Lecture 8. $Ax = b$

1. Overview.

- 求解 $Ax=b$
- rank 对方程组解的个数的影响.

2. 求解 $Ax=b$.

2.1. 是否有解：$Ax=b$ 不一定有解

eg. 求：
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ 有解的条件.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right]$$

Augmented Matrix.

由最后一行得：
$$\underbrace{b_3 - b_2 - b_1 = 0}_{条件}$$

$Ax=b$ 有解的条件为：$b_3 - b_2 - b_1 = 0$

观察可知：$b_3 - b_2 - b_1 \Rightarrow b_3 = b_2 + b_1$，$b_3$ 是 b_1, b_2 的线性组合.
同样的，A 的第三行也是一二行的线性组合.
这印证了，$Ax=b$ 有解的条件是 b 在 A 的列空间中。

☆ 可解性 Solvability：condition on b.

1. $Ax=b$ is solvable when b is in $C(A)$
2. If a comb. of Rows of A gives Zero Row,
   The same comb. of B must be 0.

2.2. 求完整解.

☆ $Ax=b$ 的通解 $x = x_{particular} + x_{null\text{-}space}$.

证明：$\because A \cdot x_p = b$，$A \cdot x_N = 0$

$$\therefore A(x_p + x_N) = b.$$

x_p 可以加上任意 x_N，b 不变.

Step 1：x_p：令所有 free variables 为 0，求 pivot variables，pivot variable 和 free variable 组合成 x_p.

Step 2：x_N：求 $Ax=0$

Step 3：$x = x_p + x_N$.

例：设 $b=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$，求 $Ax=b$.

Step1. 令 $x_2, x_4=0$，$\begin{cases}x_1+2x_3=1\\2x_3=3\end{cases} \Rightarrow x_p=\begin{bmatrix}-2\\0\\3/2\\0\end{bmatrix}$

Step2. $Ax=0 \Rightarrow x_N=\underbrace{c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}}_{\text{subspace.}}$

Step3: $x=\begin{bmatrix}-2\\0\\3/2\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

x 不是一个 subspace，因为 x 不过原点

x 是一个不过原点的 4-D 空间中的 2-D plane.

3. $m\times n$ 矩阵 A 的 rank 与解的关系。

3.1 Full Column Rank $r=n$

在 $m\times n$ 的矩阵 A 中，rank $r=n<m$.

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\6&1\\5&1\end{bmatrix}}^{n}\right. \Rightarrow m\overbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}}^{n} \quad r=2=n<m.$$

Conditions

- 消元后的 A 为 $\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$，无 free column/variable，有 r 个 pivot variable.
- 对于的 Null Space $N(A)$ 只有零向量.
- 且对于 $Ax=b$，要么无解，要么有唯一解。

3.2. Full Row Rank.

在 $m\times n$ 的矩阵 A 中，rank $r=m<n$.

$$m\overbrace{\begin{bmatrix}1&2&6&5\\3&1&1&1\end{bmatrix}}^{n} \Rightarrow m\overbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&\boxed{F}\end{bmatrix}}^{n} \quad r=2=m<n.$$

- 消元后的 A 为 $[I\ F]$ 形式，m 个 pivot variable，$n-m$ 个 free variable
- $Ax=b$ 有无穷解

3.3 Full Rank.

当 $m \times n$ 矩阵 A 为方阵时，$r = m = n$：

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$ 可逆. $r = 2 = m = n$.

有唯一解

3.4. Not Full Rank.

当 $r < m$, $r < n$.

$$A \Rightarrow \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \text{无穷解} \\ \text{无解} \end{cases}$$

总结：

$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m, r < n$.
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 solution	0 or 1 solution	∞ solution	0, ∞ solution