Lecture 5. Transpose, Permutations, Space R^n.

1. Over-view.
   - Permutation
   - Transpose
   - Symmetric
   - Vector Space & Subspace.

2. Permutation.

Permutation P: Identity matrix with reordered rows, which are used to execute row exchang.

P 用于行变换。

上一节，$A = LU$ 是基于 Pivot 非 0，不用行变换
但如果 pivot 为 0，则要 row exchange，于是：

$$PA = LU$$，对于任意 Invertable A.

3. Transpose & Symmetric Matrices.

3.1 Transposes：对于 A，$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{2} & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(2,1) (1,2)

3x2 2X3

3.2 Symmetric Matrices：对角线两侧元素对应相等.

- 对称矩阵性质：$A^T = A$
- 构造对称矩阵：

$(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T$

对于任意 Retangle Matrix R，
R^TR 总是一个对称阵。

eg.
$$\underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{R^T}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{RR^T}{\begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 13 & 11 \\ 7 & 11 & 17 \end{bmatrix}}$$

证明：如果 RR^T 是对称的，
则 $(RR^T)^T$ 也是对称的。

$(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T$

证毕.

4、Space：Vector Space & Null Space

4.1 Vector Spaces，表示一整个空间的向量。

定义：对以下运算满足封闭性，即两个向量相加 or 数乘后得到的向量仍然属于这个向量空间，即向量的线性组合之后所得向量仍然属于这个向量空间。

- 加法：$v+w$
- 数乘：av，a 是标量
- 线性组合：$av+bw$

任何向量空间与其子空间都要满足封闭性。

eg. R^2 是一个 2-D 向量空间，均为实向量（Real Vectors）

$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$…… 均在向量空间中。

空间是一个平面，这些向量的线性组合都在这个平面上，且含有零向量。任何 vector 数乘 0 都等于 0 向量，所以零向量在所有向量空间中。

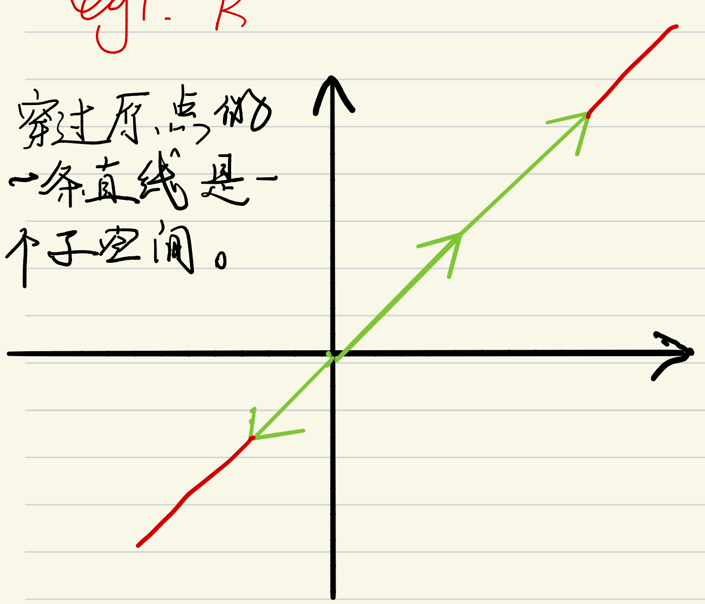
☆ 推广：R^n 是所有的 n 维向量，所有 column vector 都有 n 个实数分量。

4.2 Subspace：取向量空间的一部分仍然构成向量空间。

A vector space inside R^n

eg1. R^2

穿过原点的一条直线是一个子空间。



eg2. R^3 的 subspace

1. 所有过原点的 plane
2. 所有过原点的 Line
3. Zero vector，原点，
4. R^3 本身

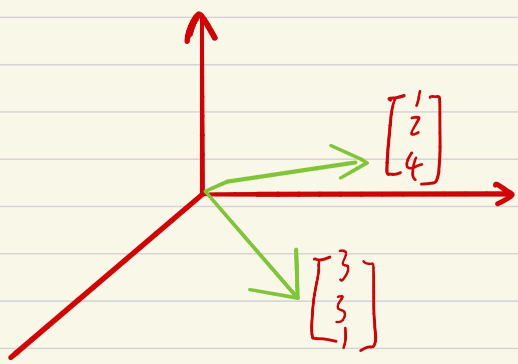
4.3. 利用 column vector 构建 Column Space.

矩阵A，所有的列向量的 linear comb. 组成了一个 subspace，称成 Column Space. C(A)

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 的 column space.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 属于 R^3，且满足"线性运算封闭"。

它们的线性组合构成 R^3 的 subspace, called Column Space C(A)



Form a Plane.