Lecture 6. Column Space & Null Space

1. Overview

Two ways to form subspace: 列空间, 子空间.

- 向量空间条件与子空间性质.
- 列空间
- 零空间

2. $P \cap L$ = all vectors in both P and L

This $\boxed{\text{is}}$ a sub-space.

2. Vector Space & Subspace.

2.1. Vector Space : 满足线性运算封闭性.

Subspace : 同样满足对线性运算封闭。

2.2 子空间的 Intersection & Union. (2 subspace: P & L)

2.2.1 $P \cup L$: 包含 P 和 L 中所有 vectors.

This is $\boxed{\text{Not}}$ a sub-space.

∵ $P \cup L$ 包含了所有 P 和 L 中的 vectors

又 ∵ 对于 vector $P_1 \in P$, $L_1 \in L$, P_1 和 L_1 的线性组合 $P_1 + L_1$ 不在 $P \cup L$ 中。

∴ $P \cup L$ 不是一个 subspace

2.2.2. $P \cap L$: 包含 P 和 L 相交的 vectors

This $\boxed{\text{IS}}$ a subspace.

3. Column Space. $C(A)$

3.1 回顾.

Suppose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ is all linear comb. of cols $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Column Space $C(A)$ is a subspace of R^4.

3.2 $Ax = b$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

问题一：Does $Ax=b$ has a solution for every b?

No! A无法fill整个4-D空间.

问题二：Which b's allow this system to be solved?

当b在$C(A)$中.

问题三：If $Ax=b$, $b \neq 0$. Do xs form a vector space?

No! 不包含零向量. 是一个不过原点的plane.

4. Null Space. $N(A)$

4.1 介绍.

$Ax=0$ 的所有解 x 构成的空间，称作 null space.

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ R^3的subspace.

对于 $m \times n$ 的矩阵，Column Space 是 R^m 的 subspace. 在于列向量的维数.
Null Space 是 R^n 的 subspace. 在于列向量的个数.

Q：How do I know that the Null Space is a vector space?

① 加法：if $A\vec{v} = 0$, $A\vec{w} = 0$, then $A(v+w) = 0$

② 数乘：if $Av = 0$, then $c(Av) = 0$, $A(cv) = 0$