Lecture 2. Multiplying and Factoring Matrices.

1. $A = LU$

LU factorization is about Elimination, L: lower triangular, U: upper triangular.

2. $A = QR$.

QR factorization : Q is orthogonal matrix.（列是标准正交的）, 与 Gram-Schmit 有关。

3. $S = Q\Lambda Q^T$

S: symmetric matrix, Λ: eigenvector diagonal matrix, Q: orthogonal matrix. (eigenvectors)

$$S = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}$$

$Q\Lambda Q^T$ 可以看作 $(Q\Lambda)(Q^T)$ 两个矩阵相乘。矩阵相乘可以理解为 column x row = rank 1 matrix, 然后把这些矩阵相加。

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 可见, column x Row 得到的矩阵, 每一列都是列向量的倍数, 每一行都是行向量的倍数。rank = 1, building blocks.

$S = Q\Lambda Q^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \cdots$ Spectrum Theory.

Look at Sq_1:

$$Sq_1 = \lambda_1 q_1 q_1^T q_1 + \lambda_2 q_2 \underbrace{q_2^T q_1}_{0} + \cdots + \lambda_n q_n \underbrace{q_n^T q_1}_{0} = \lambda_1 q_1 q_1^T q_1 = \lambda_1 q_1$$

4. $A = X\Lambda X^{-1}$

5. $A = U\Sigma V^T$

$A = LU$

例: $\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ 由此可以发现, elimination 的目的是因为 2 个方程组无法立即求解, 于是消元后得到 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 这样就可以很好计算了。

那么将矩阵分解成秩 1 矩阵之和, 则有 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \underset{\text{rank } 1}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & ? \end{bmatrix}} + \underset{\text{rank } 1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ? \end{bmatrix}}$

第一行一列不变, 扩展为一个秩一矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, 这样就得到第二个矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A = LU = \begin{bmatrix} l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^T \end{bmatrix}$

对于高阶矩阵,

$A = (L \text{ column } 1) \cdot (U \text{ row } 1) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & A_2 \end{bmatrix}$

$N(A^T) \perp C(A)$, $R(A) \perp N(A)$

$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ \equiv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ -4