Lecture 3. Orthonormal Columns in Q give $Q^TQ=I$

Q的列向量为标准正交向量：

$$Q^T=\begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \Rightarrow Q^TQ=I$$

QQ^T 什么情况下等于 I？

当 Q 是 Square 时。

$\because Q^TQ=I$，当 Q 是 Square Matrix 时，$Q^T=Q^{-1}$，

$\therefore QQ^T=QQ^{-1}=I$.

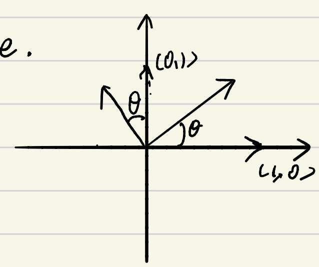
此时 Q 称为正交矩阵，orthogonal matrix. $\boxed{\text{Square}}$

- 旋转矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad ① \ \sin^2\theta+\cos^2\theta=0 \quad ② -\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=0$$

Q 是正交矩阵。实现平面的 rotate.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$



Q有一个重要性质：对于任意向量 x，向量进行 Qx 后不会改变其长度。

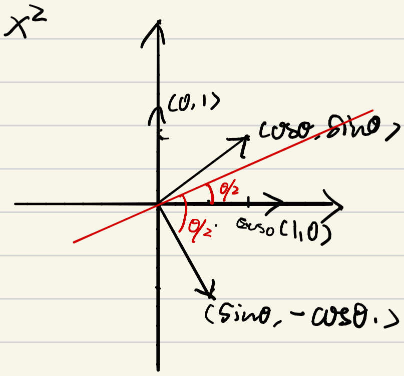
证明：$\|Qx\|^2=(Qx)^T(Qx)=x^TQ^TQx=x^Tx=x^2$

- 反射矩阵.

$$Q=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$Qx'=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$Qx''=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$$



效果是按红线为对称轴翻转。

Householder 从一个单位向量出发，$u^Tu=I$，设 $H=I-2uu$.

$$H^TH=(I-2UU^T)^T(I-2UU^T)=(I^T-2UU^T)(I-2UU^T)$$
$$=I^TI-2UU^T-2UU^T+4UU^TUU^T$$
$$=I-4UU^T+4UU^TUU^T$$
$$=I-4UU^T+4UU^T=I. \quad H \text{ orthogonal.}$$

H是反射矩阵，是一个正交矩阵.

- Hadamard. 是正交矩阵.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix}$$

Always possible if $n/4$ is a whole number.

- 傅里叶矩阵.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$