Lecture 28. Similar Matrices & Jordan Form.

1. Overview.

Even More Important.

2. 正定矩阵

若矩阵A满足对任意向量 x 有 $x^TAx>0$，则称A为正定矩阵。通过 λ，pivot，行列式的办法来判断正定性。

那么，正定矩阵从何而来呢？

正定矩阵来自于 Least Square. 有大量的实际问题用到 rectangular matrices，而 Least Square 中用到了 A^TA，它是正定矩阵。（正数）

- 如果一个对称矩阵A是正定的，A^{-1} 也是正定的，逆矩阵的特征值是原矩阵特征值的倒数。

① ②

证明①：∵ A是 positive definite ①
∴ A是 Symmetric，$A^T=A$
∵ $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$
∴ A^{-1} 也是 symmetric.
如果 A^{-1} 正定，则 $x^TA^{-1}x>0$，$x\neq0$.

$$x^TA^{-1}x = x^TA^{-1}AA^{-1}x$$
$$= x^T(A^{-1})^TA\cdot A^{-1}x$$
$$= (A^{-1}x)^TA(A^{-1}x)$$

$A^{-1}x\neq0$
∴ $x^TA^{-1}x>0$
A^{-1} 正定。

证明② Suppose λ 是A的一个特征值，x是对应的特征向量，$Ax=\lambda x$.
同时乘 A^{-1} 得 $A^{-1}Ax=\lambda A^{-1}x \Rightarrow x=\lambda A^{-1}x$.
∴ $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$

- 如果A和B都是正定的，那么 $A+B$ 也是正定矩阵：$x^TAx>0$，$x^TBx>0$，有 $x^T(A+B)x>0$.
- 如果A是一个 $m\times n$ 的 rectangular matrix，则 A^TA 是对称矩阵。

证：$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$
证毕

- A^TA 在什么情况下正定。

要使 $x^T(A^TA)x>0 \Rightarrow x^TA^TAx=(Ax)^TAx>0 \Rightarrow |Ax|^2>0$ 只有当 $x=0$ 时，$Ax=0$.
也就是说 $Ax=0$ 只有 $x=0$ 时满足，$N(A)$ 有且只有0向量。所以A不是 singular，A满秩。
所以 A满秩时，A^TA 正定

3. 相似矩阵

3.1 定义

A和B都是 $n\times n$ 矩阵，如果存在可逆矩阵M，使得 $B=M^{-1}AM$，则A和B相似。

eg. 如果A有n个线性无关的 eigenvectors，可对角化 $S^{-1}AS=\Lambda$，A与 Λ 相似。这里M取S，如果M是其它可逆矩阵，可以得到另一个相似矩阵B。A的相似矩阵类似于一个 family，Λ 是其中最简洁的。

eg. $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，则 $\Lambda=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad A\sim\Lambda$

$$\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-2&-15\\1&6\end{bmatrix}}_{B} \quad A\sim B.$$

3.2 相似矩阵的$\boxed{\text{主要性质}}$，A与B相似。

- A和B有相同的特征值，且线性无关的特征向量个数相同。

证明矩阵A的相似矩阵B具有相同的特征值。

$Ax = \lambda x$

$\because A \sim B$，$B = M^{-1}AM$.

$Ax = \lambda x$

$\Rightarrow AMM^{-1}x = \lambda x$

$\Rightarrow M^{-1}AMM^{-1}x = M^{-1}\lambda x$

$\Rightarrow BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$

$\Rightarrow$ B的特征值是λ，特征向量是$M^{-1}x$.

我们记得，如果一个矩阵有相同的多个特征值，那么有可能有多个特征向量，也可能只有一个（<n），则无法对角化，由此引出 Jordan Form.

4. Jordan Form

4.1. 标准型。

如果有 repeated eigenvalues，可能无法对角化。

例A.二阶矩阵有相同的特征值，$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

第一类：$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 只与自己相似，$M^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}M = 4M^{-1}IM = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

这个 Family 只有其本身

第二类：包含其它所有 repeated eigenvalues 为4的矩阵：

其中，最简洁的是 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，1换成其它值，仍是相似矩阵。（不为0）

这个形式就叫 Jordan Form.

> Jordan Form：近乎对角化矩阵。除主对角线，主对角线上方的系数可以为0或1，其余为0.

例子中第二类可以构造出很多相似矩阵，trace = 8，$|A| = 16$.

4.2 Jordan Block.

例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，4个重特征值。$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

A的秩为2，N(A)的维数等于 $4-2=2$. 因为 $Ax = \lambda x$，$\lambda = 0$，所以特征向量在A的N(A)中，有2个。

如果 Jordan Form 主对角线上系数增加一个，矩阵就会减一个特征向量。

例B. $B=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & \boxed{0}\end{bmatrix}$. B与A相似。 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}}\end{bmatrix}$, C与A不相似。

- Jordan Block:

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

，主对角线上是重复的特征值，对角线上方系数为1，其余为0。每个Block只有一个特征值和特征向量。

若干个Jordan Block组成了Jordan Matrix。

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & 0\\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_d\end{bmatrix}$$

，两个矩阵有相同的特征值和特征向量个数，但其Jordan Block尺寸不同，两个矩阵不相似。

4.3 Jordan 理论。

任意n阶矩阵A都与一个Jordon Matrix相似。Jordon Matrix中每一个Jordon Block对应一个Eigenvectos。如果A有n个特征向量，则可以对角化。此时其Jordan Form：J就是对角矩阵Λ。如果有重复的eigenvalues，则特征向量个数变少。