Lecture. 4. Eigenvalue. Eigenvector.

$Ax=\lambda x$. 对于 $n\times n$ 矩阵 A, 通常能找到 n 个 Independent 的 x.

特征向量的优点？

- 关键之一是通过特征值查看 A 的幂的性质。

$A^2x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda^2 x$ ，特征向量不变，特征值不变。

$A^n x = \lambda^n x$

$A^{-1}x = \lambda^{-1}x \Rightarrow \lambda$ 不能为 0. 如果 $Ax=0$, 矩阵 A 就没有 Inverse. 又证明了一次。

$e^{At}x = e^{\lambda t}x$: 级数展开证明。

现假设 A 有 n 个独立的 eigenvector, 可以作为基。对于任意向量 v 可以作为这些基向量的线性组合。有些矩阵是没有完整的 eigenvector 的, 对于此类不适用。

Any vector $v = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

则有 $A^kv = c_1A^kx_1 + c_2A^kx_2 + \cdots c_nA^kx_n$

$= c_1\lambda_1^kx_1 + c_2\lambda_2^kx_2 + \cdots + c_n\lambda_n^kx_n$.

差分方程: $Av_k = v_{k+1}$ $\qquad \frac{dv}{dt} = Av$. $\qquad v(t) = c_1e^{\lambda_1 t}x_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}x_n$.

相似.

如果 B 相似于 A, 则二者满足 $B = M^{-1}AM$.

- 关键是 A 和 B 有相同的特征值

(相似矩阵 ⇒ 相同特征值)

证: $By = M^{-1}AMy = \lambda y \Rightarrow A\boxed{My} = \lambda\boxed{My}$, My 是 A 的特征向量, λ 是特征值。

所以, 对 MATLAB, 就是通过该性质, 选择一个 M 使 B 为三角矩阵, 特征值在对角线上。

AB 和 BA 有相同的非 0 特征值。

Set $M=B$,

$M(AB)M^{-1} = B(AB)B^{-1} = BA$

- 当特征值为 0 时, 无逆矩阵
- AB 的特征值不等于 A 的 λ_A 剩以 B 的 λ_B.
- A+B 矩阵特征值不等于特征值的和。且 $Ax=\lambda_A x$. $By=\lambda_B y$, x 不一定等于 y. A+B 可能无特征向量。

对称矩阵 S

- S 的特征值为实数，特征向量正交。

反例. Anti-Symmetric $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，其 eigenvalue 是虚数，作用是 rotate $90°$.

因为 Rotate $90°$，$Ax=\lambda x$，λ 是实数的话是不可能的。Ax 与 x 垂直。

求 λ：

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \quad ,\lambda=\pm i$$

- S 具有一整套特征向量，且能找到一组互相正交的特征向量。

即使某些特征值重复。

例：$S=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，$x_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

- S 和其特征值对角阵相似。

$$M^{-1}SM=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow SM=M\Lambda$$

$$S[x_1\ x_2]=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[Sx_1\ Sx_2]=[\lambda_1x_2\ \lambda_2x_2]=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$$

不仅是对称 S，对于矩阵 A 满足 $Ax_i=\lambda_ix_i$，$i=1,\cdots n$.

有 $A[x_1\ x_2\ \cdots x_n]=[\lambda_1x_1\ \lambda_2x_2\ \cdots\lambda_nx_n]=[x_1\ x_2\ \cdots x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$$\boxed{AX=X\Lambda\Rightarrow A=X\Lambda X^{-1}}$$

A 的幂：$A^2=X\Lambda X^{-1}X\Lambda X^{-1}=X\Lambda^2X^{-1}$，通过特征值和向量计算.

对称：$S=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$