Hans-Sachs-Gymnasium Nürnberg

Oberstufenjahrgang 2020/2022

Seminarfach Mathematik

Seminararbeit

Reelle Zahlen und ihre Arithmetik in der Darstellung der dedekind'schen Schnitten

Verfasser: Lukas Bilstein

Kursleiter: OStR Dr. Dennis Simon

Bewertung der Arbeit: ____________________

Bewertung der Präsentation: ____________________

Unterschrift Kursleiter: __________________________

Inhaltsverzeichnis

1 Unvollästndigkeit der rationale Zahlen **3**

2 Näherung von $\sqrt{2}$ **3**

1 Unvollständigkeit der rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) wurden zur Vervollständigung der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) definiert, in der die Umkehrfunktion der Multiplikation, die Division, nicht vollständig definiert ist.

Doch auch die rationalen Zahlen sind auch nicht vollständig. Mit Einführung der Potenz und deren Umkehrung, der Wurzel, stellt sich das Problem, das z.B. $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Beweis: Gibt es eine rationale Zahl q mit $q = m/n$, sodass $q = \sqrt{2}$, so muss gelten:

$$q = \sqrt{2} \Leftrightarrow m/n = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2/n^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \tag{1}$$

Also muss entweder m^2 oder n^2 ungerade viele 2-er in der Primzahlenzerlegung enthalten, was aber unmöglich ist, da Quadratzahlen Primfaktoren immer gerade oft enthalten. Damit kann es keine rationale Zahl q geben, die die genannten Eigenschaften erfüllt, und damit kann auch $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.

2 Näherung von $\sqrt{2}$

Wir können aber klar definieren, welche Zahlen kleiner und größer als $\sqrt{2}$ sind:

$$\{n \in \mathbb{N} | n < 0 \vee n^2 < 2\}$$
$$\{n \in \mathbb{N} | n > 0 \wedge n^2 > 2\}$$

Beide Mengen sind klar definiert, enthalten aber weder gemeinsame Elemente noch $\sqrt{2}$ (Da diese keine rationale Zahl ist).

Wir wollen im folgendem die untere Menge als Dedekind'scher Schnitt bezeichnen.

3 Formale Defintion Dedekind'scher Schnitte

Ein Dedekind'scher Schnitte r ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Z}$, welche nach oben Beschränkt ist, d.h. eine rationale Zahl q existiert, für die $\forall k \in r : k <= q$. Desweiteren muss gelten: $\forall a \in r : \forall b \in \mathbb{Z} : b <= a \to b \in r$

A Literaturverzeichnis

Uwe Storch, Hartmut Wiebe: Grundkonzepte der Mathematik: Mengentheoretische, algebraische, topologische Grundlagen sowie reelle und komplexe Zahlen, Springer Spektrum Verlag

Prof. Dr. Siegfried Echterhoff: Ergäanzung zur Vorlesung Analysis I WS08/0, Konstruktion von R, $https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Ko$ Zuletzt abgerufen am 02.10.2021

Ich erkläre hiermit, dass ich die Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

...., den ....
Ort Datum

....
Unterschrift des Verfassers