

Hans-Sachs-Gymnasium Nürnberg

Oberstufenjahrgang 2020/2022

Seminarfach Mathematik

Seminararbeit

**Reelle Zahlen und ihre Arithmetik in der Darstellung der
dedekind'schen Schnitte**

Verfasser: Lukas Bilstein

Kursleiter: OStR Dr. Dennis Simon

Bewertung der Arbeit: _____

Bewertung der Präsentation: _____

Unterschrift Kursleiter: _____

Inhaltsverzeichnis

1	Unvollständigkeit der rationale Zahlen	3
2	Näherung von $\sqrt{2}$	3
3	Formale Defintion Dedekind'scher Schnitte	4
3.1	Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen	4
4	Begriffsdefinitionen	4
4.1	Eigenschaften von Mengendefinitionsverschachtelungen	5
5	Ordnung in den reellen Zahlen	5
6	Der Körper der reellen Zahlen	5
6.1	Addition dedekind'scher Schnitte	6
6.1.1	Kommutativität und neutrales Element	6
6.1.2	Assoziativität	7
6.1.3	Inverse Element und Subtraktion	7
6.2	Multiplikation dedekidsch'scher Schnitte	8
6.2.1	Assoziativität	8
6.2.2	Neutrales Element	9
6.2.3	Inverse Element und die Division	9
6.3	Distributivität	9
7	Abgrenzung zu den rationalen Zahlen	10
7.1	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	10
8	Der Archimedische Körper der reellen Zahlen	11
9	Ausblick	11
10	Literaturverzeichnis	12

1 Unvollständigkeit der rationale Zahlen

Nach der Definition der Multiplikation in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} , stellten wir fest, dass die Umkehrung der Multiplikation, die Division, nicht für alle Paare ganzer Zahlen definiert ist. So ist $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl.

Daraufhin haben wir die rationalen Zahlen eingeführt, welche ebendiese Lücke gefüllt haben.

Doch auch die rationalen Zahlen sind auch nicht vollständig. Die Gleichung $a^2 = a * a = 2$ hat keine Lösung in den rationalen Zahlen.

Beweis: Gibt es eine rationale Zahl q mit $q = \frac{m}{n}$, sodass $q = \sqrt{2}$, so muss gelten:

$$q = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \quad (1)$$

Also muss entweder m^2 oder n^2 ungerade viele 2-er in der Primzahlenzerlegung enthalten, was aber unmöglich ist, da Quadratzahlen Primfaktoren immer gerade oft enthalten.

Damit kann es keine rationale Zahl q geben, die die obige Gleichung erfüllt.

Weiterhin gilt dies für alle rationalen Zahlen, welche sich nicht als Quotient zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

2 Näherung von $\sqrt{2}$

Wir können aber klar definieren, welche rationalen Zahlen kleiner bzw. größer als $\sqrt{2}$ sind:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n < 0 \vee n^2 < 2\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > 0 \wedge n^2 > 2\}$$

An dieser Stelle müssen wir die Bedingung $n > 0$ bzw. $n < 0$ einfügen, da $n^2 = 2$ zwei Lösungen besitzt, an dieser Stelle aber nur die Positive gesucht ist.

Beide Mengen sind klar definiert, enthalten aber weder gemeinsame Elemente noch $\sqrt{2}$. (Da diese keine rationale Zahl ist)

Wir wollen im folgendem die ‘obere’ Menge als Dedekind’scher Schnitt bezeichnen.

3 Formale Definition Dedekind'scher Schnitte

1. Ein Dedekind'scher Schnitt r ist eine nicht-leere Teilmenge der rationalen Zahlen \mathbb{Z} , also ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, welche nach unten beschränkt ist, (Vgl. Begriffsdefinition im nachfolgendem Teil) und nicht gleich den rationalen Zahlen selbst ist.
2. Es muss gelten: $\forall a \in r : \forall b \in \mathbb{Z} : b \geq a \rightarrow b \in r$, d.h. für eine rationale Zahl in einem dedekind'schen Schnitt müssen alle größeren rationalen Zahlen auch enthalten sein, sodass der dedekind'sche Schnitt keine 'Lücken' hatt.
3. Für einen dedekind'schen Schnitt r gibt es keine rationale Zahl q , für die $q \in r$ und $\forall x \in r : q \leq x$, also r besitzt keine kleinste rationale Zahl.

Wir definieren nun die Menge \mathbb{R} als die Menge aller dedekind'schen Schnitten, also der Menge aller Elemente der Potenzmenge der rationalen Zahlen, für die obige drei Eigenschaften gelten.

Anmerkung: Je nach Literatur wird ein dedekidsch'scher Schnitt auch als eine nach oben Beschränkte Teilmenge beschrieben, welche kein größtes Element besitzt.

3.1 Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

Wir müssen eine Funktion definieren, die jeder rationalen Zahlen q einen dedekind'schen Schnitt r zuordnet.

Eine solche Funktion ist:

$$r = \{x > q \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

Im folgenden werden wir sehen, dass diese Definition die Eigenschaften der rationalen Zahlen erhält, wenn wir deren dedekind'sche Schnitt betrachten.

Das Infimum eines solchen Schnittes ist die rationale Zahl selbst, die diesen Schnitt beschreibt. Wir werden später feststellen, dass nicht alle dedekind'schen Schnitte ein rationales Infimum besitzen.

4 Begriffsdefinitionen

Zu einer Teilmenge m einer Menge M mit einer Ordnung, wie sie die Menge der rationalen Zahlen darstellt, kann es obere und untere Schranken geben.

Eine obere Schranke s ist ein Element aus M , für das alle Elemente aus m kleiner als s sind.

Eine untere Schranke analog für das alle Element aus m größer als s sind.

Besitzt M eine Schranke, spricht man dass M nach der jeweiligen Seite beschränkt ist.

Weiterhin ist das Supremum die kleinste obere Schranke, und das Infimum die größte untere Schranke einer Menge m .

4.1 Eigenschaften von Mengendefinitionsverschachtelungen

Sei A definiert durch $A = \{f(a) \mid a \in \{g(x) \mid x \in I\}\}$.

Wir dürfen A umschreiben als: $A = \{f(g(x)) \mid x \in I\}$

Ebenfalls gilt die Umkehrung und die Erweiterung auf mehr-variablen Funktionen.

5 Ordnung in den reellen Zahlen

Seien a und b zwei dedekind'sche Schnitte. Wir definieren

$$a > b := \exists x \in b : b \notin a$$

Und weiterhin $a < b := b > a$, $a \geq b := \neg(a < b)$ und $a \leq b := \neg(a > b)$.

6 Der Körper der reellen Zahlen

Ein Körper K ist ein System aus einer Menge M , und zwei Operationen '+' und '*', die je zwei Elementen aus der Menge M einem der gleichen zuordnet.

Für die Operationen '+' und '*' muss jeweils gelten (wobei \emptyset ein eindeutiges neutrales Element für die Operation darstellt):

- $\forall x, y, z \in M : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (Assoziativ)
- $\forall x, y \in M : x \oplus y = y \oplus x$ (Kommutativ)
- $\exists x \in M : \forall y \in M : x \oplus y = y$ (Existenz eines neutralen Elements)
- $\forall x \in M : \exists y \in M : x \oplus y = \emptyset$ (Existenz einer Inversen)

Und Operationsübergreifend:

- $\forall x, y, z \in M : (x + y) * z = (x * z) + (y * z)$ (Distributiv)

All diese sollen im folgenden für unser konstruiertes \mathbb{R} bewiesen werden.

6.1 Addition dedekind'scher Schnitte

Wir definieren zunächst die Addition folgendermaßen:

$$a + b := \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\}$$

Wir müssen zunächst beweisen, dass $a + b$ tatsächlich ein dedekind'scher Schnitt ist.

$a + b$ ist nicht leer, da $a + b$ alle Kombinationen aus a und b enthält, und a und b nicht leer sind.

$a + b$ enthält nicht alle rationalen Zahlen, da die Zahl $\inf(a) + \inf(b) - 1$ nicht in $a + b$ enthalten sein kann, da dafür ein Element kleiner als das Infimum in a oder b enthalten sein müsste, was aber nach der Definition unmöglich ist.

Es ist ebenfalls klar, dass $a + b$ keine Lücken hat. Sei m eine Zahl aus dem Schnitt $a + b$ und n eine Zahl die größer als m ist, aber nicht in $a + b$ enthalten ist. Sei $x \in a$ und $y \in b$, sodass $x + y = m$. Da a neben x auch die Zahl $x + (n - m)$ enthalten muss, muss auch $x + (n - m) + y$ in $a + b$ enthalten sein. Ersetzen von $x + y$ durch m ergibt $n - m + m = n$, was bedeutet, dass n auch in $a + b$ enthalten sein muss, was aber im Widerspruch zu unserer Annahme steht.

Sei $x + y$ das kleinste Element in $a + b$. Sei weiterhin x' ein Element aus a . Sei $y' = x + y - x'$. Diese Zahl kann nicht $\in b$ sein, da sonst $x' + y' > x + y \Leftrightarrow y' > x + y - y'$. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass $x + y \in a + b$, da per Definition der Addition nur solche Elemente in $a + b$ enthalten sind, für die $x \in a$ und $y \in b$.

6.1.1 Kommutativität und neutrales Element

Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität der rationalen Zahlen:

$$\begin{aligned} a + b &= \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ &= \{y + x \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ &= \{y + x \mid y \in b \wedge x \in a\} = \\ &= b + a \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist die Menge $\{a > 0 \mid a \in \mathbb{Q}\}$. Bei Addition kommen nur Elemente größer-gleich der ursprünglichen Elemente heraus, und damit bleibt der dedekindsche Schnitt identisch.

6.1.2 Assoziativität

Wir können $A + (B + C)$ schreiben als:

$$\{a + d \mid a \in A \wedge d \in \{b + c \mid b \in B \wedge c \in C\}\}$$

Was wir umschreiben dürfen als:

$$\{a + b + c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

Und weiterhin:

$$\{d + c \mid d \in \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\}$$

Was identisch zur geforderten Eigenschaft $(A + B) + C$ ist.

6.1.3 Inverse Element und Subtraktion

Wir schreiben das Inversum von A als $-A$ und definieren es als:

$$A^- := \{b \in \mathbb{Q} \mid a + b > 0 \wedge a \in A\}$$

Die Menge ist nicht-leer, da $a + b > 0$ in den rationalen Zahlen Lösungen besitzt, solange $|a| \neq \infty$ und $|b| \neq \infty$.

Aus gleichem Grund ist die Menge nicht gleich den rationalen Zahlen, da es für obige Gleichung rationale Zahlen gibt, die diese nicht erfüllen.

Doch das Inversum kann ein kleinstes Element haben. In diesem Fall müssen wir dieses Element ausschließen, und wir definieren also:

$$-A := \begin{cases} A^- & \text{wenn } A^- \text{ kein kleinstes Element hat} \\ A^- \setminus x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Subtraktion ist wie üblich definiert mit: $A - B := A + (-B)$

Weiterhin ist damit der Betrag eines dedekindschen Schnittes definiert als:

$$|A| := \begin{cases} A & \text{wenn } A \geq 0 \\ -A & \text{sonst} \end{cases}$$

6.2 Multiplikation dedekindsch'scher Schnitte

Wir definieren $A \times B$ für zwei positive dedekindsch'sche Schnitte A und B folgendermaßen:

$$A \times B := \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Diese Menge ist wieder nicht-leer, da sie wieder die Kombinationen zweier nicht-leerer Mengen enthält.

Sie ist nicht identisch zu den rationalen Zahlen, da sie nur positive Elemente enthalten kann.

Sie hat kein kleinstes Element.

Wir können nun diese Multiplikation auch auf negative Schnitte erweitern, dafür verwenden wir folgende Fallunterscheidung:

$$A * B := \begin{cases} A \times B & \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } B \geq 0 \\ -A \times -B & \text{wenn } A < 0 \text{ und } B < 0 \\ -(-A \times B) & \text{wenn } A < 0 \text{ und } B \geq 0 \\ -(A \times -B) & \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } B < 0 \end{cases}$$

Die Kommutativität für positive Schnitte ist wie bei der Addition klar ersichtlich. Ein Vorzeichen ändert daran nichts, da dieses in der eigentlichen Berechnung nicht verwendet wird.

6.2.1 Assoziativität

Seien a, b und c drei dedekind'sche Schnitte, und $d = (a * b) * c$. Der Einfachheit halber seien a, b und c zunächst positiv.

Wir können d schreiben als:

$$d = \{m * n \mid m \in \{x * y \mid x \in a \wedge y \in b\} \wedge n \in c\}$$

Und durch Vereinfachung:

$$d = \{(x * y) * n \mid (x \in a \wedge y \in b) \wedge n \in c\}$$

Und weiterhin:

$$d = \{x * y * n \mid x \in a \wedge y \in b \wedge n \in c\}$$

Was sich umformen lässt zu:

$$d = \{x * m \mid x \in a \wedge m \in \{y * n \mid y \in b \wedge n \in c\}\}$$

Auf dem selben weg kommen wir zur geforderten Gleichung $d = a * (b * c)$.

6.2.2 Neutrales Element

Das neutrale Element der Multiplikation ist die '1', also $\{q > 1 \mid q \in \mathbb{Q}\}$

Dabei ist klar, dass für einen positiven Schnitt a bei Multiplikation mit 1 für jedes Element aus a nur Elemente größer-gleich demselben entstehen, und damit keine kleineren Elemente dazukommen, sodass der Schnitt gleich bleibt.

6.2.3 Inverse Element und die Division

Wir definieren:

$$a* := \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$$

a^* ist nicht-leer und enthält nicht alle Elemente der rationalen Zahlen.

Aber wir stellen fest, dass diese Menge ein kleinstes Element haben kann.

Wir definieren also a^{-1} als:

$$a^{-1} := \begin{cases} \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} & \text{wenn diese kein kleinstes Element hat} \\ \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} \setminus \{\text{kleinstes Element}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Und weiterhin definieren wir die Division mithilfe:

$$a \div b := a * b^{-1}$$

6.3 Distributivität

Wir betrachten den Term $(A + B) * C$. Für den Fall, dass $A, B, C > 0$ sind, gilt:

$$\begin{aligned} (A + B) * C &= \{x * c \mid x \in \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\} = \\ &= \{(a + b) * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{a * c + b * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} = \\
&= \{x + y \mid x \in \{a * c \mid a \in A \wedge c \in C\} \wedge \{b * c \mid b \in B \wedge c \in C\}\} = \\
&= (A * C) + (B * C)
\end{aligned}$$

Wenn C negativ wird, können wir $C \rightarrow -C$ substituieren, und erhalten:

$$= (A + B) * (-1) * C = (-1) * ((A + B) * C) = (-1) * (AB + AC) =$$

Wir nehmen nun $A' = AC$ und $B' = BC$ und erhalten mit Substitution der Inversionsformel:

$$\begin{aligned}
&= \{b \in \mathbb{Q} \mid x + b > 0 \wedge x \in (A' + B')\} = \\
&= \{b \in (Q) \mid a' + b' + b > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} = \\
&= \{b_1 + b_2 \in \mathbb{Q} \mid a' + b_1 > 0 \wedge b' + a_2 > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} =
\end{aligned}$$

Und nun nehmen wir b_1 und b_2 als Summanden:

$$\begin{aligned}
&= \{b_1 \in \mathbb{Q} \mid a' + b_1 > 0 \wedge a' \in A'\} + \{b_2 \in \mathbb{Q} \mid b' + b_2 > 0 \wedge b' \in B'\} = \\
&= (-A') + (-B') = -AC - BC
\end{aligned}$$

Und resubstituiert $C \rightarrow -C$ das gesuchte $AC + BC$

Wenn A oder B < 0 ist, wir nehmen an, es sei A, substituieren wir $A \rightarrow -A$ und erhalten $-AC + BC$, und können wieder resubstituieren. Gleichmaßen wenn A und B negativ sind.

Damit ist unser Körper wirklich ein Körper.

7 Abgrenzung zu den rationalen Zahlen

Nachdem wir anfangs herausgefunden hatten, dass Zahlen wie $\sqrt{2}$ keine rationalen Zahlen sind, stellt sich die Frage, ob wir diese Eigenschaft nicht mathematisch festhalten können.

Dafür betrachten wir unser Beispiel, den dedekind'schen Schnitt zu $\sqrt{2}$. Diese Menge besitzt kein Infimum, da die Zahl $\sqrt{2}$, welche nicht Teil des dedekind'schen Schnittes ist, keine rationale Zahl ist, sich aber beliebig annähern lässt, und somit zu jeder rationalen Zahl kleiner als $\sqrt{2}$ eine existiert, die näher an $\sqrt{2}$ ist.

Wir definieren darauf den Begriff der Vollständigkeit. Eine geordnete Menge M ist genau dann Vollständig, wenn alle Teilmengen von M , die nach unten beschränkt sind, ein Infimum besitzen.

Für die Menge \mathbb{Q} ist der Schnitt $\sqrt{2}$ ein Gegenbeispiel, der nach Definition der dedekind'schen Schnitte eine Teilmenge von \mathbb{Q} ist. Also ist \mathbb{Q} nicht vollständig.

7.1 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Sei M eine nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} , und $C \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M .

Sei

$$I = \bigcup_{a \in M} a \subseteq M$$

Da alle Elemente aus M dicht sind, und nach oben bis ∞ gehen, muss I ebenfalls dicht sein. I besitzt weiterhin kein kleinstes Element, da die kleinsten Elemente aus dem kleinsten Schnitt aus M kommen. I ist nach unten beschränkt, da alle Elemente aus M nach unten beschränkt sind.

Also muss I wieder ein dedekind'scher Schnitt sein.

Es gilt $I \leq a$ für alle $a \in M$, da $\forall m \in M : m \subseteq I$. (Eigenschaften der Vereinigungsmenge)

Durch die Definition von I folgt, dass I eine Teilmenge von C ist, und damit alle C kleiner als I . Damit ist I die größte untere Schranke der Menge M .

Damit ist \mathbb{R} vollständig, da mit obigen Konstruktion allen reellen Zahlen ein Infimum, I , zugewiesen werden können.

8 Der Archimedische Körper der reellen Zahlen

Ein geordneter Zahlenkörper M ist dann archimedisch, wenn für all seine Elemente m eine natürliche Zahl n existiert, die größer als m ist. Dafür benötigt M eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, welche einer natürlichen Zahl ein Element aus M zuordnet, um den Vergleich durchzuführen.

Für die reellen Zahlen ist eine solche Funktion die folgende:

$$f : n \rightarrow \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > n\}$$

Sei nun N die Menge aller natürlicher Zahlen kleiner als m sind, also

$$N = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq m\}$$

Sei s nun das Supremum von N . Es muss gelten: $f(s) \leq m$. Aber auch $f(s+1) \geq m$ und ferner $f(s+2) > m$, da sonst $s+1$ auch Teil von N sein müsste.

Somit gibt es zu jeder reellen Zahlen m mindestens eine natürliche Zahl n (hier z.B. $s+1$), die größer als m ist, und damit ist \mathbb{R} archimedisch.

9 Ausblick

In der Einleitung haben wir $\sqrt{2}$ betrachtet, und gemerkt, dass sie keine rationale Zahl ist. Dies lässt sich einfach auf alle weiteren positiven rationale Zahlen erweitern, wobei nur die Quadrate von rationalen Zahlen rationale Wurzeln besitzen.

Doch der dedekind'sche Schnitt für -1 , also $\{a \mid a^2 > -1\}$, ist gleich \mathbb{Q} , da das Quadrat einer rationalen Zahl nie negativ sein kann. Wir können an dieser Stelle auch nicht einfach wieder 'dedekind'sche Schnitte' über den reellen Zahlen bilden, da die reellen Zahlen ebenfalls die Eigenschaft besitzen, dass ihr Quadrat immer positiv ist.

(An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Konstruktion von dedekind'schen Schnitten über \mathbb{R} gar keine neuen Zahlen konstruiert)

Wir wollen also eigentlich neue Zahlen konstruieren, für die Wurzeln auf beliebige Zahlen, nicht nur positive, definiert sind.

10 Literaturverzeichnis

- Uwe Storch, Hartmut Wiebe: Grundkonzepte der Mathematik: Mengentheoretische, algebraische, topologische Grundlagen sowie reelle und komplexe Zahlen, Springer Spektrum Verlag
- Prof. Dr. Siegfried Echterhoff: Ergänzung zur Vorlesung Analysis I WS08/0, Konstruktion von \mathbb{R} , https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Konstruktion_reelle_Zahlen.pdf, zuletzt abgerufen am 23.10.2021
- <http://www.math.columbia.edu/~harris/2000/2016Dedcuts.pdf>

Ich erkläre hiermit, dass ich die Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

....., den
Ort Datum

.....
Unterschrift des Verfassers