Lecture 1. understand the matrix

1. Overview

从 row picture 和 column picture 的角度求解方程.

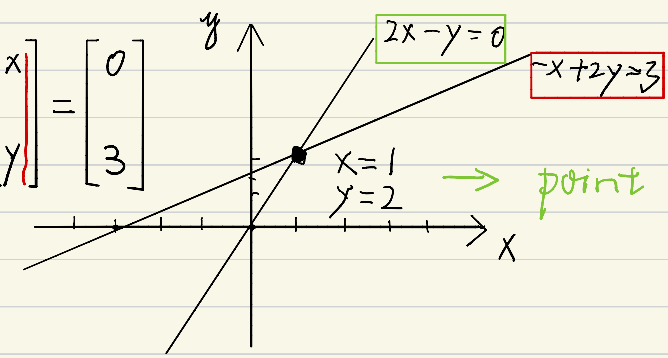
2. 几何解释.

eg1. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A X = b$$

2.1 Row Picture: 一次取一行构成方程.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

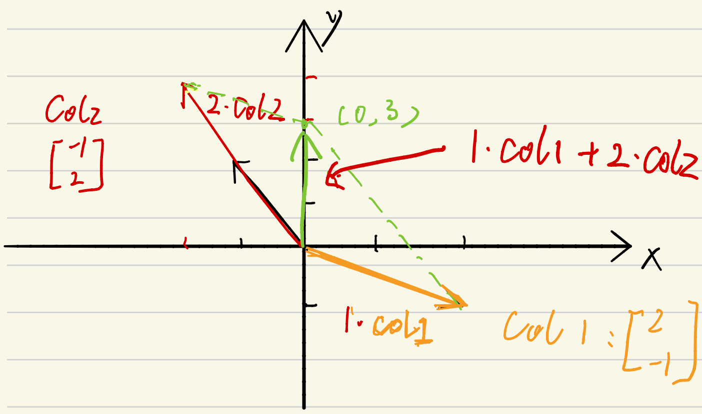


→ point on both line.

2.2. Column Picture.

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

find the $\boxed{\text{Linear Comb. of Columns.}}$



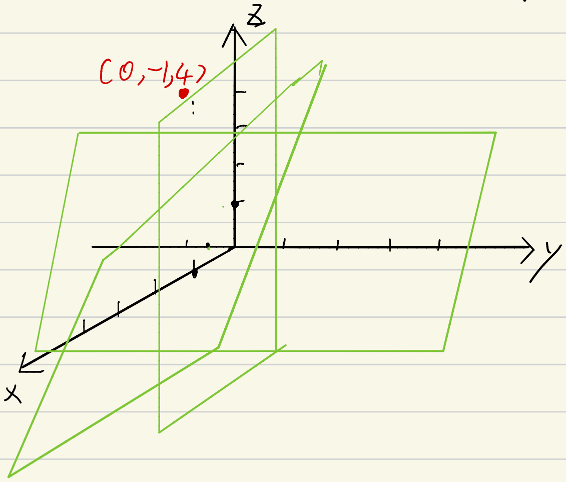
$\boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}}$

$AX = b$: $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 对于任意 x 和 y, 可以得到矩阵 A 的列向量的所有线性组合, 这个线性组合构成了矩阵 A 的列空间, 该列空间构成 $\mathbb{R}^2$。从方程的角度出发, 对于任意 b, $Ax=b$ 有解。

3、推广

eg2. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

3.1 Row Picture：三个面交于一点



Singular：一个列向量可以由其它列向量线性组合而成.

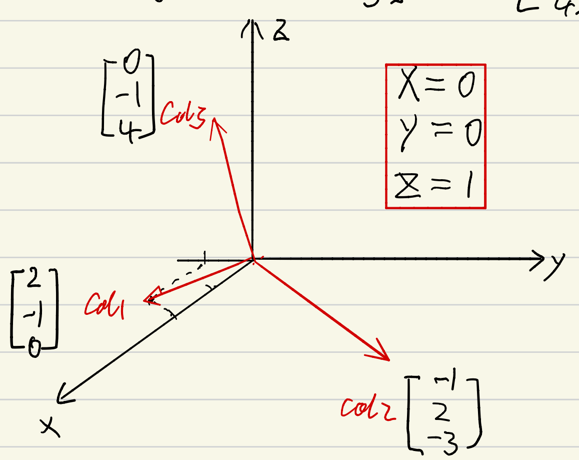
eg. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

只能构成一个平面.

3.2 Column Picture

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Can I solve $Ax = b$ for every b?

从线性组合的角度来讲，问题变为：矩阵A的列向量的线性组合是否可以 fill 一个3-D space?

★ 对于 non-sigular matrix A, the answer is Yes!!!

3.3、矩阵乘法

例如 Ax ，如果我们已知一个矩阵 A 和一个向量 x，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，我们这样求：

- 方法 1：将矩阵 A 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即 x 每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做 A 各列的线性组合。

- 方法 2：将矩阵 A 看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,5)\cdot(1,2) \\ (1,3)\cdot(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法：$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*5 \\ 1*1+2*3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*5 \\ 1*1+2*3 \end{bmatrix}$$