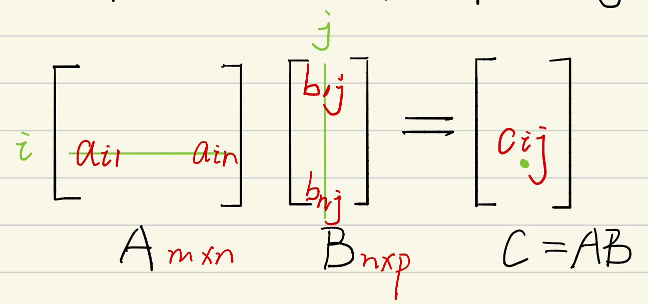
Lecture 3. Multiplication & Inverse Matrices

1. Over-view

矩阵乘法 和 逆矩阵 的条件。

2. Matrices Multiplication.

2.1. 矩阵乘法定义视角求解：Regular Way.

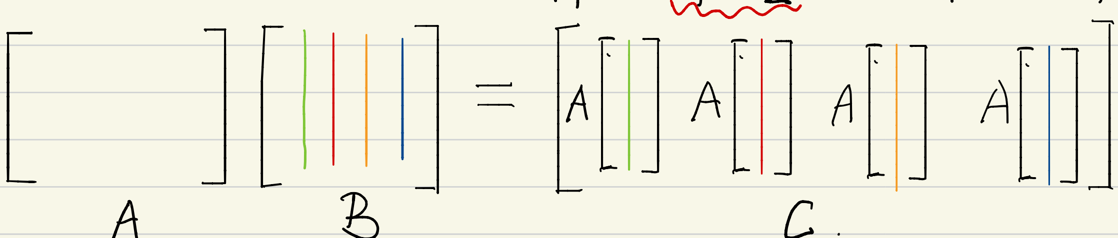


$$c_{ij} = (\text{row } i \text{ of } A)\cdot(\text{column } j \text{ of } B)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

2.2 从行向量/列向量线性组合的视角求解.

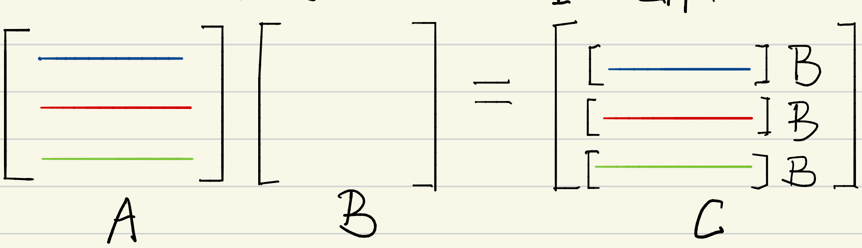
2.2.1 列组合：矩阵A·列向量 = 矩阵A的列向量的线性组合.



$$A\cdot B_{col_j} = C_{col_j}$$

矩阵A与一个列向量相乘，等于A的列向量的一个线性组合，再将该组合合并到C中。所以，C的列向量是由A的列向量线性组合而成。

2.2.2 行组合：行向量·矩阵A = 矩阵A的行向量的线性组合.



$$A_{Row_i}\cdot B = C_{Row_i}$$

C的行由B的行线性组合而成。

2.3、列乘以行　　$A \cdot B = C$.

$A * B = [A$ 的列 $\times$ B 的行$]$ 求和.

eg.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 矩阵中每一列都与 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 同向，也就是列向量都在 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 这条线上，列空间是一条线。
- 同理，行向量都在 $[1 \quad 6]$ 直线上，行空间是一条线

2.4 block multiplication.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]}_{A} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]}_{B} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & \\ \hline & \end{array}\right]}_{C}$$

3. Inverse.

3.1 矩阵的逆，不存在逆的原因：

- If A^{-1} exists, then $A^{-1}A = I = AA^{-1}$

  A: Square Matrix, 不是 singular Matrix.

- 如果存在非零向量 x，使 $Ax = 0$ 成立，则 A 不可逆

  证明：假设 A 可逆，则 $A^{-1}A = I$，且 $x \neq 0$

  $$A^{-1}Ax \neq A^{-1}0 \quad \text{与式不成立}$$

  ∴假设矛盾，A 不可逆.

3.2 存在逆，如何求逆？

eg. 求 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Gauss-Jordan (Solve 2 equations at once)

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\quad A \quad I \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I \quad A^{-1}$$

证明：上述过程实际上是 Elimination，使 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 变为 I，相当于左乘一个 E 进行行变换。$EA = I$，则 E 就是 A^{-1}.

$$E\left[A \,\vdots\, I\right] = \left[EA \,\vdots\, EI\right] = \left[I \,\vdots\, A^{-1}\right]$$

∴上述过程成立。