Lecture 23. Differential Equations and exp(At). e^{At}.

1. Overview.

该节利用上节知识，解决微分方程(矩阵解法)。同时介绍 e^{At} 的计算方法。

2. 微分方程.

例：$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2$，$\frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2$，$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求 $u(t)$

在0时刻，$u_1 = 1$，$u_2 = 0$，所有的值都在 u_1 中，随着 t 随加，$\frac{du_1}{dt} < 0$，$\frac{du_2}{dt} > 0$。u_1 会减小，而 u_2 会增加。直到稳定。

两个方程的系数组成矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，$\frac{du}{dt} = A \cdot u$。

分析 A 的目的是追踪 u 随时间的变化。

首先寻找 A 的特征值和特征向量。

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

① $(-1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

② A 是 singular，一个 λ 一定等于 0。$tr(A) = -3$，$\lambda_2 = -3$。

$\lambda_1 = 0$，$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -3$，$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

通解. Pure Solution：$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2}$

Check：$\frac{du}{dt} = Au$. plug in $e^{\lambda_1 t} x_1$ $\Rightarrow \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 = A e^{\lambda_1 t} x_1 \Rightarrow \lambda_1 x_1 = A x_1$

微分方程的通解与差分之间的关系：

设有 N 步，$u(0) \to u(t)$，且都满足 $\frac{du}{dt} = Au$.

$$\frac{u(n+1) - u(n)}{\Delta t} = \frac{u(n+1) - u(n)}{t/N} = Au(n)$$

$$\Rightarrow u(1) = \frac{t}{N} A u(0) + u(0) = (\frac{t}{N} A + 1) u(0)$$

$u(0)$ 可以表示为特征向量的线性组合。$u(0) = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

$A u(0) = c_1 A x_1 + c_2 A x_2 = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2$

$$\Rightarrow u(1) = (\frac{t}{N} A + 1) u(0) = c_1 (\frac{t}{N} \lambda_1 + 1) x_1 + c_2 (\frac{t}{N} \lambda_2 + 1) x_2$$

$$\Rightarrow u(2) = (\frac{t}{N} A + 1) u(1) = c_1 (\frac{t}{N} \lambda_1 + 1)^2 x_1 + c_2 (\frac{t}{N} \lambda_2 + 1)^2 x_2$$

$$\Rightarrow u(t) = c_1 (\frac{t}{N} \lambda_1 + 1)^N x_1 + c_2 (\frac{t}{N} \lambda_2 + 1)^N x_2$$

又：$\lim_{k \to +\infty} (\frac{1}{k} + 1)^k = e$

$$\Rightarrow u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2.$$

现求 c_1，c_2.

已知 $\lambda_1=0$，$x_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$\lambda_2=-3$，$x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$u(t)=c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$u(0)=c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+c_2\,1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{1}{3}\\ c_2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow u(t)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{3}e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，前一项稳定状态；后一项随时间衰减。

$$u(\infty)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+0$$

稳定状态不一定存在：

① Stability $u(t)\to0$：需要所有的 $e^{\lambda t}\to0$，则 $\lambda<0$.（实数.）

② Steady state：当 $\lambda_1=0$，其它 $\lambda_i<0$（实数）

③ Blow up：当 any $\lambda>0$

现有一个矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，如果要 Stability，则 λ_1 和 λ_2 小于 0。也就是说 $tr(A)=a+d<0$ 是必要条件。但并不是充分条件。比如 $\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ 的 trace 等于 -1，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$。那么什么时候 A 一定会 Stability 呢？

① $tr(A)<0$ ： $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2$

② $|A|>0$ ： $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2$

解得。

3. Decoupling 与 e^{At}

3.1 Decoupling

$\frac{du}{dt} = Au$，矩阵 A 使不同 u 之间相互耦合。

由之前的知识，我们知道，u 是特征向量的线性组合。

$$u(0) = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2 1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$u(0) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_0\end{bmatrix} \qquad u(0) = Sc$$

S：eigenvector vector matrix

u 可以写作 $u = Sv$.

Decouple 的过程就是利用特征向量来进行对角化。

令 $u = Sv$，S是特征向量矩阵。

$$\frac{du}{dt} = Au \Rightarrow S\frac{dv}{dt} = ASv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \underbrace{S^{-1}AS}_{\Lambda}v = \Lambda v \qquad \Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

于是新的方程不再耦合，每一个值通是单独计算出：$\frac{dv_i}{dt} = \lambda_i v_i$

$$\frac{dv}{dt} = \Lambda v \Rightarrow v(t) = e^{\Lambda t}v(0), \quad u(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}u(0) = e^{At}u(0)$$

下面来证明上式成立：

幂级数公式：

$$e^x = \sum\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \cdots \qquad \text{严格收敛}$$

几何级数公式：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(I - At)^{-1} = I + At + (At)^2 + \cdots$$ 当且仅当 $|\lambda At| < 1$ 时，$(I-At)^{-1}$ 收敛

所以我们用幂级数：但要满足一个条件，A 要有 n 个 eigenvectors，能构成 S.

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \cdots$$
$$= SS^{-1} + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2S^{-1}}{2}t^2 + \cdots$$
$$= S\left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2t^2}{2} + \frac{\Lambda^3t^3}{6} + \cdots\right)S^{-1} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$$

对角化：

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$