Lecture 7. 求解 $Ax=0$, Pivot Variable, Special solution

1. Over-view

1. 求解矩阵的零空间的算法（求解 Ax = 0 的算法）
   - 对于方程 Ax = 0，对 A 向下消元，碰到无法取得主元的列，不管它，接着消元，直到得到行阶梯矩阵 U（Row echelon form matrix），确定主列及自由列，确定主变量与自由变量，令自由变量为 0 和 1，求出特解，特解的线性组合即为零空间；接着向上消元，使得主元全部变为1，主元上方和下方的变量全部为 0，得到最简行阶梯矩阵 R(Reduced row echelon form matrix, rref)，由最简行阶梯矩阵即可得到零空间矩阵N（Null space Matrix）。由零空间矩阵 N 可以直接得到特解（因为零空间矩阵各列由特解组成）
   - Ax = 0 –> Ux = 0 –> Rx = 0 –> RN = 0
   - 这里的 R 用最简的形式包含了所有的信息。
2. 一些概念
   - 主行、主列 (Pivot cols, rows)
   - 主变量、自由变量（Pivot variables, Free variables)
   - 矩阵的秩（Rank）

2. 求解 $Ax=0$.

假如 A 不可逆，求出的解不唯一，构成一个空间.

2.1. Elimination. $A \to U$

eg. $A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，求由 $Ax=0$ 中 x 构成的 Null Space

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

Pivot的个数称为 Rank.

$\text{Rank}(A)=r=2$.

Row echelon form

Free Column

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Pivot Column.

其中 free column 指其对应的未知变量 x 可以自由的赋值。

pivot variable: x_1, x_3

free variable: x_2, x_4

2.2. Substitution.

$$Ux = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Special Solution

1. 令 free variable $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，代入上式：得 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. 令 free variable $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，代入上式：得 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

通过 Special Solutions 的任意的线性组合可以构造出整个 Null Space。

即：$\begin{cases} Ax=0 \text{ 的所有解} \\ Ax=0 \text{ 中的 } x \text{ 构成的 Null Space} \end{cases}$ 为

$$x = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

☆ Special Solution 的个数 等于 # of free variable

$$\boxed{\# \text{ of free variable} = n - \text{rank}(A)}$$

3. 简化 $U \to R$.

Reduced Row Echelon Form

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R = \text{rref}(A)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ in pivot row & pivot col

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F$ in free row & free col

$m \times n$ 的 A 的 Reduced Row Echelon Form. R

$$
(列变换后) \quad R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \; r \text{ pivot rows.}
$$

r pivot cols　$(n-r)$ free cols.

其中：$I_{r\times r}$

现假设一个 Null Space Matrix N：即各列由 Special Solution 组成。

有：

$$
Ax = Rx = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{pivot} \\ x_{free} \end{bmatrix} = RN = 0
$$

得

$$
N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \quad I \rightarrow I_{(N-r)\cdot(n-r)}
$$

$$
x_{pivot} \cdot I + x_{free} F = 0
$$

$$
\Rightarrow x_{pivot} = - x_{free} \cdot F
$$

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，求 $Ax=0$ 中 x 构成的 Null Space.

(1) $A \rightarrow U$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

(2) $U \rightarrow R$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$　rank $(A) = 2$. $n=3$.

(3) $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $-F = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $N = \begin{bmatrix} -F \\ I_{(n-r)\cdot(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 　($-F$; $I_{1\times 1}$)