Lecture 19. Determinant Formulas and Cofactors.

1. Overview.

利用上一节性质找到行列式求解公式和代数余子式。

2. Determinant Formulas.

2.1 2阶矩阵行列式.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.b}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}_{0}$$

$$\overset{6.10}{=} 0 + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$\overset{2}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.a}{=} ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - cb\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1}{=} ad - cb.$$

注：观察得出：行列式的解取决于分解在每一行，每一列都有非0值的行列式的和。

2.2. 3阶矩阵行列式

利用上式得出的结论，3阶行列式可以分成以下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{vmatrix}$$

$$\overset{2.3}{=} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

注：观察得出：n阶行列式可以分解出 $n!$ 个非零行列式。因为第一行有n种选择，第二行 $n-1$ 种，依此类推。

2.3 行列式的一般公式：如何确定符号？Cofactor.

$$\det A = \sum_{n!\ terms} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\omega}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega) = \text{permutation of } (1, 2, 3, \cdots n)$$

eg. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

3. Cofactors. 代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{vmatrix}$$

a Cofactor

- 作用：方便求解行列式，将 n 阶行列式化成 n-1 阶行列式。
  对于一个行列式，当选中一个元素时，剩下的元素就不能出自于前一个元素所在的行和列。由于剩下这些元素又可以组成一个新的行列式。这个 n-1 阶的行列式就叫 Cofactor.
- 表达形式：a_{ij} 位置对应的 cofactor 记作：C_{ij}.
- Cofactor 正负符号：C_{ij} 的正负由 $(i+j)$ 的奇偶性决定。 $(-1)^{(i+j)}$
  - $(i+j)$ 为 even，则为正
  - $(i+j)$ 为 odd，则为负
- Cofactor 展开一个行列式：
  例：按第一行展开：
  $$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

例： $A_1 = 1$， $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$， $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$， $A_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$。寻找规律.

$A_1 = 1$ $\quad A_2 = 0$ $\quad A_3 = -1$

$$A_4 = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_3 - A_2 = -1$$

$* \; A_n = A_{n-1} - A_{n-2}$. $\quad \underbrace{1, 0, -1, -1, 0, 1}_{6为周期循环} \; 1 \; 0 \; -1 \; -1 \; 0 \; 1$

- 总结：行列式计算方法：

  1. 利用性质，完全展开 （太复杂）
  2. 利用 Cofactor，按一行展开 （比较复杂）
  3. 将 A 分解为 LU 三角矩阵 （Easy）