# Lecture 4. Factorization into $A = LU$
# 因式分解

## 1. Over-view

- 完善 inverse
- LU 分解
- Permutation.

## 2. 逆矩阵的性质

Suppose $A$ and $B$ are invertable, what is the inverse of $AB$.

$$(AB)(AB)^{-1} = I = (AB)^{-1}(AB)$$

$$\Rightarrow ABB^{-1}A^{-1} = I$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

A. 2x2

$$\begin{array}{ccc} E_{21} & A & & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} A & = & L & U \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

U: upper triangular

L: Lower triangular

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1 转置矩阵 Transform.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Transpose & Inverse.

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

$$\Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

方阵的逆运算与转置可以顺序颠倒。

## 3. A 的 LU 分解.

Elimination 实际上是初等变换的矩阵表示：

$$EA = U, \quad E \text{ 是 Elimination Matrix.}$$

- 2x2 $A$，如果 $A$ 可逆，则存在

$$\begin{array}{ccc} E_{21} \cdot & A & = & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} A & = & \overset{L}{E_{21}^{-1}} & \overset{U}{U} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

• $3\times3$ A,(假设没有行变换),则有

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

因此,$A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U = LU$

例:

有 $E_{32} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $E_{31} = I$

且有 $E_{32}E_{31}E_{21}\cdot A = U$,求 $A=LU$ 的 $L$.

• $E_{32}E_{31}E_{21}A = U \Rightarrow A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U$

$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$ $I^{-1} = I$

$$L = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

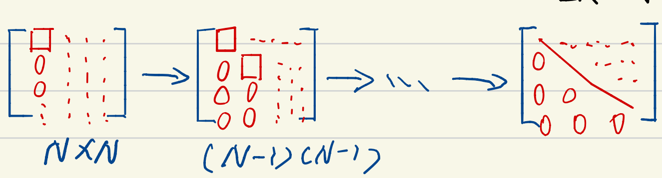
• 从代价角度比较 Elimination $EA=U$ 和 $A=LU$

设 $N\times N$ matrix $A$:

1. $EA \doteq U$ $\begin{bmatrix}1 & \cdots\\0 & \cdots\\0 & \\ \vdots & \\0 & \cdots\end{bmatrix}$ 一行进行乘法运算,加上另一行进行加法运算

1、一行有N个元素,产生N次乘法和加法运算

2、对于第一列,共N-1行需要计算.




乘法cost $= N(N-1)+(N-1)(N-2)+\cdots+2\times1+1\times0 \approx \frac{1}{3}N^3$ 加法一样.

2. $A \doteq LU$

cost $= O(N^2)$

## 4. Permutations

方形二进制矩阵，每行每列只有一个 1，其它为 0、

我们之前接触过行变换所用到的矩阵，即是将单位阵 I 按照对应行变换方式进行操作之后得到的矩阵。它可以交换矩阵中的两行，代替矩阵行变换。什么时候 我们需要使用矩阵行变换呢?

一个经典的例子就是：在消元过程中，当矩阵主元位置上面不是 1 时，我们就需要用行变换将主元位置换回 1。

这样的由单位阵变换而来的矩阵，通过矩阵乘法可以使被乘矩阵行交换。

我们将这样的矩阵称为置换矩阵（Permutation, P）。我们通过一个例子来熟悉一下置换矩阵。

例：求矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的所有 Permutations.

一共 6 个：任意 2 个相乘，结果依然在这个 Group 中.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

对于 N 阶矩阵，有 $n!$ 种 Permutations.

且 $P^T = P^{-1}$

例. $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ $A^T=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]$$

$\quad A \quad\quad I \quad\quad\quad\quad I \quad\quad A^{-1}$

Row Exchange !!!

$P^T P = I$， P的每一行的行向量与 $P^{-1}$ 的每一列的列向量中 1 出现位置相同。