# Lecture 22. Diagonalization and Power of A.

## 1. Overview.

上一节学习了 Eigenvalue 和 Eigenvector. 这一节主要开始讲它们的应用。

1. 对角化 $S^{-1}AS=\Lambda$ S: eigenvector combinations.
2. A 的幂.
3. 差分方程.

## 2. Diagonalization.

### 2.1 定义.

对角化是一种矩阵分解方式。

假设 A 有 n 个线性无关的 eigenvectors, 将这些 eigenvectors 组合成矩阵 S 的列向量。

$$S = [\, x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \cdots \; x_n \,]$$

构造 AS: $AS = A[x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_n] = [\lambda_1 x_1\ \ \lambda_2 x_2\ \cdots\ \lambda_n x_n]$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda} = S\Lambda$$

(diagonal eigenvalue. matrix)

$$AS = S\Lambda$$

注: S 中的 columns 是 independent eigenvectors.

所以 S 有 inverse.

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad A = S\Lambda S^{-1}$$

### 2.2. 应用

求 $A^2$: ① if. $Ax = \lambda x$

then $A^2x = \lambda \underline{Ax} = \lambda^2 x$

so $A^2 \Rightarrow \lambda^2$, x 不变.

② if $S^{-1}AS = \Lambda$. $\Longleftrightarrow$ $A = S\Lambda S^{-1}$

then $A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$

So $\lambda \to \lambda^2$, S 不变。

结论: 如果 A 有特征值和特征向量。$A^k$ 的特征值是 $\lambda^k$, 而特征向量不影响。

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

例：什么条件下，$A^k$ 趋近于 0？

$A^k \to 0$ as $k \to \infty$, if all $|\lambda_i| < 1$.

## 2.3 对角化条件。

A 的所以 eigenvector 都要 Linear Independent 这样才能对应化。eigenvalue 和 eigenvector 是具有特殊关系的。

- 当矩阵 A 没有重复的 eigenvalues 时，矩阵 A 就一定有 n 个线性不相关的 eigenvectors. 不同的特征值对应不同的独立的特征向量。

注：不同的 eigenvalue，一定有 n 个独立特征向量。
相同的 eigenvalue，可能有 n 个独立特征向量。

特例：1. A 是对角矩阵

例：Repeated eigenvalues // may or may not have n inde. eigenvectors.

$S^{-1}AS = \Lambda$，如果 A 是 Identity matrix，$Ix = 1x$，特征值为 1，$S^{-1}IS = I$.

2. A 是 triangular matrix

例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$，是否可以对角化。

$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda = 2. \Rightarrow N(A - \lambda I) = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Null space 只有一维，无法构成 S. A 不能对角化。

## 3. 差分方程。

现给定一种 Recursion 关系：

已知从一个向量 $u_0$ 开始，有关系式：$u_{k+1} = A u_k$

即 $u_1 = A u_0$，$u_2 = A u_1 = A^2 u_0$

$$\boxed{u_k = A^k u_0}$$

### 3.1 理解方程。

因为 $A$ 是 $n \times n$ 矩阵，有 $n$ 个 Independent 的 eigenvectors 而 $u_0$ 是 $n$ 维的。
所以 $u_0$ 可以写成 $A$ 的列向量的线性组合。

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

由上式 $u_1 = A u_0$：　　$Ax = \lambda x$　　$S^{-1}AS = \Lambda$

$$u_1 = A u_0 = A[c_1 x_1 \quad c_2 x_2 \quad \cdots \quad c_n x_n]$$
$$= [c_1 \lambda_1 x_1 \quad c_2 \lambda_2 x_2 \quad \cdots \quad c_n \lambda_n x_n]$$

$$u_2 = AAu_0 = [c_1 \lambda_1^2 x_1 \quad c_2 \lambda_2^2 x_2 \quad \cdots \quad c_n \lambda_n^2 x_n]$$

$$u_k = A^k u_0 = [c_1 \lambda_1^k x_1 \quad c_2 \lambda_2^k x_2 \quad \cdots \quad c_n \lambda_n^k x_n]$$
$$= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} c_1\lambda_1^k & & & \\ & c_2\lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n\lambda_n^k \end{bmatrix}$$

column

$$= \underbrace{[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}}_{\Lambda^k} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{bmatrix}}_{C}$$

于是 $u_k = A^k u_0 = S \Lambda^k C$

## 3.2. 差分方程的应用。

- 求 Fibonacci Sequence. $F_{k+2}=F_k+F_{k+1}$ 的第100项 $F_{100}$ 以及增长速度。 $F_0=0, F_1=1$

已知 $F_{k+2}=F_k+F_{k+1}$ 这是一个二阶方程，我们希望构建一阶差分，如 $u_{k+1}=A^{k+1}u_k$ 的形式，于是添加一个 $F_{k+1}=F_{k+1}$ 构造矩阵 $u_k$，

$$u_k=\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}\qquad \underbrace{u_{k+1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}u_k}_{u_{k+1}=A\,u_k}\qquad u_0=\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

现求 A 的 eigenvalue 和 eigenvector.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-1=0\qquad \lambda=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\approx -0.618.\end{cases}$$

因为有 $n=2$ 个不同的 eigenvalue，所以 A 可对角化。

于是有 $u_k=S\Lambda^kC=c_1\lambda_1^kx_1+c_2\lambda_2^kx_2$，当 $k\to\infty$，由2.2可知，$\lambda_2^k\to 0$，$u_k\approx c_1\lambda_1^kx_1$

$$F_{100}=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot x_1$$

现求 c 和 λ。

$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}$，由于已知 A 可逆（可对角化），那么 $A-\lambda I$ 是 Singular，因为 $|A-\lambda I|=0$，所以可以找到 eigenvector，由第二行 $* x=0$.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\1\end{bmatrix}=0\qquad \begin{aligned}&(1-\lambda)\lambda+1=\underbrace{-\lambda^2+\lambda+1}_{-|A-\lambda I|}=0\\&\lambda-\lambda=0\end{aligned}$$

得：$x_1=\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}\lambda_2\\1\end{bmatrix}$

又，$u_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$u_0=c_1x_1+c_2x_2=c_1\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\lambda_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2=0\\c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=0.447\\c_2=-0.447\end{cases}$$

$$\Rightarrow F_k\approx 0.447\cdot(1.618)^{k+1}$$