Bundeswettbewerb Mathematik 2021 Runde 1

Lukas Bilstein

Allgemeines

In der Bearbeitung der Aufgaben wurde die Programmiersprache „Python“ verwendet.

Wenn Sie die verlinkten Programme selbst ausführen wollen, finden Sie den Download der Umgebung für python unter https://www.python.org/downloads/release/python-390/

Alternativ können Sie auch die Alternative PyPy verwenden, welche die Programme deutlich schneller ausführt. Sie finden diese unter https://www.pypy.org/download.html

Sie müssen auf dieser Seite bis fast ganz unten scrollen, und den von Ihnen benötigten Installer runterladen. Alternativ können Sie auf eine Online-idle zurückgreifen (z.B. https://repl.it/languages/Python3).

Den Code zu diesem Projekt finden Sie unter den angegebenen links, oder alternativ unter https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1 . Jeweils unter „round 1/final/A_<Aufgabe>_<Part>.py“

In anderen Ordnern unter „round 1“ finden Sie Hilfsprogramme, welche zur Entwicklung der finalen Versionen der Programme beigetragen haben. Stellen Sie sich aber darauf ein, dass diese Programme weniger ausführlich und/oder auf Englisch dokumentiert wurden (Ich habe sie trotzdem selbst geschrieben, nur ist es in der Softwareentwicklung üblich, entsprechende Kommentare auf Englisch zu schreiben, um das Programm international verwendbar zu machen).

Die oben verlinkte Respository (Fachbegriff für die verwendete Internetseite, samt deren Aufbau) ist bis zum 9.2.2021 auf privat gestellt, d.h. kein Außenstehender kann auf die Programme zugreifen.

Dieses Dokument ist in seiner Originalform ab diesem Datum auch dort.

Die verwendete Plattform, Github, erlaubt dem Benutzer (also Ihnen), das letzte Änderungsdatum und vorherige Versionen aller Dateien, die dort gespeichert sind, abzurufen. Sie finden das letzte Änderungsdatum jeweils im rechten oberen Bereich über der Dateianzeige.

Sie können jeder Zeit einen sogenannten „Issue“ erstellen (Sie brauchen dafür aber einen Github account), wenn Sie noch weitere Fragen zu den Programmen haben. Ich werde mich darum bemühen, diese baldmöglich zu beantworten.

Die Programme wurden in PyCharm: Community Edition in der Version

“PyCharm 2021.1 EAP (Community Edition)

Build #PC-211.6085.15, built on February 18, 2021

Runtime version: 11.0.10+9-b1341.2 amd64”

erstellt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass alle Angegebenen Programme so beschrieben sind, dass sie auch „von Hand“ ausgeführt werden können. Die Schrittweise Handausführung ist hier nicht angegeben.

Die Programme sind nicht für Effizienz geschrieben, allein schon python ist langsam. Stattdessen wurde auf Anschaulichkeit geachtet

Ausgabe 1

Sei Q der Ursprüngliche Quader.

Seien die jeweils kürzeste Seite der beiden Quader X und Y nach dem ersten Schnitt x und y. O.b.d.A. ist $x \geq y$

- Fall 1: Der zweite Schnitt teilt den Quader Y:

  In diesem Fall ist X immer noch der größere Quader, da x > y und damit $V(X) = 10 * 10 * x \geq 10 * 10 * y = V(Y)$. Damit ist $V(X) \geq \frac{V(Q)}{2} = \frac{10^3}{2} = 500$

- Fall 2a: Der zweite Schnitt teilt den Quader X durch genau eine der 10 LE langen Seiten:

  Um den größeren der beiden neuen Quader möglichst klein zu halten, teilen wir X genau in der Mitte, da sonst der größere größer sein würde, als wenn wir genau in der Mitte teilen

- Fall 2b: Der zweite Schnitt teilt den Quader X durch beide 10 LE lange Seiten

  Dafür muss x gerade sein, da sonst dieser Schnitt nicht ganze Seitenlängen generieren würde.

  Wie bei 2a teilen wir daraufhin genau in der Mitte.

- Fall 2a & b

  Also ist das Volumen der Quader Z aus dem Schnitt auf X in beiden Fällen 2a und 2b genau $V(Z) = \frac{V(X)}{2} = \frac{10*10*x}{2} = 50x$

  Das Volumen von Y ist: $V(Y) = 10 * 10 * y = 100y$

  Damit ist der größte Quader $max(V(Z), V(Y)) = \max(50x, 100y) = 50 * \max(x, 2y)$

  Es gilt: $10 > x \geq 5$ und $5 \geq y > 0 \leftrightarrow 10 \geq 2y > 0$ und $x + y = 10$

  Folgende Tabelle spiegelt das ganze wider:

x	y	2y	Max(x,2y)
9	1	2	9
8	2	4	8
7	3	6	7
6	4	8	8
5	5	10	10

  Damit ist der minimale Wert für $max(x, 2y)$ 7. Damit ist der minimale Wert für $\min\left(max(V(Z), V(Y))\right) = 7 * 50 = 350 < 500$

Also ist das minimale Volumen des größten Quaders <u>350</u>, nämlich, wenn der erste Schnitt im Verhältnis 7:3 teilt, und der zweite den größeren im Verhältnis 1:1. In diesem Falle sind die Volumina 300 VE, und zweimal 350 VE.

q.e.d.

Aufgabe 2

1. Sei $\varphi(n)$ die Anzahl an Stammbrüchen für $\frac{3}{n}$.
2. Sei $\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ein Stammbruchdarstellung für $\frac{3}{n}$
3. $2. \leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{3}{n} - \frac{1}{x} \leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{3}{n}-\frac{1}{x}} = \frac{nx}{3x-n}$
4. Sei $\varphi'(n)$ die Menge aller x, die eine valide Stammbruchdarstellung ergibt, also das x und y in (3) natürliche Zahlen sind.
5. O.b.d.A. ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, da die Reihenfolge erst einmal egal ist, und mit dieser Beschränkung die Doppeltnennungen in (3) eliminiert werden.
6. Damit ist $\frac{3}{n} > \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2n} \geq \frac{1}{y} > 0$, da $\frac{1}{x}$ nicht mehr als $\frac{3}{n}$ sein kann, da sonst $\frac{1}{y}$ negativ sein müsste, und es kann nicht weniger als die Hälfte von $\frac{3}{n}$ sein, da sonst $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ wäre. Analog muss $\frac{1}{y}$ kleiner als die Hälfte von $\frac{3}{n}$ sein, aber mehr als 0 sein.
7. $\leftrightarrow \frac{3}{n} > \frac{3}{3x} \geq \frac{3}{2n} \geq \frac{3}{3y} > 0 \leftarrow [Kehrbruch] \rightarrow \frac{n}{3} < \frac{3x}{3} \leq \frac{2n}{3}\frac{3y}{3} < \infty \leftrightarrow$
   $n < 3x \leq 2n \leq 3y < \infty$
8. Sei $\varphi''(n)$ die Menge aller x, die den ersten Teil von (7) erfüllen. Also
   $\varphi''(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid n < 3x \leq 2n\}$
9. $\varphi'(n)$ filtert nun $\varphi''(n)$, sodass nur noch Elemente der Eigenschaft in (4) enthält. Also ist
   $\varphi'(n) = \left\{x \in \varphi''(n) \,\middle|\, \frac{nx}{3x-n} \in \mathbb{N}\right\} = \left\{x \in \{x \in \mathbb{N} \mid n < 3x \leq 2n\} \,\middle|\, \frac{nx}{3x-n} \in \mathbb{N}\right\} =$
   $= \{x \in \mathbb{N} \mid n < 3x \leq 2n \cap \frac{nx}{3x-n} \in \mathbb{N}\}$
10. $\varphi(n)$ ist nun die Mächtigkeit von $\varphi'(n)$, also $\varphi(n) = |\varphi'(n)| =$
    $= |\{x \in \mathbb{N} \mid n < 3x \leq 2n \cap \frac{nx}{3x-n} \in \mathbb{N}\}|$
11. Der Ausdruck $\frac{nx}{3x-n} \in \mathbb{N}$ lässt sich als $(nx) \; mod \; (3x-n) \equiv 0$ umschreiben.
12. Der in (9) beschriebene Filter lässt sich durch folgendes Python-Programm umsetzen (zu finden mit ausführlicher Beschreibung unter https://github.com/uuk0/BuMa-2021/1/blob/main/round%201/final/A2_12.py):

```python
phi_dd = set(range(674, 1348))
phi_d = set(filter(
    lambda element: (2021 * element) % (3 * element - 2021) == 0,
    phi_dd
))
print(phi_d)
```

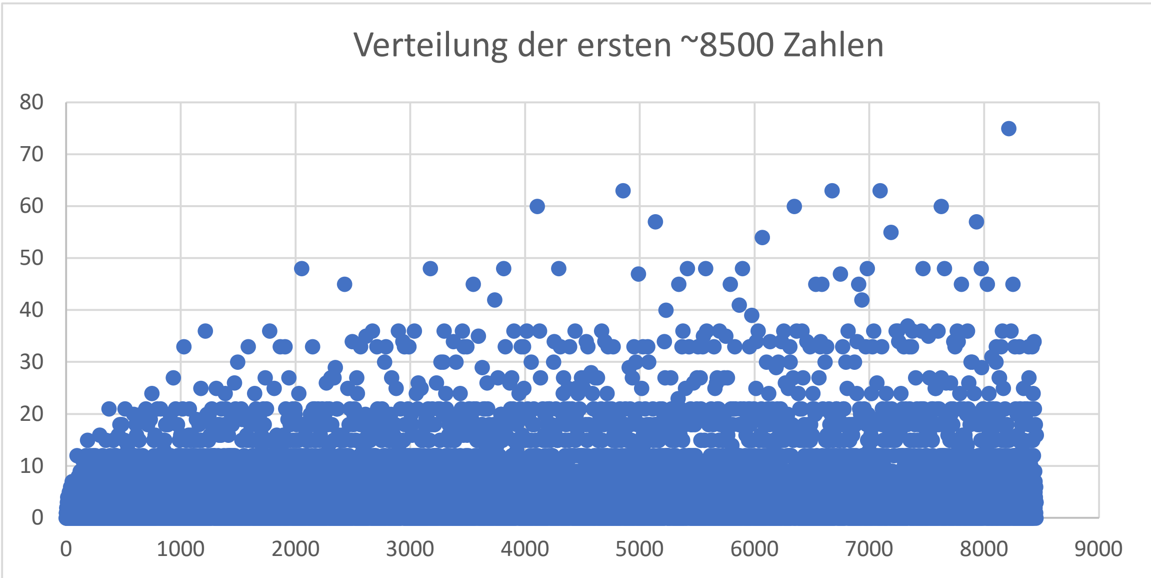
13. Für n=2021, also der erste Teil dieser Aufgabe, gilt:
    a. $\varphi''(2021) = \{x \in \mathbb{N} | 2021 < 3x \leq 4042\} = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{2021}{3} < x \leq \frac{4042}{3}\right\} =$
       $= \{674; 675; \ldots; 1346; 1347\}$
    b. Mithilfe von (12) berechnet ist $\varphi'(2021) = \{674; 688; 1290\}$
    c. Und damit ist $\varphi(2021) = 3$, nämlich gegeben durch folgende drei Paare (für y wurde die Formel in (3) verwendet):
       - x=647, y=1362154
       - x=688, y=32336
       - x=1290, y=1410
    d. Das dies die einzigen sind, ist über die oben ausgeführten Schritte definiert. Die in python implementierte Filter-Funktion entspricht genau der mathematischen Formel, welche weiter oben erarbeitet wurde.

14. Im zweiten Teil dieser Aufgabe sollte das Problem für alle $n \bmod 3 \neq 0$ weiter analysiert werden. Dabei sollte untersucht werden, ob ein n existiert, für das $\varphi(n) = 2021$ gilt. Ein python-Programm überprüft ein gegebenes n auf diese Eigenschaft, zu finden unter https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1/blob/main/round%201/final/A2_14.py

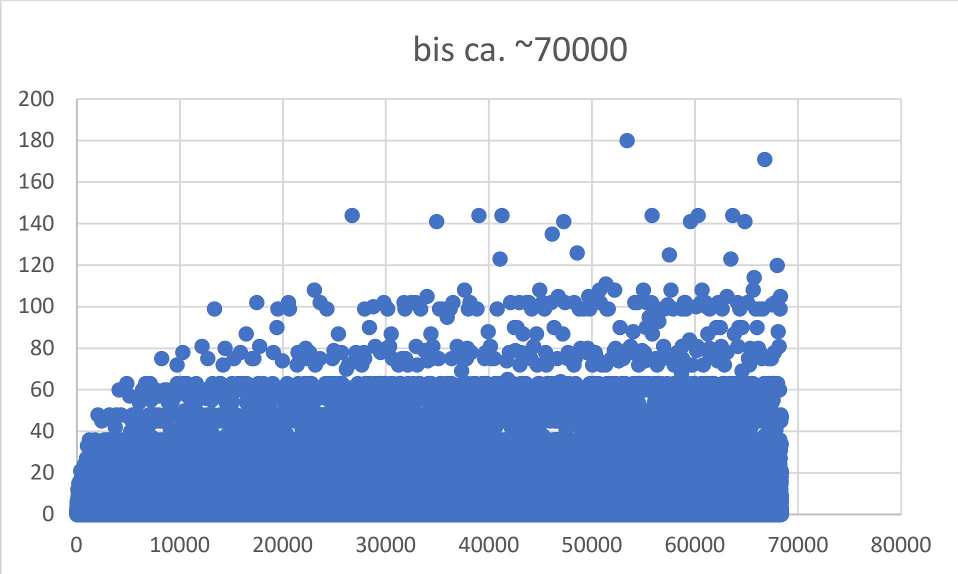
    An dieser Stelle sei angemerkt, dass dieses Programm das in (12) erarbeitete Programm nur für alle n erweitert, und ein wenig anschaulicher für den Endnutzer macht.

    Das Programm kann genauso n=2021 berechnen, und wird dabei „2021 lässt sich leider auf 3 mögliche Weisen als Summe zweier Stammbrüche darstellen" ausgeben. Diese werden an dieser Stelle nicht näher benannt, aber mit https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1/blob/main/round%201/final/A2_14b.py funktioniert dies auch.

15. Der nächste Schritt ist nun die Erweiterung der oben erarbeitete Programme, um alle n bis zu einer Gewissen Grenze auszuprobieren, zu finden unter https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1/blob/main/round%201/final/A2_15.py Bitte beachten Sie, dass dieses Programm NICHT von allein aufhören wird. Sie müssen es manuell beenden (z.B. durch Schließung des Fensters).

16. 

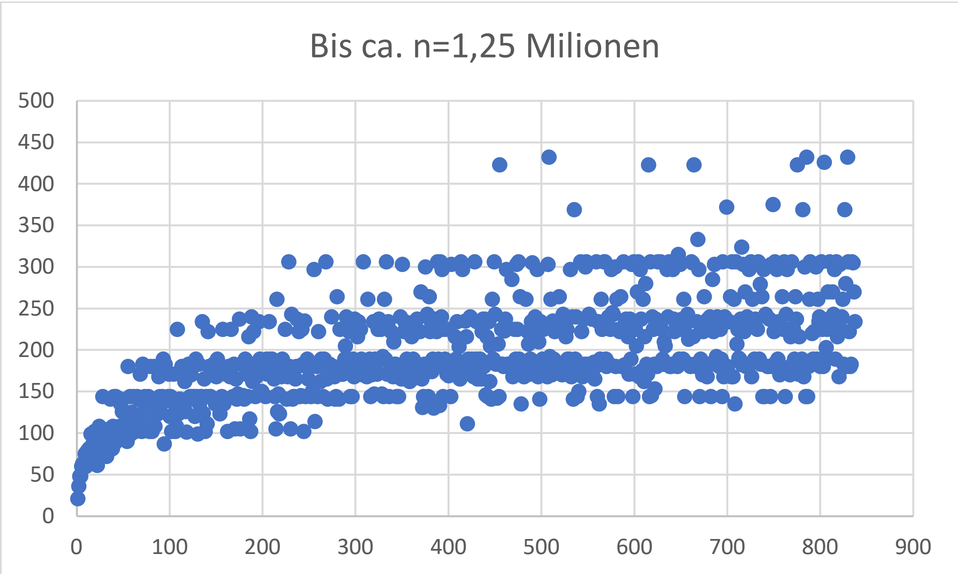
    Dieses Diagramm zeigt die Anzahl an Stammbrüchen für die ersten 8500 validen n (Also 2/3 aller Zahlen)
    Zu sehen sind horizontale „Balken" bei ~12, ~24 und ~38. Des Weiteren bildet sich eine bei ~50 und bei ~62 aus



Zu sehen ist, dass der Anstieg abfällt (x10 -> nur x2,5)

Daraus lässt sich schließen, dass die Anzahl an Stammbrüchen sich einem Grenzwert annähert, welcher unter 2021 liegt

17. Weiterhin lässt sich anhand von https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1/blob/main/round%201/final/A2_16.py nach Zahlen suchen, welche mehr als 1000 Stammbruchdarstellungen haben. Dieses Programm gibt erst einmal alle 1000 Zahlen die aktuelle Zahl, die Anzahl an Stammbruchkombinationen der aktuellen Zahl, und die maximale Anzahl in den vorhergehenden 1000 n's. Es enthält ein paar kleinere Optimierungen



In x-Richtung 2n/3 in 1000, nach oben: Maximum in den umliegenden 1000n-

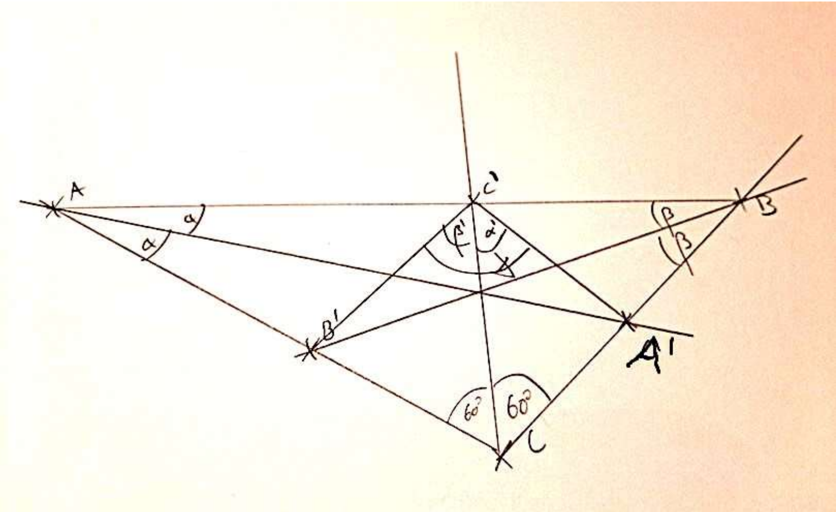
Zu sehen nochmal, dass die Steigungsrate fällt (x3 -> x3/2)

An dieser Stelle steht leider kein weiterer Beweis der gefragten Aussage. Es scheint, dass es kein solches n gibt, aber warum, kann hier nicht angeführt werden.

Die Teilaussage für $\frac{3}{2021}$ wurde bewiesen. Dass es keine weiteren Stammbrüche gibt, kann durch „Überprüfung“ aller Elemente in $\varphi''(n)$ nachgeprüft werden

<u>Aufgabe 3</u>

Nebenstehende Skizze zeigt die in der Aufgabe beschriebene Figur. Zusätzlich ist der 120° Winkel in zwei 60° Winkel aufgeteilt, da dieser durch die Winkel-halbierende sowieso in zwei 60° Winkel geteilt wird. Desweiteren sind α als der halbe Winkel in A und β der halbe Winkel in B, sowie γ und dessen Teilwinkel α' und β' eingezeichnet. γ ist hier der gesuchte Winkel.



Eine Anmerkung zur Schreibweise: In den Umformungen findet sich in [] teilweise Kommentare zwischen =[…]= bzw. <- […] ->. Diese sind keine Mathematischen Umformungen, sondern nur Kommentare, um die Umformungen verständlich zu machen.

Folgende Schritte sind zum Großteil auf der linken Seite (also um A, α und α') ausgelegt. Sie gelten, soweit nicht anders beschrieben, analog für die anderer Seite (Also ersetze A <-> B, etc.)

Zielsetzung: Wir wollen die beiden Teilwinkel α' und β' auf Basis von α und β berechnen. Mit diesen beiden Teilwinkeln können wir dann γ berechnen, da gilt: $\alpha' + \beta' = \gamma$.

1. Da uns nur Winkel interessieren, und damit zueinander Ähnliche Figuren die gleichen Winkel haben, können wir o.b.d.A. die Seite $\overline{CC'}$ gleich 1 setzen.
2. Im Dreieck ABC gilt: $2\alpha + 2\beta + 120° = 180° \leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 60° \leftrightarrow \alpha + \beta = 30°$
   Damit sind α und β auf das Intervall $[0°; 30°]$ begrenzt.
3. Im Dreieck ACC‘ gilt: $\lhd\, AC'C + 60° + 2\alpha = 180° \leftrightarrow \lhd\, AC'C + 2\alpha = 120° \leftrightarrow \lhd\, AC'C = = 120° - 2\alpha = 2(60° - \alpha)$
4. Im Dreieck CAC‘ gilt nach dem Sinus-Satz: $\frac{\overline{CA}}{\sin(\lhd AC'C)} = \frac{\overline{CC'}}{\sin(2\alpha)} \leftrightarrow \overline{CA} = \frac{\sin(2(60°-\alpha))}{\sin\,(2\alpha)}$
5. Im Dreieck AA’C gilt: $\alpha + 120° + \sin(\lhd\, AA'C) = 180° \leftrightarrow \sin(\lhd\, AA'C) = 60° - \alpha$
6. Im Dreieck CAA‘ gilt nach dem Sinus-Satz: $\frac{\overline{CA'}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\lhd AA'C)} \leftrightarrow \overline{CA'} = \overline{CA} * \frac{\sin(\alpha)}{\sin(60°-\alpha)} =$
   $$= \frac{\sin(2(60°-\alpha))}{\sin(2\alpha)} * \frac{\sin(\alpha)}{\sin(60°-\alpha)} = [\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)] =$$
   $$= \frac{2\sin(60°-\alpha)\cos(60°-\beta)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} * \frac{\sin(\alpha)}{\sin(60°-\alpha)} = \frac{\cos(60°-\alpha)}{\cos(\alpha)} = [\mathit{Setze\ ein}\colon \cos(x-y)$$
   $$= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin\,(y)] = \frac{\cos(60°)\cos(\alpha) + \sin(60°)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} =$$
   $$= \cos(60°) + \sin(60°)\tan(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\alpha) = \frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}$$
7. Im Dreieck C’A’C gilt nach dem Kosinus-Satz im Winkel $\lhd\, C'CA'$:
   $$(\overline{C'A'})^2 = (\overline{C'C})^2 + (\overline{CA'})^2 - 2\overline{CC'}\,\overline{CA'}\cos(60°) = 1^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}\right)^2 - 2 * \frac{1}{2} * \frac{1+\sqrt{3}\tan\,(\alpha)}{2}$$
   $$\leftrightarrow \overline{C'A'} = \sqrt{1 + \left(\frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{(1+\sqrt{3}\tan(\alpha))^2}{4} - \frac{\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1+3\tan^2(\alpha)+2\sqrt{3}\tan(\alpha)}{4} - \frac{\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}}$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\tan^2(\alpha)+\frac{\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}-\frac{\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\tan^2(\alpha)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}(1+\tan^2(\alpha))} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+\tan^2(\alpha)} = [Identität] = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sec^2(\alpha)}$$

8. $\sec(\alpha)$ ist immer positiv in dem gefragten Intervall (Vgl. (2)). Damit dürfen wir die Wurzel einfach ohne Beträge auflösen. Also können wir die Umformung fortsetzen als:
   $\overline{C'A'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec(\alpha)$
9. Im Dreieck CC'A' gilt nach dem Sinus-Satz: $\frac{\sin(\alpha')}{\overline{CA'}} = \frac{\sin(60°)}{\overline{C'A'}} \leftrightarrow \sin(\alpha') = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\overline{CA'}}{\overline{C'A'}} =$
   $$= \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(\alpha)} = \frac{1+\sqrt{3}\tan(\alpha)}{2\sec(\alpha)} = [Identität] = \frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\tan(\alpha)*\cos(\alpha)}{2}$$
   $$= \frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} \leftrightarrow \alpha' = \sin^{-1}(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2})$$
10. Analog gilt (Vgl. Einleitung d. Aufgabe): $\beta' = \sin^{-1}(\frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2})$
11. Somit gilt:
   $$\gamma = \alpha' + \beta' = \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2}\right)$$
   Der folgende Schritt ist möglich, da γ nur zwischen 0 und 180 liegen kann, und wir sehen werden, dass sin (γ) auf diesem Intervall eindeutig ist.
   $$\leftrightarrow \sin(\gamma) = \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2}\right)\right)$$
   Nach dem Additionstheorem für den Sinus:
   $$\leftrightarrow \sin(\gamma) = \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right)\right)\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2}\right)\right)$$
   $$+ \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right)\right)\sin\left(sin^{-1}\left(\frac{cos(\beta)+\sqrt{3}\,sin(\beta)}{2}\right)\right)$$
   $\sin^{-1}(\sin(x))$ ist in dem Intervall 0°-90° [Wie später zu sehen, ist dies tatsächlich das Intervall] gleich x. Desweiteren ist $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (Nach: https://www.wolframalpha.com/input/?i=cos%28sin%5E-1%28x%29%29, zuletzt zugegriffen am 28.02.2021, 21:42)
   $$\leftrightarrow \sin(\gamma) = \frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2}\right)^2}$$
   $$+ \frac{\cos(\beta)+\sqrt{3}\sin(\beta)}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right)^2}$$

Setze (2) ein:

$$\leftrightarrow \sin(\gamma) = \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos(30° - \alpha) + \sqrt{3}\sin(30° - \alpha)}{2}\right)^2}$$
$$+ \frac{\cos(30° - \alpha) + \sqrt{3}\sin(30° - \alpha)}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\right)^2}$$

Die Funktion der linken Seite vom + ist die gleiche gespiegelt wie die rechte Seite bezüglich 15°, da wir die Substitution $\alpha \to 30° - \alpha$ bei der Substitution von (1) durchführen.
Im Intervall $[-\frac{\pi}{6}; \frac{1}{3}\pi]$ ist die Funktion punktsymmetrisch zu $(15°|\frac{1}{2})$.
[Beweis angehängt unter (18)]

Aufgrund dieser Symmetrie heben sich im Intervall $[0°; 30°]$ (Und darüber hinaus) die beiden Funktionen so auf, dass eine konstante Funktion mit dem Wert 1 entsteht [Die Sinus-Funktion hat an einem Ende 1, und am anderen Ende 0 als Funktionswert], da, wenn man zwei Zahlen an gegenüberliegenden Enden des Intervalls mit gleichem Abstand zur Intervallgrenze nimmt, aufgrund der Punktsymmetrie das Delta in y-Richtung von der Intervallgrenze zur Zahl selbst gleich – der anderen Seite ist, und damit Aufgrund der Spiegelung die eine Hälfte genau das hinzufügt, was die andere Subtrahiert. Damit können wir für unsere Zwecke sin (γ) gleich 1 setzen. Damit wäre die Lösung für γ 90°. Diese Lösung ist auch eindeutig, da die oben durchgeführte sin(x) auf beiden Seiten für 90° als einziger Wert im fraglichen Intervall ($[0°; 180°]$) den Wert 1 liefert.
Damit ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle A'C'B'$ gleich <u>90°</u>.
Q.e.d.

18. Es gilt nur noch zu zeigen, dass $\frac{\cos(\alpha)+\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos(30°-\alpha)+\sqrt{3}\sin(30°-\alpha)}{2}\right)^2}$
Punktsymmetrisch zu $(15°|\frac{1}{2})$ im Intervall [-30°;60°] ist.

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1 - \frac{\left(\cos(30° - \alpha) + \sqrt{3}\sin(30° - \alpha)\right)^2}{4}} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1 - \frac{\cos^2(30° - \alpha) + 2\sqrt{3}\sin(30° - \alpha)\cos(30° - \alpha) + 3\sin^2(30° - \alpha)}{4}} =$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und Doppelwinkelformel für Sinus

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{1 - \frac{1 - \sin^2(30° - \alpha) + \sqrt{3}\sin(60° - 2\alpha) + 3\sin^2(30° - \alpha)}{4}} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\sqrt{\frac{4 - 1 - \sqrt{3}\sin(60° - 2\alpha) - 2\sin^2(30° - \alpha)}{4}} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}\frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}\sin(60° - 2\alpha) - 2\sin^2(30° - \alpha)}}{2} =$$

$$= \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha))\sqrt{3 - \sqrt{3}\sin(60° - 2\alpha) - 2\sin^2(30° - \alpha)}}{4} =$$

$$= \frac{\left(\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\right)\sqrt{3 - 2\sqrt{3}\sin(30° - \alpha)\cos(30° - \alpha) - 2\sin^2(30° - \alpha)}}{4}$$

a. Wir betrachten nun folgende Funktion (Die oben unter der Wurzel zu finden ist):

$3 - 2\sqrt{3}\sin(30° - \alpha)\cos(30° - \alpha) - 2\sin^2(30° - \alpha) =$

Additionstheorem Sinus & Cosinus

$= 3 - 2\sqrt{3}[\sin(30°)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(30°)][\cos(30°\cos(\alpha) + \sin(30°)\sin(\alpha)] -$
$2[\sin(30°)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(30°)]^2 =$

$sin(30°)$ und $cos(30°)$

$$= 3 - 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\alpha)\right] - 2\left[\frac{1}{2}\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\right]^2 =$$

Klammern zusammenbringen & Binomische Formel

$$= 3 - 2\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2(\alpha) + \frac{1}{4}\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \frac{3}{4}\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \frac{3}{4}\sin^2(\alpha)\right]$$
$$- 2\left[\frac{1}{4}\cos(\alpha) + \frac{3}{4}\sin^2(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] =$$

$$= 3 - 2\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2(\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2(\alpha)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\cos^2(\alpha) - \frac{3}{2}\sin^2(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$= 3 - \frac{3}{2}\cos^2(\alpha) + \sqrt{3}\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \frac{3}{2}\sin^2(\alpha) - \frac{1}{2}\cos^2(\alpha) - \frac{3}{2}\sin^2(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$= 3 - 2\cos^2(\alpha) + 2\sqrt{3}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

$= 2 - 2\sin(30° - 2\alpha)$, da:

$$2 - 2\sin(30° - 2\alpha) = 2 - 2[\sin(30°)\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)\cos(30°)] =$$

$$= 2 - 2\left[\frac{1}{2}\cos(2\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\alpha)\right] = 2 - \cos(2\alpha) - \sqrt{3}\sin(2\alpha) =$$

$$= 2 - [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] - \sqrt{3}[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)] =$$

$$= 2 - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2\sqrt{3}\cos(\alpha)\sin(\alpha) =$$

$$= 2 + \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 2\cos^2(\alpha) - 2\sqrt{3}\cos(\alpha)\sin(\alpha) =$$

$$= 3 - 2\cos^2(\alpha) - 2\sqrt{3}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

q.e.d.

b. Substitution von (18/a) in (18):

$$= \frac{\left(\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\right)\sqrt{2 - 2\sin(30° - 2\alpha)}}{4}$$

c. Die Wurzel aus (18/b) und (18/c) sind im Intervall [0°;30°] identisch, da:

$$\sqrt{2-2\sin(30°-2\alpha)} = \sqrt{2-2(\sin(30°)\cos(2\alpha)-\sin(2\alpha)\cos(30°))} =$$

$$= \sqrt{2(\frac{1}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\alpha))} = \sqrt{2(\frac{1}{2}(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha))-\frac{\sqrt{3}}{2}(2\sin(\alpha)\cos(\alpha)))} =$$

$$= \sqrt{2-2\left(\frac{1}{2}\cos^2(\alpha)-\frac{1}{2}\sin^2(\alpha)-\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right)} =$$

$$= \sqrt{2-\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

Und für die andere Seite: (Da $\sqrt{3}\sin(\alpha)+\cos(\alpha)$ in dem Intervall stets positiv ist, können wir das Quadrat unter eine Wurzel schreiben):

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\right)^2} = \sqrt{3\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2\sin^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

$[\sin^2(x)+\cos^2(x)=1]$

$$= \sqrt{2(1-\cos^2(\alpha))+\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2-2\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2-\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+2\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

Was genau das des ersten Teils hiervon ist. Also sind die beiden Identisch in dem Intervall.

d. Damit ist (18) in diesem Intervall gleich $\frac{(2\sin(\alpha+30°))^2}{4}$
e. Was wiederrum gleich $\sin^2(\alpha+30°)$ ist [Potenz auf beide Faktoren und die 4 Kürzen]
f. Diese Funktion dann ist Punktsymmetrisch zu $\left(15°\middle|\frac{1}{2}\right)$

Zu (18/f):

Es gilt: $\sin^2(\alpha + 30°) = \frac{1-\cos(2\alpha-60°)}{2}$, da:

a) $\sin^2(\alpha + 30°) = [\sin^2(\alpha)\cos(30°) - \cos(\alpha)\sin(30°)]^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha)\right]^2 =$

$$= \frac{3}{4}\sin^2(\alpha) + \frac{1}{4}\cos^2(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

b) $\frac{1-\cos(2\alpha+60°)}{2} = \frac{1-[\cos(2\alpha)\cos(60°)-\sin(2\alpha)\sin(60°)]}{2} = \frac{1-[\frac{1}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\alpha)]}{2} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos^2(\alpha) + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

Setze ein: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}[\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha)$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha) - \frac{1}{4}\cos^2(\alpha) + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin^2(\alpha) + \frac{1}{4}\cos^2(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Wobei beide Teile dadurch identisch sind.

Zu $\frac{1-\cos(2\alpha-60°)}{2}$ hat $\cos(2\alpha - 60°)$ dieselbe x-Koordinate in der Punktsymmetrie. Diese Koordinate ist 30° [Nach Unterrichtsstoff]. Die y-Koordinate an diesem Punkt ist $\frac{1}{2}$. Damit ist die gegebene Funktion Symmetrisch zum Punkt (30°/0,5)

Aufgabe 4

Die folgende Aufgabe wurde mithilfe eines Computerprogramms bearbeitet. Die Lösung dieser Aufgabe ist aufgrund der Länge der Rechenzeit ebendieses Programmes kaum von Hand ausführbar.

1. Wir können die Aufgabe als eine Aufgabe über Graphen umformulieren. Sei G_n der Graph mit n Grundseiten und einer „Spitze“ (Mit der Nummer 0). Er hat damit n+1 Knoten. Die Spitze ist mit allen anderen Knoten verbunden. Die restlichen seien mit 1, 2, …, n durchnummeriert. Jeder der restlichen ist mit der Spitze und allen anderen, bis auf seine Nachbarn (Also Nummer Nachbarn bzw. 1 und n) verbunden.
2. Zunächst wollen wir den Fall mit 8 überprüfen. Dafür schauen wir uns alle möglichen Färbungen für den Graphen G_8 an, und überprüfen jede dieser auf die gefragte Eigenschaft. Gibt es eine solche Färbung, bei der keine drei Knoten existieren, die durch 3 gleichgefärbte Kanten verbunden sind, so ist dies unser Beispiel und die Teilaussage wäre bewiesen.
3. Das Computerprogramm unter https://github.com/uuk0/BuMa-2021-1/blob/main/round%201/final/A4_3.py ist ein Programm, welches genau das folgende tut:
    a. Frage den Nutzer nach n für die Berechnung von G_n
    b. Erzeuge diesen Graphen und speichere seine Kanten
    c. Iteriere über alle möglichen Färbungen, und überprüfe sie
    d. Falls das Programm eine Färbung findet, gebe diese aus
    e. Sonst, wenn alle durch sind, hat der Graph immer drei Knoten, die durch gleichgefärbte Kanten verbunden sind.

    An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Programm keinen linearen Fortschritt hat, da die Überprüfungsfunktion teilweise sehr schnell drei Punkte findet, teilweise aber auch über alle möglichen Paare suchen muss.

4. Gibt man nun 8 diesem Programm, so spuckt es nach (relativ) kurzer Zeit z.B. folgende Daten aus:

    Der Graph hat 28 Kanten

    [… Hier folgen Fortschrittsmeldungen]

    (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 8)]

    False [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 8)]

    Das Ganze heißt, unter der Färbung (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) der Kanten [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 8)] gibt es keine drei Punkte mit gleichgefärbten Kanten.

    Das Computerprogramm validiert diese Aussage. Die Funktion „check_coloring“ entspricht dem mathematischen Mechanismus zur Überprüfung. [S. unten bzw. das verlinkte Programm]

5. Ähnlich zu 9, gibt das Programm 36 Kanten an, und rechnet auf meinem Computer 3-4 Tage, und gibt dann stattdessen True aus. Dies heißt, dass in jeder Färbung des Graphen drei solche Punkte existieren. [Anmerkung: Ich habe das Programm tatsächlich die 3-4 Tage rechnen lassen, und habe teile davon aufgenommen, falls Zweifel daran bestehen sollten, lade ich diese gerne irgendwo hoch, sodass Sie diese anschauen können]

6. Abschließend ist nur noch zu zeigen, dass das Programm tatsächlich den mathematischen Teil widerspiegelt. Hierfür ist es hilfreich, die obige URL in einem Webbrowser Ihrer Wahl zu öffnen und die Entsprechenden Stellen zu vergleichen. Funktionen beginnen mit „def" gefolgt von dem Namen der Funktion.
    a. Beginnen wir zunächst mit der „bake" Funktion. Sie verbindet zunächst alle Knoten, und löscht dann benachbarte Knoten in der Grundebene. Die resultierenden Kanten sind genau die in der Aufgabe erwähnten. Der restliche Kram in der Funktion verändert nichts an den Kanten selbst
    b. „check_colorings" überprüft alle Färbungen von „get_colorings" mithilfe von „check_coloring". Wenn diese Funktion True zurückgibt, tue nichts, wenn False, dann unterbreche und gib die Färbung aus (es ist eine, in der es keine drei Punkte gibt)
    c. „get_colorings" verwendet itertools.product(), um an alle Färbungen zu kommen. Dies ist nach der Dokumentation dieser Funktion unter https://docs.python.org/3/library/itertools.html#itertools.product auch valide
    d. „check_coloring" verwendet itertools.permutations() (https://docs.python.org/3/library/itertools.html#itertools.permutations) um alle Knotenkombinationen zu bekommen. Auch das ist valide. Daraufhin sucht sie sich die Färbungen heraus. Auch das ist richtig. Die Überprüfung auch.

Damit ist klar, dass das Programm wirklich den Graphen auf die gesuchte Eigenschaft hin überprüft.
q.e.d.