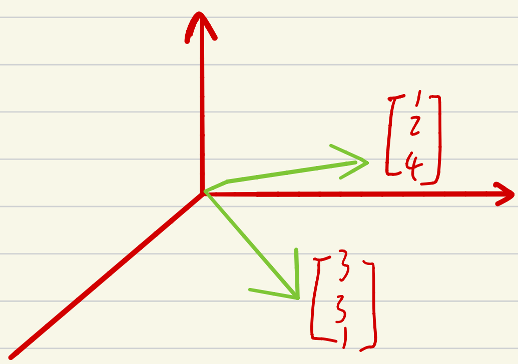
4.3. 利用 column vector 构建 Column Space.

矩阵A，所有的列向量的 linear comb. 组成了一个 subspace，称为 Column Space，$C(A)$

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 的 column space.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 属于 R^3，且满足"线性运算封闭"。

它们的线性组合构成 R^3 的 subspace，called Column Space $C(A)$



Form a Plane.

Lecture 6. Column Space & Null Space

1. Overview

Two ways to form subspace: 列空间，子空间.

- 向量空间条件与子空间性质
- 列空间
- 零空间

2. $P \cap L$ = all vectors in both P and L

This $\boxed{\text{is}}$ a sub-space.

2. Vector Space & Subspace.

2.1. Vector Space ：满足线性运算封闭性。

Subspace ：同样满足对线性运算封闭。

2.2 子空间的 Intersection & Union. (2 subspace: P & L)

2.2.1 $P \cup L$ ：包含 P 和 L 中所有 vectors.

This is $\boxed{\text{Not}}$ a sub-space.

∵ $P \cup L$ 包含了所有 P 和 L 中的 vectors

又 ∵ 对于 vector $P_1 \in P$，$L_1 \in L$，P_1 和 L_1 的线性组合 $P_1 + L_1$ 不在 $P \cup L$ 中。

∴ $P \cup L$ 不是一个 subspace

2.2.2. $P \cap L$ ：包含 P 和 L 相交的 vectors

This $\boxed{\text{IS}}$ a subspace.

3. Column Space. $C(A)$

3.1 回顾.

Suppose $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$ is all linear comb. of cols $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$

Column Space $C(A)$ is a subspace of R^4.

3.2 $Ax=b$

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$$

问题一: Does $Ax=b$ has a solution for every b?

No! A无法fill整个4-D空间.

问题二: Which b's allow this system to be solved?

当b在$C(A)$中.

问题三: If $Ax=b$, $b\neq 0$. Do xs form a vector space?

No! 不包含零向量. 是一个不过原点的plane.

4. Null Space. $N(A)$

4.1 介绍.

$Ax=0$ 的所有解 x 构成的空间, 称作 null space.

例: $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$, $Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \Rightarrow x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$=c\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ R^3的subspace.

对于 $m\times n$ 的矩阵, Column Space 是 R^m 的 subspace. 在于列向量的维数.

Null Space 是 R^n 的 subspace. 在于列向量的个数.

Q: How do I know that the Null Space is a vector space?

① 加法: if $A\vec{v}=0$, $A\vec{w}=0$, then $A(v+w)=0$

② 数乘: if $Av=0$, then $c(Av)=0$, $A(cv)=0$

Lecture 7. 求解 $Ax=0$, Pivot Variable, Special solution

1. Over-view

1. 求解矩阵的零空间的算法（求解 Ax = 0 的算法）
    - 对于方程 Ax = 0，对 A 向下消元，碰到无法取得主元的列，不管它，接着消元，直到得到行阶梯矩阵 U（Row echelon form matrix），确定主列及自由列，确定主变量与自由变量，令自由变量为 0 和 1，求出特解，特解的线性组合即为零空间；接着向上消元，使得主元全部变为1，主元上方和下方的变量全部为 0，得到最简行阶梯矩阵 R(Reduced row echelon form matrix, rref)，由最简行阶梯矩阵即可得到零空间矩阵N（Null space Matrix）。由零空间矩阵 N 可以直接得到特解（因为零空间矩阵各列由特解组成）
    - Ax = 0 –> Ux = 0 –> Rx = 0 –> RN = 0
    - 这里的 R 用最简的形式包含了所有的信息。
2. 一些概念
    - 主行、主列 (Pivot cols, rows)
    - 主变量、自由变量（Pivot variables, Free variables)
    - 矩阵的秩（Rank)

2. 求解 $Ax=0$.

假如 A 不可逆，求出的解不唯一，构成一个空间.

2.1. Elimination. $A \to U$

eg. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，求由 $Ax=0$ 中 x 构成的 Null Space

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Row echelon form

Pivot的个数称为 Rank.

$\text{Rank}(A) = r = 2$.

Free Column

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot Column.

其中 free column 指其对应的未知变量 x 可以自由的赋值。

pivot variable: x_1, x_3

free variable: x_2, x_4

2.2. Substitution.

$$Ux = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Special Solution.

1. 令 free variable $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，代入上式：得 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 令 free variable $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，代入上式：得 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

通过 Special Solutions 的任意的线性组合可以构造出整个 Null Space。

即：$\begin{cases} Ax = 0 \text{ 的所有解} \\ Ax = 0 \text{ 中的 } x \text{ 构成的 Null Space} \end{cases}$ 为

$$x = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

☆ Special Solution 的个数 等于 # of free variable

$$\boxed{\# \text{ of free variable} = n - \text{rank}(A)}$$

3. 简化 $U \rightarrow R$.

Reduced Row Echelon Form

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R = \text{rref}(A)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ in pivot row & pivot col

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F$ in free row & free col

$m \times n$ 的 A 的 Reduced Row Echelon Form. R

(列变换后) $$R = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} I & F \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{r pivot rows.} \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{r pivot cols} & \text{(n-r) free cols.} \end{array} \end{array}$$

其中: $I_{r \times r}$

现假设一个 Null Space Matrix N: 即各列由 Special Solution 组成。

有: $$Ax = Rx = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{pivot} \\ x_{free} \end{bmatrix} = RN = 0$$

得 $$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \rightarrow I_{(n-r)\cdot(n-r)}$$

$$x_{pivot} \cdot I + x_{free} F = 0$$

$$\Rightarrow x_{pivot} = - x_{free} \cdot F$$

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, 求 $Ax=0$ 中 x 构成的 Null Space.

(1) $A \rightarrow U$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

(2) $U \rightarrow R$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = R$ rank(A) = 2. n=3.

(3) $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $-F = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} -F \\ I_{(n-r)\cdot(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}}}^{-F} \\ \underbrace{\boxed{1}}_{I_{1\times 1}} \end{bmatrix}$

Lecture 8. $Ax=b$

1. Overview.

- 求解 $Ax=b$
- rank 对方程组解的个数的影响.

2. 求解 $Ax=b$.

2.1. 是否有解：Ax=b 不一定有解

eg. 求：
$$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$
有解的条件.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&b_1\\2&4&6&8&b_2\\3&6&8&10&b_3\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&2&2&2&b_1\\0&0&\boxed{2}&4&b_2-2b_1\\0&0&0&0&b_3-b_2-b_1\end{array}\right]$$

Augmented Matrix.

由最后一行得：
$\underline{b_3-b_2-b_1=0}$
条件.

$Ax=b$ 有解的条件为：$b_3-b_2-b_1=0$

观察可知：$b_3-b_2-b_1 \Rightarrow b_3=b_2+b_1$，$b_3$ 是 b_1，b_2 的线性组合.
同样的，A 的第三行也是一二行的线性组合。
这印证了，$Ax=b$ 有解的条件是 b 在 A 的列空间中。

★ 可解性 Solvability ：condition on b.

1. $Ax=b$ is solvable when b is in $C(A)$
2. If a comb. of Rows of A gives Zero Row,
   The same comb. of B must be 0.

2.2. 求完整解.

☆ $Ax=b$ 的通解 $x=x_{particular}+x_{null\text{-}space}$.

证明：$\because A\cdot x_p=b$ ，$A\cdot x_N=0$

$\therefore A(x_p+x_N)=b$.
x_p 可以加上任意 x_N，b 不变.

Step 1：x_p：令所有 free variables 为 0，求 pivot variables，pivot variable 和 free variable 组合成 x_p.

Step 2：x_N：求 $Ax=0$

Step 3：$x=x_p+x_N$.

例: 设 $b=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$, 求 $Ax=b$.

Step 1. 令 $x_2, x_4=0$. $\begin{cases}x_1+2x_3=1\\ 2x_3=3\end{cases} \Rightarrow x_p=\begin{bmatrix}-2\\0\\3/2\\0\end{bmatrix}$

Step 2. $Ax=0 \Rightarrow x_N=\underbrace{c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}}_{\text{subspace.}}$

Step 3: $x=\begin{bmatrix}-2\\0\\3/2\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

x 不是一个 subspace, 因为 x 不过原点

x 是一个不过原点, 的 4-D 空间中的 2-D plane.

3. $m\times n$ 矩阵 A 的 rank 与解的关系。

3.1 Full Column Rank $r=n$

在 $m\times n$ 的矩阵 A 中, rank $r=n<m$.

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\6&1\\5&1\end{bmatrix}}^{n}\right. \Rightarrow m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\ \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}}\end{bmatrix} \quad r=2=n<m.$$

Conditions

- 消元后的 A 为 $\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$, 无 free column/variable, 有 r 个 pivot variable.
- 对于的 Null Space $N(A)$ 只有零向量.
- 且对于 $Ax=b$, 要么无解, 要么有唯一解。

3.2. Full Row Rank.

在 $m\times n$ 的矩阵 A 中. rank $r=m<n$.

$$m\overbrace{\begin{bmatrix}1&2&6&5\\3&1&1&1\end{bmatrix}}^{n} \Rightarrow m\overbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&\boxed{F}\end{bmatrix}}^{n} \quad r=2=m<n.$$

- 消元后的 A 为 $[I\ F]$ 形式, m 个 pivot variable, $n-m$ 个 free variable
- $Ax=b$ 有无穷解

3.3 Full Rank.

当 $m \times n$ 矩阵 A 为方阵时，$r = m = n$：

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$ 可逆. $r = 2 = m = n$.

有唯一解

3.4. Not Full Rank.

当 $r < m$，$r < n$.

$$A \Rightarrow \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \text{无穷解} \\ \text{无解} \end{cases}$$

总结：

$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m, r < n$.
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 solution	0 or 1 solution	∞ solution	0, ∞ solution

Lecture 9. Independent. Basis. Dimension

1. Overview.

- Linear Independent
- Spanning a space
- Basis & Dimension.

2. Dependent & Independent.

2.1 背景

$m \times n$ 矩阵 A ($m<n$)

$$A = \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \end{array} m$$

对于 $Ax=0$，有未知数 n 个，方程有 m 个。 $n>m$

存在除 0 以外的 non-zero solutions，因为 A 至少有 $n-m$ 个自由列，即 $n-m$ 个 free variables. 于是 $N(A)$ 中有非零解!!!

2.2. Independent.

1. 从向量的线性组合：

设向量组：$x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots x_n$.

对于任意 c (不全为0)，各向量线性组合无法得到 0 向量，则称，此向量组：Independent. 反之，dependent.

Independent：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \neq 0$，except all $c_i = 0$

2. 从矩阵的 Null Space： 注：Indepent 与向量组有关，与矩阵无关.

设矩阵 A 的列向量为：$v_1 \ v_2 \ v_3 \cdots v_n$

$r=n$ • 如果 Null Space 只有 0. $N(A)=\{0\}$，则它们 Independent.

$r<n$ • 如果 $Ax=0$ 存在非0解，则 Dependent. 有 free variable.

3. 从 Rank：

Independent：$r=n$. $\rightarrow$ 0 free variable

Dependent：$r<n$. $\rightarrow$ $n-r$ free variables.

3. Spanning a Space, Basis, Dimension.

3.1 Spanning a Space.

Vector $v_1, v_2, \cdots, v_n$ Span a vector space means:
The space consists of all combs. of those vectors.

如何生成空间又能线性无关？

- 向量个数不够，无法构成空间；
- 向量个数过多，则可能不是线性无关。

3.2 Basis

向量空间的Basis是一组向量：
该向量组：
1. 向量组 Independent.
2. They span the space.

1. 某个空间的 Basis 是否唯一？
   不，可以找到不同的向量组。基的个数是确定的，这个个数就是空间的维数。
2. 将基的所有向量作为列向量组成一个矩阵A，该矩阵有何特征？
   A可逆，因为所有 column vector 线性无关，$Ax=0$ 的解只有0.
   A is non-singular.

例：一个 3-D space 中 R^3.

一组基是：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

另一组基是：$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\8\end{bmatrix}$

R^n 中 n 个向量构成 Basis，
n个向量构成的 $n \times n$ 矩阵可逆!!!

3.3 Dimension of the space.

维数等于 Basis 的个数。

例：假一个 column space $C(A)$：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A 的 Columns 是否是 Basis ?

No.

1. 它们可以 Span a Space.
2. 它们不是线性无关的。

(2) 找到一组基。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A) = 2$$

注：rank 针对的是 matrix,
dimension 针对的是 space.

$\dim(N(A)) = n - r = \#$ of free var.

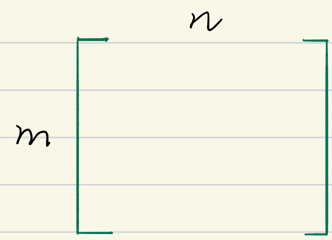
$\dim(C(A)) = r$

Lecture 10. Four Fundamental Subspaces.

1. Overview.

$R^{m\times n}$ $m\times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵为 A^T

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$



2. Four Fundamental Subspace.

2.1. 维数和基.

- Column Space $C(A)$

  1. 什么是 $C(A)$

     A 的所有 column 的线性组合构成的空间.
     因为每个 column 有 m 个分量，所以列空间
     是 R^m 的子空间

  2. 如何求 Basis.

     Row reduction. $A \to U$

  3. $C(A)$ 的维数.

     等于 rank r. $\dim(C(A)) = r$

- Null Space $N(A)$

  1. 什么是 $N(A)$

     $Ax=0$ 的特解的所有线性组合构成的空间。

     因为每个特解有 n 个分量，所以 Null Space 是 R^n 的 subspace.

  2. 如何求 Null space 的 Basis.

     Row Reduction 找到 free columns/variables，赋值 0 or 1，可得到一组 Special Solutions，

  3. $N(A)$ 的 Dimension.

     $n-r$ 决定了 X 中 free variable 的个数，等于 special solution 的个数，所以 $\dim(N(A)) = n-r$.

- Row Space. $C(A^T)$ $R(A)$

1. 什么是 Row Space.
A的行向量的所有线性组合构成的 Space.
因为每个行向量有 n 个分量, 所有行空间是 R^n 的子空间.

2、如何求 Basis?
Basis for row space of A is first r rows of R.
方法一: 先矩阵 A 的转置 A^T, 然后求 $C(A^T)$
方法二: 对 A 进 Row Exchenge., 得到 Reduced Row Echelon Form. R.

3. R(A) 的维数
等于 Rank r.

注: Row Reduction 后, $C(A) \neq C(R)$
$R(A) = R(R)$

4. NullSpace of A^T = $N(A^T)$ = Left nullspace of A in R^m

- 左零空间: Left Null Space of A. $N(A^T)$

1. 什么是 Left Null Space.
A 转置后形式 A^T, $A^Ty=0$ 的特解的所有线性组合构成的空间。
每个 y 有 m 个分量, 因为 $N(A^T)$ 是 R^m 的子空间.
本质上是 Row Vector 线性组合的系数构成的向量空间.
即 $y^TA=0$ $[(A^Ty)^T=0 \Rightarrow y^TA=0]$

2. 如何求 Basis?
Gauss-Jordan. Elimination.
$[A \vdots I] \rightarrow [R \vdots E]$ E中,使R中产生全0行的行向量就是 $N(A^T)$ 的基。
等价于 $E[A \vdots I] = [EA \vdots EI] = [R \vdots E]$.

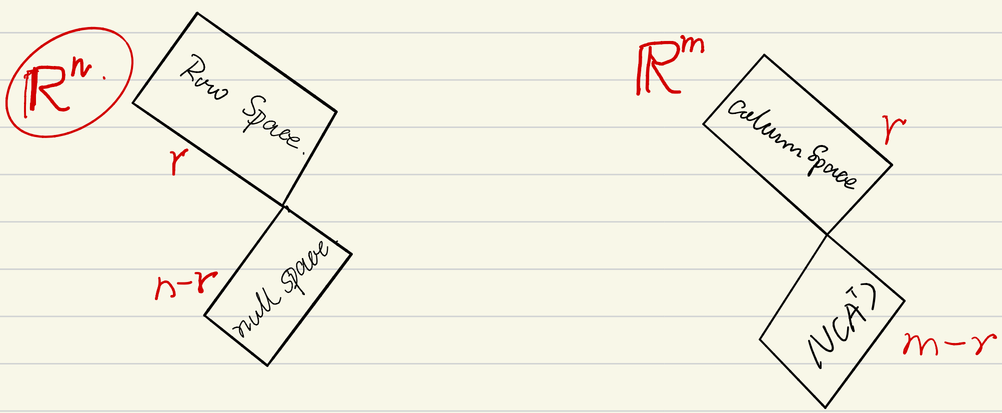
$$EA = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ A \\ \\ \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}}_{R} = R.$$

3. $N(A^T)$ 的维数

$m-r$

2.2. 四个基本空间的图像:

$m \times n$



	$C(A)$	$R(A)$ $C(A^T)$	$N(A)$	$N(A^T)$
Basis	Pivot Cols.	Pivot Cols of A^T	Special Solutions	Special Solutions of A^T
Dimension	r	r	$n-r$	$m-r$

3. 矩阵空间 Intro

矩阵空间: 矩阵构成的空间.

封闭性:

给定 3×3 矩阵 A, B, 常数 c.

- 加法: $A+B$ 仍然是 3×3 矩阵.
- 数乘: cA 仍然是 3×3 矩阵.

所有的 3×3 的矩阵构成的线性空间,它们的子空间有什么?

上三角矩阵,对称矩阵,对角矩阵 diag.

upper　　　sym

upper ∩ sym = diag.

Lecture 11. 矩阵空间，rank 1 matrix

1. Overview.
   - 矩阵空间
   - 秩1矩阵和空间、
   - Small world graphs.

2. 矩阵空间深入. $M_{3\times3}$: all 3×3 matrices.

   M 的三个基本子空间.
   - 子空间 S : 3x3 对称矩阵构成的子空间
   - 子空间 U : 3x3 上三角矩阵构成的子空间.
   - 子空间 D : $S\cap U$, 3x3 对角矩阵构成的子空间.

2.1 矩阵空间的基与维数.

M 的维数 : $\dim(M)=9$.

M 的 basis:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ 一共9个.

S 的维数 : $\dim(S)=6$

S 的 basis.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

U 的维数 : $\dim(U)=6$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$S\cap U=D$, $\dim(D)=3$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$S+U$: 包含了 S 和 U 的线性组合.

$S+U=M$

$$\underset{6}{\dim(S)}+\underset{6}{\dim(U)}=\underset{3}{\dim(S\cap U)}+\underset{6}{\dim(S+U)}$$

2.2. 微分方程与线性代数的关系:

线性空间元素, 可以是方程的解:

例: $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$\Rightarrow$ 两个 Special Solution $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$.

Complete Solution: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

$\dim(\text{complete solution}) = 2$

3. Rank 1 matrices.

3.1 秩一矩阵

秩一矩阵是指秩为 1 的矩阵, 优点:

- 可以分解 column × row 的形式
- 可以搭积木一样构建出其它矩阵.

例:

Rank 1 Matrix.

$$\underset{2\times3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad r=1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\dim C(A) = \text{rank} = \dim C(A^T)$

所有 Rank 1 matrix 有:

$$\underline{A = u v^T}$$

u: Column Vector

v: Column Vector.

Rank 1 matrix is the building blocks for all matrices.

eg. 一个 5×17 matrix of rank 4.
可以由 4 个 rank 1 matrices 构成。

一个 rank 4 matrix 可以构成一个 subspace 吗?

M = all 5×17 matrices.

Subset of rank 4 matrices. ⟵ subspace?

⇒ 问题可以转化为: if add two rank 4 matrices, is the sum rank 4?

Not a sub-space.

$Av = 0$

In R^4, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$, S = all v in R^4 with $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$

= null space of $A = [1\ 1\ 1\ 1]$

$\text{Rank}(A) = 1 = r$

$\dim N(A) = n - r = 3$ $\quad 3 + 1 = 4 = n$.

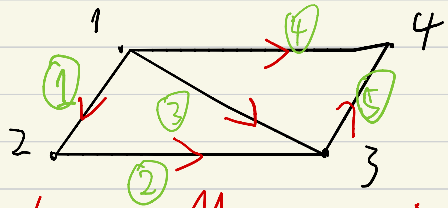
Basis for S: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C(A) = R^1 \quad N(A^T) = \{0\}$

$1 + 0 = 1 = m$

Lecture 12. Graph.

Graph: {Nodes, edges}



$n = 4$ nodes

$m = 5$ edges.

Incidence Matrix A:

1. 每一行 row 对应一个 edge
2. 每一列 column 对应一个 node

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{Node } 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
A = & \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \text{Edge } 1. \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{loop.}
$$

Independent ? No.

Loop: 对应于 linear dependent rows.

1. $Ax = 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad Ax = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = x_1, x_2, x_3, x_4$ potentials at nodes.

$\downarrow A$

$x_3 - x_1$ etc. potential differences.

$$x = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ null-space.}$$

$\dim N(A) = 1$