

Bundeswettbewerb Mathematik 2022 Runde 1

Aufgabe 1

Sei k_n die Anzahl an Nüssen am n -ten Tag.

Wir wissen das k_0 , die Anzahl, bevor noch Nüsse dazukommen, gleich 2022 ist.

Wir wissen weiterhin, dass $k_1 - k_0 = 2$, $k_2 - k_1 = 4$, $k_3 - k_2 = 6$, ... ist.

Damit können wir folgende Formel aufstellen:

$$k_n = k_{n-1} + 2n = 2022 + \sum_{i=1}^n (2i) = 2022 + 2 * \sum_{i=1}^n i$$

Mithilfe der Summenformel von Gauss ergibt dies:

$$= 2022 + 2 * \frac{n(n+1)}{2} = 2022 + n(n+1)$$

Damit wir die Nüsse gleichmäßig auf die 5 aufteilen könne, muss $k_n \equiv 0 \pmod{5}$ sein.

Also muss gelten:

$$2022 + n(n+1) \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow n(n+1) \equiv 3 \pmod{5}$$

Wir unterscheiden nun 5 Fälle für n , nach modulo 5, und untersuchen $n(n+1)$:

| $n \pmod{5}$ | $(n+1) \pmod{5}$ | $(n(n+1)) \pmod{5}$ |
|--------------|------------------|---------------------|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | $6 \equiv 1$ |
| 3 | 4 | $12 \equiv 2$ |
| 4 | 0 | 0 |

Dabei fällt auf, dass es keinen Fall gibt, in dem $n(n+1) \equiv 3 \pmod{5}$ ist, wie es für die Aufteilung auf 5 notwendig wäre.

Damit kann es niemals einen Tag n geben, an dem die Nüsse gleichmäßig auf alle 5 Eichhörnchen aufgeteilt werden können.

■

Aufgabe 2

Sei n die Anzahl an Mitteldreiecken $+ 1$, also die Anzahl an eingezeichneten Dreiecken inklusive dem gleichseitigen.

Wir stellen zunächst fest, dass die Verbindung der Seitenmitten eines gleichseitigen Dreiecks wieder ein gleichseitiges Dreieck hervorbringt, da das Dreieck symmetrisch aufgebaut sein muss, nämlich genau die Symmetrieachsen des äußeren gleichseitigen Dreiecks. Das einzige Dreieck, was dies erfüllt, ist wieder das gleichseitige Dreieck. Weiterhin liegen die Mitten des inneren Dreiecks wieder auf den Verbindungen des äußeren Dreiecks mit den gegenüberliegenden Eckpunkten.

Seien A_1, B_1 und C_1 die Eckpunkte des äußersten Dreiecks, und M der Mittelpunkt des Dreiecks (An dieser Stelle sei angemerkt, dass im gleichseitigen Dreieck Inkreis-, Umkreis- und Mittenschnittpunkt zusammen fallen; somit ist es egal, welchen dieser wir an dieser Stelle betrachten)

Wir bezeichnen nun die Mitten jeweils mit A_2 (die Mitte von $[B_1C_1]$), B_2 (die Mitte von $[A_1C_1]$) und C_2 (die Mitte von $[A_1B_1]$)

Die Mitten der Seiten $[A_2B_2]$, $[A_2C_2]$ und B_2C_2 bezeichnen wir analog mit C_3, B_3 und A_3 .

Dies setzen wir so lange fort, bis wir A_n, B_n und C_n eingezeichnet haben.

Wir können nun diese Anordnung von Dreiecken als Graphen G_n bezeichnen. Dafür wollen wir zunächst eine Verbindungsvorschrift erstellen, die Angibt, welche Knoten miteinander Verbunden sind.

Mit folgenden Punkten ist jeder Knoten X_i bis auf den Mittelpunkt verbunden, sofern diese Existieren:

- Allen anderen Y_i , da sie bereits ein Dreieck bilden
- Allen anderen X_n und M , da diese alle auf einer Geraden liegen
- Allen Y_{i+1} , da die benachbarten auf den Dreiecksseiten liegen, die an dieser Ecke angrenzen
- Allen Y_{i-1} , da Y_i entweder die Mitte darstellt

Ein Dreieck in diesem Graphen zeichnet sich nun dadurch aus, dass wir drei Eckpunkte suchen, die verbunden sind, und nicht auf einer Geraden liegen.

Drei Punkte liegen in unserem Graphen auf einer Geraden, wenn:

- Sie alle vom selben 'type' sind (z.B. alle vom Type A_n), und optional dem Mittelpunkt
- Sie der Form X_i, Y_i, Z_{i-1} sind, also zwei Eckpunkte und dessen Mittelpunkt

Wir wollen dieses Problem nun mithilfe eines Computerprogramms lösen. Ich verwende in der finalen Implementierung python, da es keine Limitationen in vielen Bereichen hat.

Wir beginnen aber zunächst aber mit einigen Definitionen.

Wir nennen die Funktion, die entscheidet, ob zwei Knoten verbunden sind, 'connected', und die Funktion, ob drei Punkte auf einer Geraden liegen, 'on_one_line'.

Wir können uns eine Menge M_n aller Eckpunkte erzeugen, sie enthält alle A_i , B_i und C_i mit $0 < i \leq n$ und M .

Wir können weiterhin eine Menge G_n erzeugen, die alle Verbindungen als $\{X_n, Y_n\}$ darstellt, erzeugen. Diese Menge ist:

$$\{\{x, y\} | x \in M_n \wedge y \in M_n \wedge \text{connected}(x, y)\}$$

Aus dieser Menge können wir nun die Menge aller Dreiecke D_n heraus konstruieren, auf folgende Weise:

$$D_n = \{\{x, y, z\} | \{x, y\} \in G_n \wedge \{x, z\} \in G_n \wedge \{y, z\} \in G_n \wedge \text{on_one_line}(x, y, z)\}$$

Damit haben wir alle Bausteine für ein Program, was uns die Gesamtanzahl an anzeigbaren Dreiecke angibt. Die Anzahl ist einfach der Betrag von D_n .

Folgender Pseudo-Code implementiert dies:

```

Funktion connected(X, Y)
{
  Falls (X[0] == Y[0]) → Wahr
  Falls (X[0] == 'M' oder Y[0] == 'M') → Wahr
  Falls (Betrag(x[1] - Y[1]) ≤ 1) → Wahr
  Sonst → Falsch
}

Funktion on_one_line(X, Y, Z)
{
  Wenn Betrag({X[0], Y[0], Z[0]} - {'M'}) == 1 → Wahr
  s = [X[1], Y[1], Z[1]]
  s.sort()
  Wenn s[0] == s[1] == s[2] - 1 → Wahr
  Sonst → Falsch
}

n = Eingabe('n: ')
K_n = {A_i | i ∈ ℕ ∧ i ≤ n} + {B_i | i ∈ ℕ ∧ i ≤ n} + {C_i | i ∈ ℕ ∧ i ≤ n} + {'M'}
G_n = {{x, y} | x ∈ K_n ∧ y ∈ K_n ∧ connected(x, y)}
D_n = {{x, y, z} | {x, y} ∈ G_n ∧ {x, z} ∈ G_n ∧ {y, z} ∈ G_n ∧ on_one_line(x, y, z)}
Ausgabe(Betrag(D_n))

```

Wir wollen nun diesen Code in python umsetzen (zu finden ab dem 09.03.2022 unter https://github.com/uuk0/BuMa2022/blob/main/runde%201/Aufgabe2_final.py)

Listing 1: Python code

```
import itertools

n = int(input("N:"))

G = set()
D = set()

def connected(a, b):
    if (a[0] == "M" or b[0] == "M"):
        return True

    if (abs(a[1] - b[1]) <= 1):
        return True

    return False

def on_one_line(a, b, c):
    if len({a[0], b[0], c[0]} - {"M"}) == 1:
        return True

    x, y, z = sorted((a[1], b[1], c[1]))
    if (x == y == z - 1):
        return True

    return False

vertices = {"M", 0}

for i in range(1, n + 1):
    for c in ("A", "B", "C"):
        vertices.add((c, i))

for a, b in itertools.combinations(vertices, 2):
    if connected(a, b):
        G.add((min(a, b, key=lambda e: e[1]), max(a, b, key=lambda e: e[1])))

for a, b, c in itertools.combinations(vertices, 3):
    if on_one_line(a, b, c):
        continue

    a, b, c = sorted((a, b, c), key=lambda e: e[1])
    D.add((a, b, c))

print(len(D))
```

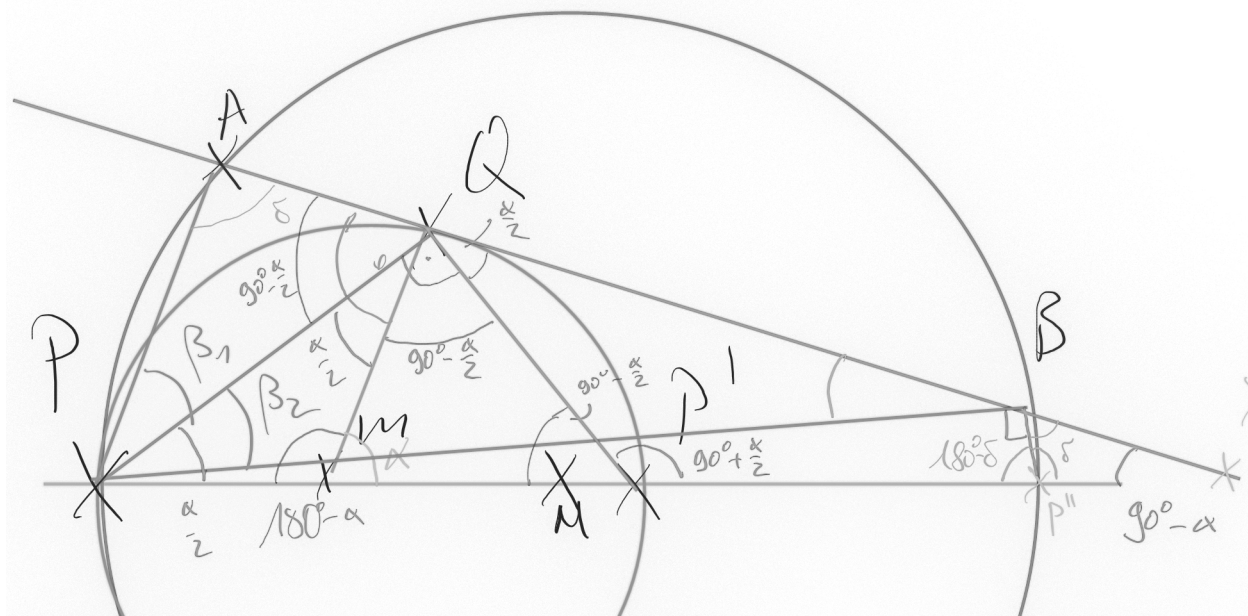
Führt man obiges Program für verschiedene Werte für n aus, ergeben sich folgende Werte:

| n | $ D_n $ |
|-----|---------|
| 1 | 4 |
| 2 | 23 |
| 3 | 90 |
| ... | ... |
| 8 | 1985 |
| 9 | 2844 |
| 10 | 3919 |
| ... | ... |

Somit sind die gesuchten Werte $n = 9$ mit 2844 einzeichnen-baren Dreiecken und insgesamt 8 Mitteldreiecke

Aufgabe 3

Skizze: (für eine farbige Version siehe <https://github.com/uuk0/BuMa2022/>, Skizze 2)



Um zu beweisen, dass die Gerade den Winkel in der Mitte teilt, wollen wir beweisen, dass die beiden Teilwinkel gleich groß sind.

Wir benennen den $\angle QmP'$ mit α . Dementsprechend ist der $\angle PmQ = 180^\circ - \alpha$.

O.b.d.A. können wir $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ setzen aufgrund der Achsensymmetrie zur Horizontalen. Sollte $\alpha > 180^\circ$ sein, spiegeln wir die Skizze an der PP'' Achse und erhalten ein $\alpha < 180^\circ$

Wir bezeichnen $\angle APQ$ mit β_1 und $\angle BPB$ mit β_2 . Ziel wird es sein, zu beweisen, dass diese gleich groß sind.

Wir halten fest, dass, wie schon in der Skizze angedeutet, $\angle PQP' = \angle PBP'' = 90^\circ$ ist (nach dem Satz des Thales).

Das $\triangle PQm$ ist gleichschenkelig, da es zwei Punkte auf einem Kreis und den Kreismittelpunkt als Eckpunkte besitzt. Damit ist $\angle QPm = \angle PQm = \frac{180^\circ - \angle PmQ}{2} = \frac{180^\circ - 180^\circ + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Analoges gilt im $\triangle mQP'$, sodass $\angle mQP' = \angle QP'm = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Wir wollen nun $\angle PAB$ mit δ bezeichnen. Nach den Winkelregeln am Kreis ist $\angle BP''P = 180^\circ - \delta$ (Vgl. z.B. <https://learnattack.de/schuelerlexikon/mathematik/winkel-am-kreis>, vorletzter Eintrag, wobei die Strecke PB als Sehne dient, und wir die Punkte A und P'' betrachten).

Im Dreieck $\triangle PBP''$ gilt:

$$190^\circ - \delta + 90^\circ + \angle P''PB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle P''PB = \delta - 90^\circ$$

An P gilt weiterhin:

$$\frac{\alpha}{2} = \beta_2 + \angle P''PB = \beta_2 + \delta - 90^\circ \Leftrightarrow \beta_2 = 90^\circ - \delta + \frac{\alpha}{2}$$

Im $\triangle APQ$ gilt:

$$\delta + \beta_1 + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \beta_1 = 90^\circ - \delta + \frac{\alpha}{2}$$

Nun fällt auf, dass der Winkel $\angle P''PB$ nur dann $= 180^\circ - \delta$ ist, wenn B oberhalb der PP'' Achse liegt. Sollte B unterhalb liegen, wird der Winkel gleich δ selbst, aber β_2 ist jetzt nicht mehr $= \frac{\alpha}{2} - \angle BPP''$, sondern $= \frac{\alpha}{2} + \angle BPP'' = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \delta$, da nun $\angle BPP'' = 90^\circ - \delta$ direkt ist.

Für β_1 ändert sich in diesem Fall nichts.

Damit ist bewiesen, dass in jedem Fall $\beta_1 = \beta_2$ und damit dass die Gerade PQ den Winkel $\angle APB$ in der Mitte teilt.

■

Aufgabe 4

Wir stellen zunächst fest, dass der größte Teiler einer Zahl immer sie selbst ist. Das heist, sofern die Zahl selbst nicht durch drei teilbar ist, ist $a_k = k$.

Wir definieren nun $\phi(k) = \begin{cases} k & \text{wenn } k \bmod 3 \neq 0 \\ \phi(\frac{k}{3}) & \text{sonst} \end{cases}$

Dabei stellt $\phi(k)$ gleichzeitig a_k dar.

Wir stellen weiterhin fest, dass jede dritte Zahl durch drei teilbar ist, jede neunte durch neun, jede 27 durch 27, und so weiter.

Eine Eigenschaft der Zahlen im Dreiersystem ist, dass sie alle 3 einen ‘roll-over‘ haben an der 1-er Stelle, alle 3^2 an der 3^2 Stelle, alle 3^3 an der 3^3 Stelle usw. Damit steht an der 1-er Stelle alle 3 eine 1, an der 3-er Stelle alle 3^2 , an der 3^2 Stelle alle 3^3 , usw.

Weiterhin stellen wir fest, dass eine Summe von natürlichen Zahlen genau dann durch 3 teilbar ist, wenn $\Sigma(a_n \bmod 3) \equiv 0 \pmod{3}$

Wir wissen, dass alle a_n ’s der Form a_{3i+1} genau 1 in dieser Summe mitbringt, und alle der Form a_{3i+2} genau 2 beiträgt. Damit kommt es auf die der Form a_{3i} an.

Analog trägt diese 1 bei in der Form a_{9+1} , und 2 in der Form a_{9i+2} .

Wir können also nie ein $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ finden.

Damit gibt es 4 Fälle, in denen das neue a_n die Summe $\equiv 0 \pmod{3}$ macht:

| | | | | |
|---------------|---|--------------|--------------|--------------|
| zuvor | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $a_n \bmod 3$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| danach | 2 | $3 \equiv 0$ | $3 \equiv 0$ | $4 \equiv 1$ |

Sollte die Summe zuvor $\equiv 0 \pmod{3}$ sein, übernimmt sie hier das modulo des neuen Terms.

Damit gibt es genau zwei Fälle, in dem ein s_n durch drei teilbar ist, nämlich wenn genau dann, wenn entweder $s_{n-1} \equiv 1 \pmod{3}$ ist und $a_n \equiv 2$ oder umgekehrt.

In allen anderen Fällen entsteht eine nicht durch 3 teilbare Zahl.

Diese Folge von unterschieden wird in der OEIS unter <https://oeis.org/A060236> geführt.

Für die Anzahl an 1-er in der Dreierdarstellung einer Zahl:

Multiplikation mit 3 \Rightarrow nichts ändert sich, da eine 0 dazu kommt

Multiplikation mit 3 mit angeschlossen + 1 \Rightarrow 1x 1 mehr, da eine neue 1

Multiplikation mit 3 mit angeschlossen + 2 \Rightarrow nicht ändert sich, da eine 2 dazu kommt.