Lecture 24. Markov Matrics, Fourier Series.

1. Overview

两者都是特征值和特征向量的应用。

2. Markov Matrices

$$A = \begin{bmatrix} .1 & .01 & .3 \\ .2 & .99 & .3 \\ .7 & 0 & .4 \end{bmatrix}$$

① All entries ≥ 0

② All columns add to 1.

Markov Matrix 的 Power 依然是 Markov Matrix.

上一节讲过，处理微分问题时，特征值为 0 意味着能得到一个稳态。

而现在进行 Power 运算，得到稳态的条件是：

① $\lambda_1 = 1$ 是特征值之一。

② 其它特征值的绝对值都比 1 小，$|\lambda_i| < 1$

如果 A 具有 n 个线性无关的向量：

$$u_k = A^k u_0 = c_1 \underset{1}{\lambda_1^k} x_1 + c_2 \underset{0}{\lambda_2^k} x_2 + \cdots + c_n \underset{0}{\lambda_n^k} x_n \to c_1 x_1 \quad \text{Steady Status.}$$

如果 $\lambda_1 = 1$，其它 $|\lambda_i| < 1$，则系统在 k 增大时，趋近于 $c_1 x_1$，达到稳定态。

这里特征向量 x_1 的每一个分量都为正。如果初始值为正，最终的状态也为正。

- Markov 矩阵始终有 1 这个特征值。

  其每一列相加等于 1 保证了这个性质。

假设有$\lambda=1$：$A - I = \begin{bmatrix} -0.9 & .01 & .3 \\ .2 & -0.01 & .3 \\ .7 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}$. 因为每一列减去一个 1，又因为 A 的每列和为 1。所以 $A-I$ 的每列和为 0，也就是

$A-I$ 的行向量相加等于 0. 因此，行向量线性相关

$A-I$ 是一个 singular matrix.

又 A 的特征向量在 $A-I$ 的 Null Space 中，

$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \quad |A - \lambda I| = 0$. 而 $A-I$ 是对应特征值为 1 时，$|A-I| = 0$ (成立) 那么其对应的特征向量就是在 $A-I$ 的 Null Space 中。

$$(A - I)x = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 33 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

转置矩阵的特征值：eigenvalue of A = eigenvalue of A^T

根据性质10. $|A|=|A^T|$

又 $(A-\lambda I)^T = A^T-\lambda I$

所以 $|A-\lambda I| = |A^T-\lambda I| = 0$

如果 λ 是 A 的特征值 则同时也是 A^T 的特征值。

但 两者的 特征向量 有区别。$N(A-\lambda I) \neq N(A^T-\lambda I)$

应用：研究人口流动。 $u_{k+1} = A u_k$ A：Markov

$$\begin{bmatrix} u_{CA} \\ u_{MA} \end{bmatrix}_{t=k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u_{CA} \\ u_{MA} \end{bmatrix}_{t=k}$$

u 代表 CA 和 MA 的总人口，每一列代表 人口去留。$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ 代表 0.9 的 CA 的人留下，0.1 到 MA，$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$ 代表 0.2 MA 的人去 CA，0.8 的人留下。

$u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$，则经过一次迭代 $u_1 = \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 800 \end{bmatrix}$

因为 A 是 Markov Matrix，有一个 $\lambda=1$，则另一个是 0.7

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$。从 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 可知，稳态是 $c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

通解是 $u_k = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 (0.7)^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$2c_1 + c_1 = 1000 \Rightarrow c_1 = \frac{1000}{3}$$

$$c_2 = \frac{2000}{3}$$