Lecture 25. Symmetric Matrices & Positive Definitness.

1. Overview.

Very Very Very Imporeant.!!!

2、对称矩阵

对称矩阵是 $A=A^T$ 的矩阵。具有特殊性质的矩阵，如 Markov Matrix，通常其特征值和特征向量往往拥有一定特性。

对于一个实数对称矩阵：

$Ax = \lambda x$

- 特征值为实数
- 特征向量为正交向量。Perpendicula. $\longrightarrow$ Orthonormal Eigenvectors

注：对于 Identity Matrix，特征值为 1，所有向量均为其特征向量。所以，这里说对称矩阵的特征向量互为正交是指能找出一组完全正交的特征向量。

一般情况下，A 可对角化：$A = S\Lambda S^{-1}$

对于对称矩阵 A：$A = Q\Lambda Q^{-1} = \boxed{Q\Lambda Q^T}$

Q 是 Orthonormal Matrix，列为标准正交基，且 $Q^T=Q^{-1}$

一个矩阵 A 能够分解成 $Q\Lambda Q^T$ 的形式，同时结合了特征值、特征向量以及对称矩阵，在数学上叫做 Spectral Theorem。Spectrum 是一个矩阵的一组特征值，想法来于光谱是一组"纯"光线的组合。

证明 1：为什么是实数特征值。

如果 A 为实数，x、λ 为复数，那么其共轭复数 ($i \to -i$) 通常满足：

$$Ax = \lambda x \xrightarrow{\text{always}} A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

$$(A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x})^T \Longrightarrow \bar{x}^T A^T = \bar{x}^T\bar{\lambda}$$

如果 A 是对称的，那么 $A = A^T$，则上式

$$\bar{x}^T A = \bar{x}^T\bar{\lambda} \xrightarrow{\times x} \bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$$
$$Ax = \lambda x \xrightarrow{\times \bar{x}^T} \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$$
$\Rightarrow$ 当 $\bar{x}^T x \neq 0$，$\lambda = \bar{\lambda}$ $\Longrightarrow$ λ 为实数

因为 $\bar{x}$ 与 x 共轭，$\bar{x}$ 与 x 点积，为分量与其共轭复数点积之和。

$$\overline{(a+ib)} = a - ib, \quad (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2+b^2 \Longrightarrow \bar{x}_1 x_1 = |x_1|^2$$

$$\bar{x}^T x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

由于证明 λ 为实数。

对于对称矩阵 $A=A^T$，$A=Q\Lambda Q^T$，Q: Orthonormal Matrix.

$$A=Q\Lambda Q^T=[q_1\ q_2\ q_3\cdots q_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1^T\\q_2^T\\\vdots\\q_n^T\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1 q_1 q_1^T+\lambda_2 q_2 q_2^T+\cdots$$

其中 $q_k q_k^T$ 是一个投影矩阵，$P=\frac{q_k q_k^T}{q_k^T q_k=1}=q_k q_k^T$。所以对称矩阵是正交投影矩阵的线性组合。

当已知矩阵 $A=A^T$，已经推导出 λ 是实数。那么 λ 是正实数还是负实数？这将影响微分方程是否稳定。

对称矩阵的 pivots，sign of pivots 等于 sign of λ's. # positive pivots = # positive λ.

$A+bI$ 的特征值等于 A 的 $\lambda+b$. 可以利用 $A+bI$ 的 pivots 的正负性，来分析 A 的 λ 与 b 的大小关系，来估计 λ 的状态。

3. 正定矩阵 Positive definite matrices.
- 正定矩阵是对称矩阵.
- 正定矩阵的 pivot 均为正数。(λ 也都是正数)

例：$A=\begin{bmatrix}5&2\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&2\\0&11/5\end{bmatrix}\rightarrow$ 正定　　pivot1 $=5$，pivot2 $=|A|/5$

$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\lambda^2-8\lambda+11=0$，$\lambda=4\pm\sqrt5$

所以正定矩阵的 pivot 和 λ 都为正，其行列式也为正。但反之不成立

例：$A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-3\end{bmatrix}$　　$|A|>0$ 但不是正定。

如果要将行列式作为正定的依据，要满足以下条件：

$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&&&\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ n×n 矩阵左上角的 All subdeterminants are positive.

正定矩阵：
- all λs are positive
- all pivots are positive
- all subdeterminants are positive.