Lecture 9. Independent. Basis. Dimension

1. Overview.

- Linear Independent
- Spanning a space
- Basis & Dimension.

2. Dependent & Independent.

2.1 背景

$m \times n$ 矩阵 A $(m<n)$

$$A = \begin{array}{cc} n & \\ \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} & m \end{array}$$

对于 $Ax=0$，有未知数 n 个，方程有 m 个。 $n>m$

存在除 0 以外的 non-zero solutions，因为 A 至少有 $n-m$ 个自由列，即 $n-m$ 个 free variables. 于是 $N(A)$ 中有非零解 !!!

2.2. Independent.

1. 从向量的线性组合：

设向量组：$x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots x_n$.

对于任意 c（不全为0），各向量线性组合无法得到 0 向量，则称，此向量组：Independent. 反之，dependent.

Independent：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \neq 0$, except all $c_i = 0$

2. 从矩阵的 Null Space： 注：Indepent 与向量组有关，与矩阵无关.

设矩阵 A 的列向量为：$v_1 \ v_2 \ v_3 \cdots v_n$

$r=n$ • 如果 Null Space 只有 0. $N(A)=\{0\}$，则它们 Independent.

$r<n$ • 如果 $Ax=0$ 存在非 0 解，则 Dependent. 有 free variable.

3. 从 Rank：

Independent： $r=n$. $\rightarrow$ 0 free variable

Dependent： $r<n$. $\rightarrow$ $n-r$ free variables.

3. Spanning a Space, Basis, Dimension.

3.1 Spanning a Space.

Vector $v_1, v_2, \cdots, v_n$ Span a vector space means:
The space consists of all combs. of those vectors.

如何生成空间又能线性无关？

- 向量个数不够，无法构成空间；
- 向量个数过多，则可能不是线性无关。

3.2 Basis

向量空间的Basis是一组向量：
该向量组：
1. 向量组 Independent.
2. They span the space.

1. 某个空间的Basis是否唯一？
不，可以找到不同的向量组。基的个数是确定的，这个个数就是空间的维数。
2. 将基的所有向量作为列向量组成一个矩阵A，该矩阵有何特征？
A可逆，因为所有 column vector 线性无关，$Ax=0$ 的解只有0.
A is non-singular.

例：一个 3-D space 中 R^3.

一组基是：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

另一组基是：$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\8\end{bmatrix}$

R^n 中 n个向量构成Basis，
n个向量构成的 $n\times n$ 矩阵可逆!!!

3.3 Dimension of the space.

维数等于Basis的个数。

例：假一个 column space $C(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A的Columns是否是Basis?

No.

1. 它们可以Span a Space.
2. 它们不是线性无关的。

(2) 找到一组基。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(A) = 2$$

注：rank针对的是matrix,
dimension针对的是space.

$\dim(N(A)) = n - r = \#$ of free var.

$\dim(C(A)) = r$