Lecture 27. Positive Definite Matrices & Minima

1. Overview.

2、正定矩阵

2.1 如何判断对称矩阵是否正定？

给定一个 2X2 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

1. 特征值：$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$
2. 行列式：$a>0$, $ac-b^2>0$
3. Pivot: $a>0$, $|A|/a>0$.
4. ☆ $x^TAx>0$, $(x\neq 0)$

eg. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & y \end{bmatrix}$，选择什么 y 可以使 A 正定？

$|A|=2y-36$ $\quad |A|/2=y-18>0 \Rightarrow y>18$.

如果 $y=18$，A在判定为正定的临界点上，称为 Positive Semidefinite 矩阵.

当A半正定，A是 singular，一个 λ 是 0，另一个是 $tr(A)-0$。并且只有一个 pivot.

A的特征值大于等于 0.

x^TAx:

Quadratic Form.

$$x^TAx=[x_1 \ \ x_2]\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=[x_1 \ \ x_2]\begin{bmatrix} 2x_1+6x_2 \\ 6x_1+18x_2 \end{bmatrix}=2x_1^2+12x_1x_2+18x_2^2$$

$$\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & a & b \\ & b & c \end{array} \qquad ax^2 \quad 2bxy \quad cy^2.$$

在引入 x^T 后，x^TAx 形成二次型。

☆ $ax^2+2bxy+by^2$ 是否大于0？

① 如果 $x_1=3$, $x_2=-1$，上式等于 0.

② 如果把A改成 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$，二次型为 $2x_1^2+12x_1x_2+7x_2^2$，Pivot 是一正一负，不是正定。

当 $x_1=1$, $x_2=-1$，上式恒小于 0。有一个 Saddle Point 在原点。

③ 如果把A改成 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$，pivots 为正，或看 $|A|>0$, $tr(A)>0 \Rightarrow \lambda>0$. 正定。

$2x_1^2+12x_1x_2+20x_2^2$ 恒大于 0 当 $x_1,x_2\neq 0$。在原点为最小值。

判断最小值的依据：① 一阶导为0，有极值

② 二阶导为正，有最小值

Calculate: Min ~ $\frac{du}{dt}=0$, $\frac{d^2u}{dt^2}>0$

Linear Algebra: Min ~ Matrix of 2nd Derivative is positive definite.

} why。

对二次型可以用配方法判断是否有最小值。

- 对于 $f(x,y)=2x^2+12xy+20y^2=2(x+3y)^2+2y^2>0$
  几何图像是一个 bowl，在不同高度截面，例 $f=1$，得到一个椭圆曲线。

- 对于 $f(x,y)=2x^2+12xy+18y^2=2(x+3y)^2$ 临界点，半正定

- 对于 $f(x,y)=2x^2+12xy+7y^2=2(x+3y)^2-11y^2$ 横截面为双曲线。

配方法的本质是消元：

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}}\rightarrow\underset{U}{\begin{bmatrix}2&6\\0&2\end{bmatrix}}\qquad L=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\qquad A=LU.$$

$$\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}2&6\\0&2\end{bmatrix}}:\ f(x,y)=2(x+3y)^2+2y^2.$$

Pivot 就是平方系数，L 矩阵的行操作数就是配方项内 y 的系数。所以 pivot 全为正是正定的条件。同时只有 pivot 全为正，二次型才一定为正 ($x^TAx>0$)，vise versa.

二阶导数的矩阵记为 $\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}$，求二阶偏导与顺序无关 $f_{xy}=f_{yx}$。

☆ 根据 $f_{xx}f_{xy}>f_{xy}^2$???

如果二阶导数矩阵正定，则有极小值。

之后补充！