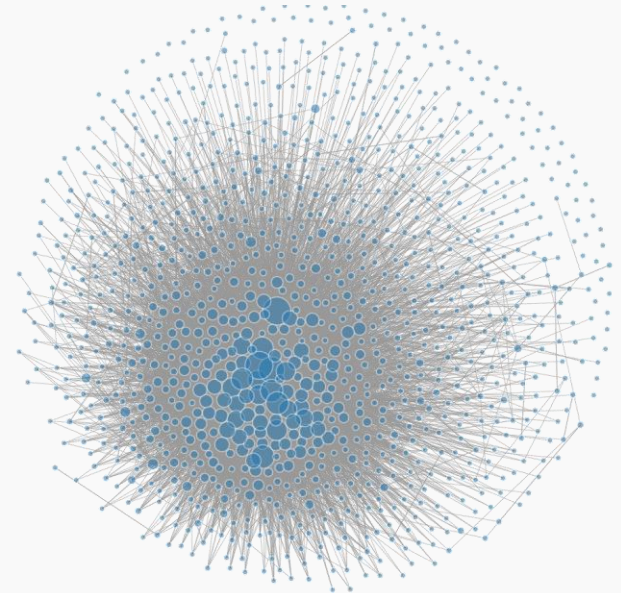


Grafi

Cammini minimi

Ingegneria degli Algoritmi 2017/2018
Università di Roma Tor Vergata

Giacomo Marciani



Roadmap



- Cammino Minimo
- Algoritmo di Bellman-Ford
- Algoritmo di Floyd-Warshall
- Algoritmo di Dijkstra

Cammino Minimo

Un **cammino** $p_{u,v}$ sul grafo G dal nodo u al nodo v è una sequenza di archi adiacenti $(u, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, v)$.

Ogni grafo può avere più cammini per ogni coppia di vertici.

Il **cammino minimo** (shortest path, SP) $p^*_{u,v}$ è il cammino di costo minimo da u a v .

L'**albero dei cammini minimi** T_{SP} del nodo u è l'albero costituito da tutti i cammini minimi da u verso ogni altro nodo.

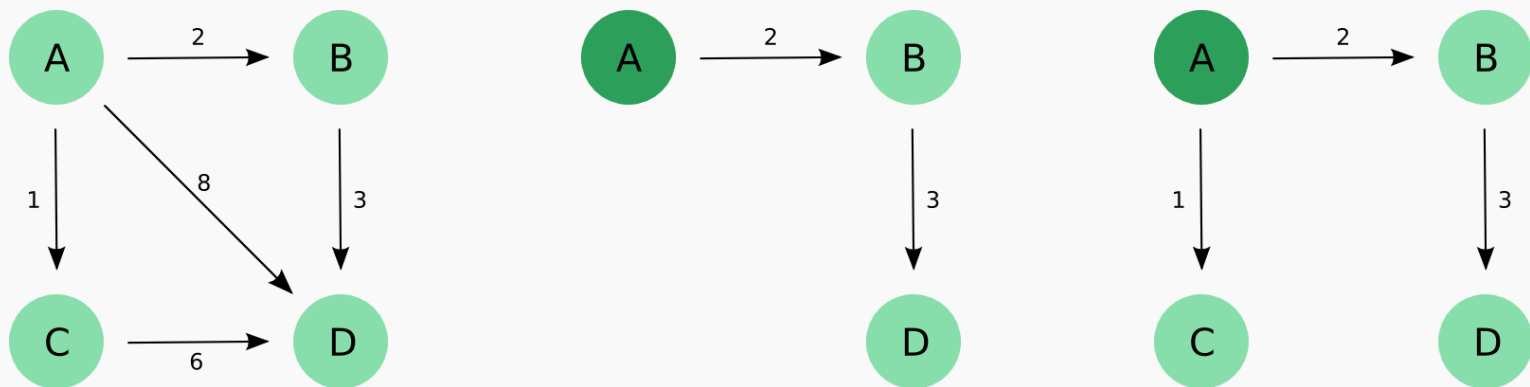


Figura: un grafo, il cammino minimo dal vertice A al vertice D e l'albero dei cammini minimi di A.

Cammino Minimo

Il **problema dei cammini minimi** consiste nella determinazione di uno o più cammini minimi *fra tutte le coppie, a singola coppia o a singola sorgente*.

Gli algoritmi che vedremo si basano sulla **tecnica del rilassamento**:

$$\text{If } (D_{xv} + W(p_{vy}) < D_{xy}) \text{ then } D_{xy} = D_{xv} + W(p_{vy})$$

dove

- D_{xy} è la stima corrente della distanza tra il vertice x ed il vertice y
- $W(p_{xy})$ è il costo del cammino p_{xy}

Questa tecnica consiste nell'aggiornare una stima della distanza tra due vertici considerando cammini alternativi, finchè non sia determinate il cammino di costo minimo.

ATTENZIONE: CAMMINO MINIMO E MINIMO ALBERO RICOPRENTE SONO CONCETTI MOLTO DIFFERENTI

Bellman-Ford

Calcola il cammino minimo a singola sorgente.
Dato un nodo sorgente, esegue il *rilassamento* su *ogni arco* per $|V|$ volte.

Complessità: $O(|V| * |E|)$.

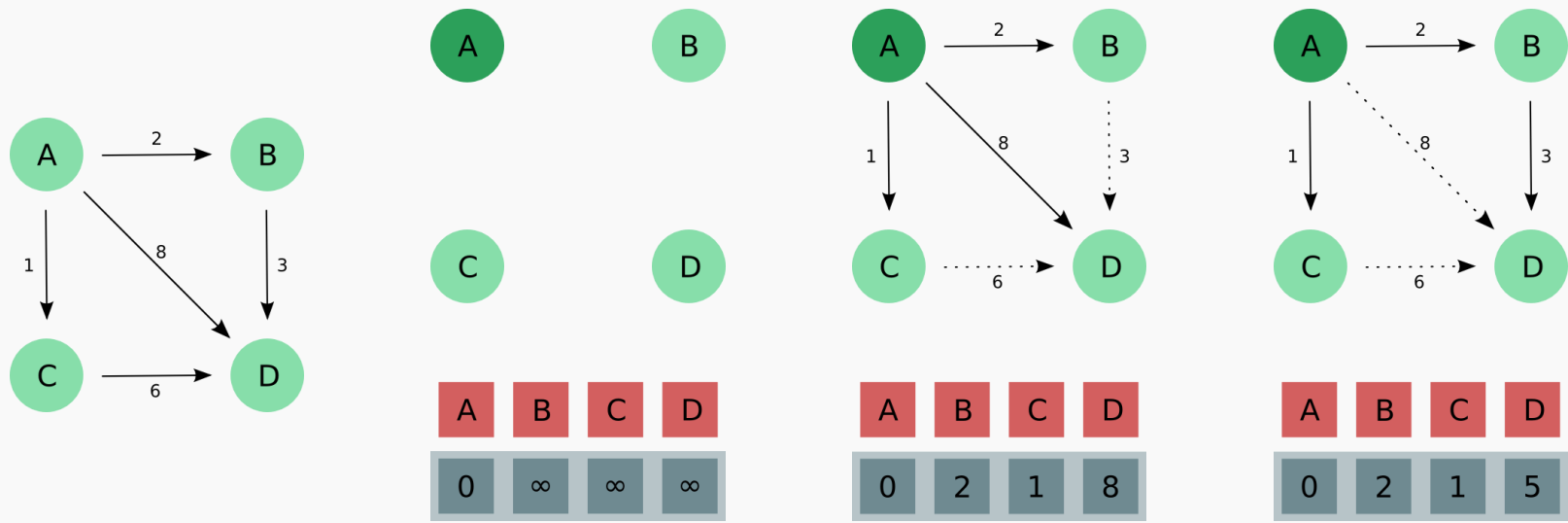


Figura: un grafo di input e gli step dell’algoritmo di Bellman-Ford.

Dijkstra

Calcola il cammino minimo a singola sorgente.
Dato un nodo sorgente, esegue il *rilassamento* considerando *gli archi del taglio* che minimizzano la distanza, fintantoche non siano inseriti nell'albero tutti i nodi.

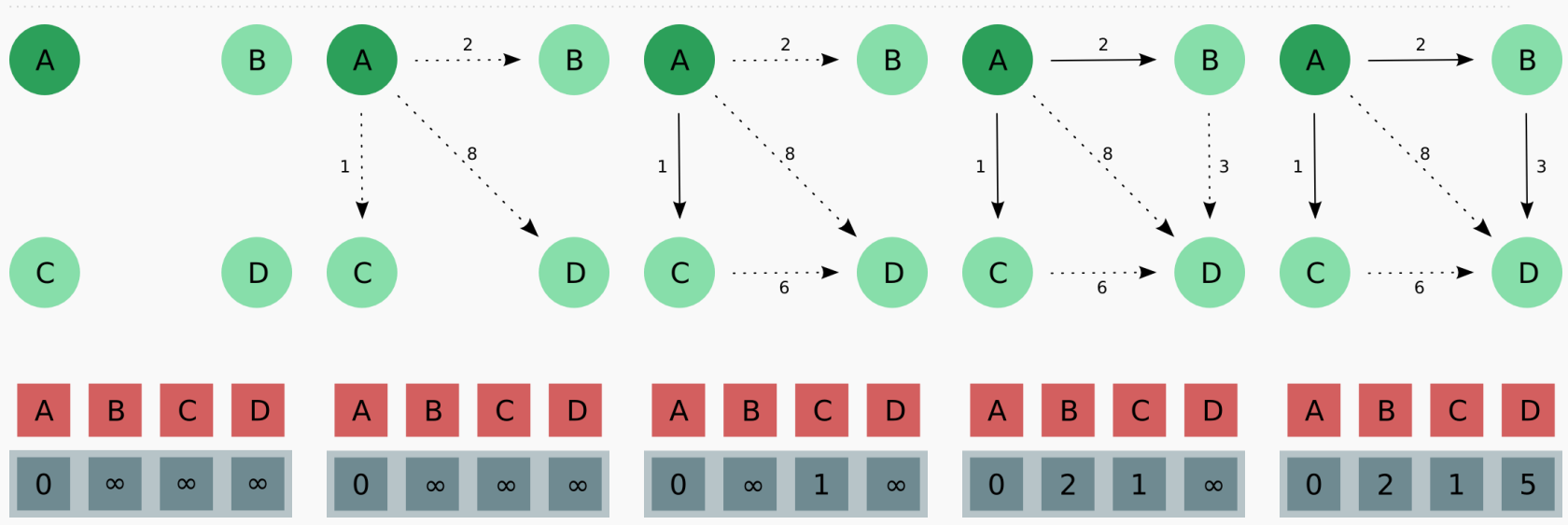
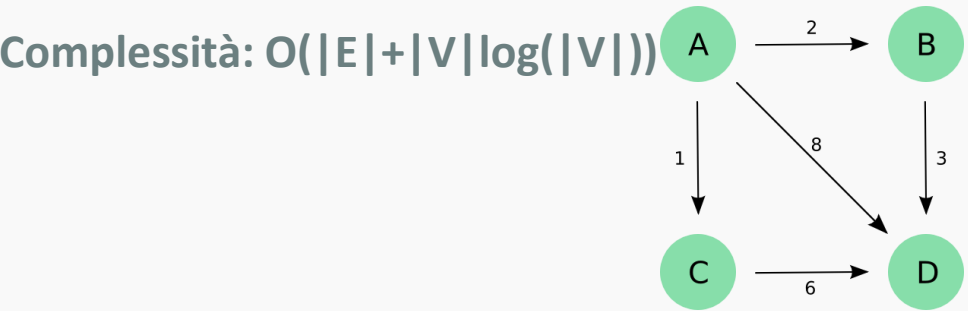


Figura: un grafo di input e gli step dell'algoritmo di Dijkstra.

Floyd-Warshall

Calcola il cammino minimo fra tutte le coppie di nodi.

Esegue il *rilassamento* considerando ogni coppia di nodi, per $|V|$ volte.

La k -esima iterazione calcola il *cammino minimo k-vincolato*.

Complessità: $O(|V|^3)$

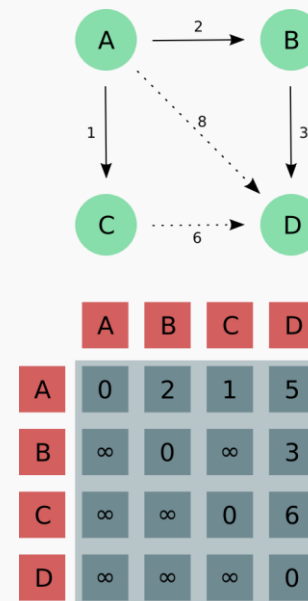
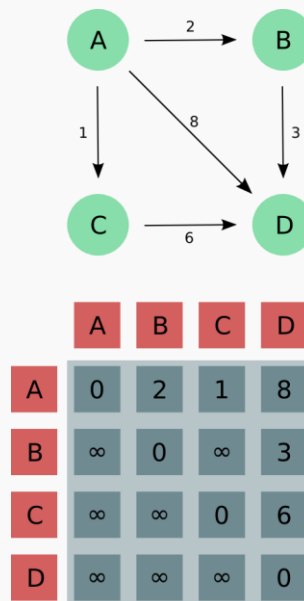
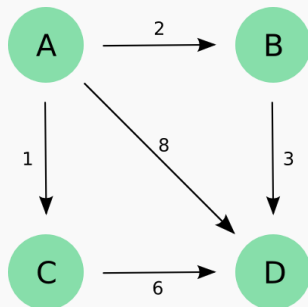


Figura: un grafo di input e gli step dell'algoritmo di Floyd-Warshall.



Domande?

Let's keep in touch

Università di Roma Tor Vergata
Via del Politecnico 1, 00133, Rome, Italy
+39 06 7259 7388

<https://utv-teaching.github.io/algorithms-engineering-2017>



giacomo.marciani@alumni.uniroma2.eu