Lecture 10. Four Fundamental Subspaces.

1. Overview.

$R^{m\times n}$ $m\times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵为 A^T

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Four Fundamental Subspace.

2.1. 维数和基.

- **Column Space $C(A)$**

  1. 什么是 $C(A)$

     A 的所有 column 的线性组合构成的空间. 因为每个 column 有 m 个分量，所以列空间是 R^m 的子空间

  2. 如何求 Basis.

     Row reduction. $A \rightarrow U$

  3. $C(A)$ 的维数.

     等于 rank r. $\dim(C(A)) = r$

- **Null Space $N(A)$**

  1. 什么是 $N(A)$

     $Ax=0$ 的特解的所有线性组合构成的空间。

     因为每个特解有 n 个分量，所以 Null Space 是 R^n 的 subspace.

  2. 如何求 Null space 的 Basis.

     Row Reduction 找到 free columns/variables，赋值 0 or 1，可得到一组 Special Solutions，

  3. $N(A)$ 的 Dimension.

     $n-r$ 决定了 X 中 free variable 的个数，等于 special solution 的个数，所以 $\dim(N(A)) = n-r$.

- Row Space. $C(A^T)$ $R(A)$

1. 什么是 Row Space.
A 的行向量的所有线性组合构成的 Space.
因为每个行向量有 n 个分量，所有行空间是 R^n 的子空间.

2、如何求 Basis?
Basis for row space of A is first. r rows of R.
方法一：先矩阵 A 的转置 A^T，所后求 $C(A^T)$
方法二：对 A 进 Row Exchange.，得到 Reduced Row Echelon Form. R.

3. R(A) 的维数
等于 Rank r.

注：Row Reduction 后，$C(A) \neq C(R)$
$R(A) = R(R)$

4. NullSpace of A^T = $N(A^T)$ = Left nullspace of A in R^m

- 左零空间：Left Null Space of A. $N(A^T)$

1. 什么是 Left Null Space.
A 转置后形式 A^T，$A^Ty=0$ 的特解的所有线性组合构成的空间。
每个 y 有 m 个分量，因为 $N(A^T)$ 是 R^m 的子空间.
本质上是 Row Vector 线性组合的系数构成的向量空间.
即 $y^TA=0$ [$(A^Ty)^T=0 \Rightarrow y^TA=0$]

2. 如何求 Basis?
Gauss-Jordan. Elimination.
$[A \mid I] \to [R \mid E]$ E中，使R中产生全0行的行向量就是 $N(A^T)$ 的基。
等价于 $E[A \mid I] = [EA \mid EI] = [R \mid E]$.

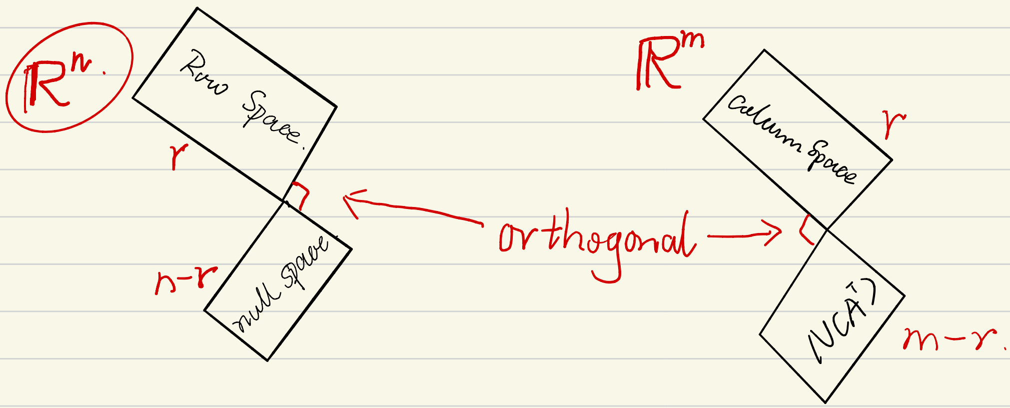
$$EA = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ A \\ \\ \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}}_{R} = R.$$

3. $N(A^T)$ 的维数

$m-r$

2.2. 四个基本空间的图像:

$m \times n$



	$C(A)$	$R(A)$ $C(A^T)$	$N(A)$	$N(A^T)$
Basis	Pivot Cols	Pivot Cols of A^T	Special Solutions	Special Solutions of A^T
Dimension	r	r	$n-r$	$m-r$

3. 矩阵空间 Intro

矩阵空间: 矩阵构成的空间.

封闭性:

给定 3x3 矩阵 A, B, 常数 c.

- 加法: $A+B$ 仍然是 3x3 矩阵.
- 数乘: cA 仍然是 3x3 矩阵.

所有的 3x3 的矩阵构成的线性空间, 它们的子空间有什么?

上三角矩阵, 对称矩阵, 对角矩阵 diag.
upper　sym

upper ∩ sym = diag.