Lecture 18. Properties of Determinants.

1. Overview

行列式

2. 行列式的性质

- 行列式记法：$\det(A) = |A|$

- 行列式运算方法：

  2×2：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- 性质：

  1. $\det I = 1$

     $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

  2. Exchange the row reverse sign of det

     $\det(\text{Permutation Matrix}) = \begin{cases} +1 & \text{even exchanges} \\ -1 & \text{odd} \end{cases}$

     $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

  ☆ 3. a. 如果行列式中一行乘以一个系数 t，则等于整个行列式乘以系数 t.

     $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t(ad - bc)$

     b. 行列式是一个线性函数，但该线性只，单独反映在每一行上.

     $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$

     注：这里的线性并不是指：$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$，并不作用在整个矩阵上，只对每一行起作用，且每一行单独作用。

  4. 如果两行相同，行列式等于 0.

     证明：利用性质2，交换相同的两行，sign 改变，但行列式不变，只有 0 满足。

  5. 对行列式作 Elimination，如 substract $l \times \text{row}_i$ from row_k，行列式值不变。 变成三角矩阵

     $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$

     $\overset{3.b}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -al & -bl \end{vmatrix}$

     $\overset{3.a}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - l\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$

     $\overset{4}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0$

6、如果一行全为 0，det 等于 0 . Singular.

证明：利用性质 3.a，$t=0$.

7、如果矩阵是三角矩阵，det 等于对角线上元素的积..

$$\det(U) = \begin{vmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & d_n \end{vmatrix} \overset{5}{\underset{2\text{ is optional}}{=\!=}} \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & & 0 \\ & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & d_n \end{vmatrix} \overset{3.a}{=\!=} d_n \cdots d_2 d_1 \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \overset{1}{=\!=} d_1 d_2 \cdots d_n$$

8. • $\det A = 0$ 当且仅当 A is singular. $\longrightarrow$ row 0

• $\det A \neq 0$ 当且仅当 A is not singular (Invertible) $\rightarrow U \rightarrow D \rightarrow d_1 d_2 d_3 \cdots$

☆ 9. $\det AB = (\det A) \cdot (\det B)$ $|AB| = |A||B|$

① 可逆矩阵的行列式与其逆矩阵的行列式互为倒数.

$A^{-1}A = I \rightarrow \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A = 1$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

② $|A^2| = (|A|)^2$

$\det A^2 = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

③ $|kA| = k^n |A|$

$$\det kA = \begin{vmatrix} ka_1 & \cdots \\ ka_2 & \cdots \\ k & \cdots \\ ka_n & \cdots \end{vmatrix} \overset{=}{\underset{3.a}{}} k^n \det A$$

☆ 10. $\det A^T = \det A$.

也就说：如果一列全为 0，利用性质 10 与 6，行列式等于 0.

证明：$A = LU$

$A^T = U^T L^T$

$\det A^T = \det U^T \det L^T$

利用性质 5. $|U^T|$ 等于对角线的积.. 等于 $|U|$，L 同理.

$\det A^T = \det L \det U$

$= \det A$.