Hans-Sachs-Gymnasium Nürnberg

Oberstufenjahrgang 2020/2022

Seminarfach Mathematik

Seminararbeit

Reelle Zahlen und ihre Arithmetik in der Darstellung der dedekind'schen Schnitte

Verfasser: Lukas Bilstein

Kursleiter: OStR Dr. Dennis Simon

Bewertung der Arbeit: ________________

Bewertung der Präsentation: ________________

Unterschrift Kursleiter: ____________________

Inhaltsverzeichnis

1 Unvollständigkeit der rationale Zahlen

Nach der Definition der Multiplikation in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, stellten wir fest, dass die Umkehrung der Multiplikation, die Division, nicht für alle Paare ganzer Zahlen definiert ist. So ist $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl.

Daraufhin haben wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eingeführt, welche ebendiese Lücke gefüllt haben.

Doch auch die rationalen Zahlen sind auch nicht vollständig. Die Gleichung $a^2 = a * a = 2$ hat keine Lösung in den rationalen Zahlen.

Beweis: Gibt es eine rationale Zahl q mit $q = \frac{m}{n}$, sodass $q = \sqrt{2}$, so müsste gelten:

$$q = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Also muss entweder m^2 oder n^2 ungerade viele 2-er in der Primzahlenzerlegung enthalten, was aber unmöglich ist, da Quadratzahlen Primfaktoren immer gerade oft enthalten.

Damit kann es keine rationale Zahl q geben, die die obige Gleichung erfüllt.

Weiterhin gibt es in den rationalen Zahlen q für die Gleichung $x^2 = q$ nur für die q Lösungen, die der Form $q = x'^2$ mit $x' \in \mathbb{Q}$ sind. [1]

2 Näherung von $\sqrt{2}$

Wir können aber klar definieren, welche rationalen Zahlen kleiner bzw. größer als $\sqrt{2}$ sind:

$$\{n \in \mathbb{Q} \mid n < 0 \vee n^2 < 2\}$$

$$\{n \in \mathbb{Q} \mid n > 0 \wedge n^2 > 2\}$$

An dieser Stelle müssen wir die Bedingung $n > 0$ bzw. $n < 0$ einfügen, da $n^2 = 2$ zwei Lösungen besitzt, an dieser Stelle aber nur die Positive gesucht ist.

Beide Mengen sind klar definiert, enthalten aber weder gemeinsame Elemente noch $\sqrt{2}$. (Da diese keine rationale Zahl ist)

Wir wollen im folgendem die ‘obere‘ Menge als Dedekind’scher Schnitt bezeichnen.

[1] An dieser Stelle ist für beide kein solcher Beweis angefügt, aber der Beweis für $\sqrt{2}$ lässt sich auf beliebige q erweitern.

3 Formale Definition Dedekind'scher Schnitte

1. Ein Dedekind'scher Schnitt r ist eine nicht-leere Teilmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, also ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, welche nach unten beschränkt ist, (Vgl. Begriffsdefinition im nachfolgendem Teil) und nicht gleich den rationalen Zahlen selbst ist.

2. Es muss gelten: $\forall a \in r : \forall b \in \mathbb{Z} : b \geq a \Rightarrow b \in r$, d.h. für eine rationale Zahl in einem dedekind'schen Schnitt müssen alle größeren rationalen Zahlen auch enthalten sein, sodass der dedekind'sche Schnitt keine 'Lücken' hatt.

3. Für einen dedekind'schen Schnitt r gibt es keine rationale Zahl q, für die $q \in r$ und $\forall x \in r : q \leq x$, also r besitzt keine kleinste rationale Zahl.

Wir definieren nun die Menge $\mathbb{R}$ als die Menge aller dedekind'schen Schnitten, also der Menge aller Elemente der Potenzmenge der rationalen Zahlen, für die obige drei Eingenschaften gelten.

Anmerkung:

Je nach Literatur wird ein dedekidsch'scher Schnitt auch als eine nach oben Beschränkte Teilmenge beschrieben, welche kein größtes Element besitzt, oder auch als geordnetes Paar beider. welche kein größtes Element besitzt, oder auch als geordnetes Paar beider. Der einfachhalthalber verwende ich im folgenden nur die obige Definition

4 Begriffsdefinitionen

Zu einer Teilmenge m einer Menge M mit einer Ordnung, wie sie die Menge der rationalen Zahlen darstellt, kann es obere und untere Schranken geben.

Eine obere Schranke s ist ein Element aus M, für das alle Elemente aus m kleiner als s sind.

Eine untere Schranke analog für das alle Element aus m größer als s sind.

Besitzt M eine Schranke, spricht mann dass M nach der jeweiligen Seite beschränkt ist.

Weiterhin ist das Supremum die kleinste obere Schranke, und das Infimum die größte untere Schranke einer Menge m.

4.1 Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen

Wir müssen eine Funktion definieren, die jeder rationalen Zahlen q einen dedekind'schen Schnitt r zuordnet.

Eine solche Funktion ist:

$$r = \{x > q \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

Im folgenden werden wir sehen, dass diese Definition die Eigenschaften der rationalen Zahlen erhält, wenn wir deren dedekind'sche Schnitt betrachten.

Das Infimum eines solchen Schnittes ist die rationale Zahl selbst, die diesen Schnitt beschreibt. Wir werden später feststellen, das nicht alle dedekind'schen Schnitte ein rationales Infimum besitzen.

5 Ordnung in den reellen Zahlen

Seien a und b zwei dedekind'sche Schnitte. Wir definieren

$$A > B := A \subset B$$

Und weiterhin $a < b := b > a$, $a \geq b := \neg(a < b)$ und $a \leq b := \neg(a > b)$.

Diese Gleichung sollte idealerweise auch für zwei Schnitte, die rationalen Zahlen repräsentieren, gelten:

Sei $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a > b$, und A und B die beiden dedekind'schen Schnitte von a und b.

Wir schreiben:

$$A > B \Leftrightarrow \{q \in \mathbb{Q} \mid q > a\} \subset \{q \in \mathbb{Q} \mid q > b\}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A)$$

Für den ersten Teil nehmen wir an, x' sei $\in A$, aber nicht $\in B$. Dafür müsste $x' > a$, aber $\leq b$ sein, was aber unmöglich ist, da $a > b$.

Für den anderen Teil nehmen wir $y = a$ und erhalten, dass a nicht in A enthalten ist, aber in B enthalten sein muss.

Damit ist die Ordnung zweier Schnitte zweier rationaler Zahlen die gleiche wie in den rationalen Zahlen selbst.

6 Der Körper der reellen Zahlen

Ein Körper K ist ein System aus einer Menge M, und zwei Funktionen '+': $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und '*': $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Wir schreiben für $+(a, b)$ auch $a + b$ und analog für $*(a, b)$ auch $a * b$.

Für die Operationen '+' und '*' muss jeweils gelten, dabei ist $\emptyset$ ein Operationsspezifisches neutrales Element:

- $\forall x, y, t \in M : x \bigoplus (y \bigoplus z) = (x \bigoplus y) \bigoplus z$ (Assoziativ)

- $\forall x, y \in M : x \bigoplus y = y \bigoplus x$ (Kommutativ)

- $\exists x \in M : \forall y \in M : x \bigoplus y = y$ (Existenz eines neutralen Elements)

- $\forall x \in M : \exists y \in M : x \bigoplus y = \emptyset$ (Existenz einer Inversen)

Und Operationsübergreifend:

- $\forall x, y, z \in M : (x + y) * z = (x * z) + (y * z)$ (Distributiv)

All diese sollen im folgenden für unser konstruiertes $\mathbb{R}$ bewiesen werden.

6.1 Addition dedekind'scher Schnitte

Wir definieren zunächst die Addition folgendermaßen:

$a + b := \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\}$[2]

Wir müssen zunächst beweisen, dass $a + b$ tatsächlich ein dedekind'scher Schnitt ist.

$a + b$ ist nicht leer, da $a + b$ alle Kombinationen aus a und b enthält, und a und b nicht leer sind.

$a + b$ enthält nicht alle rationalen Zahlen, da die Zahl $infimum(a) + infimum(b) - 1$ nicht in $a + b$ enthalten sein kann, da dafür ein Element kleiner als das Infimum in a oder b enthalten sein müsste, was aber nach der Definition unmöglich ist.

Es ist ebenfalls klar, das $a + b$ keine Lücken hat. Sei m eine Zahl aus dem Schnitt $a + b$ und n eine Zahl die größer als m ist, aber nicht in $a + b$ enthalten ist. Sei $x \in a$ und $y \in b$, sodass $x + y = m$. Da a neben x auch die Zahl $x + (n - m)$ enthalten muss, muss auch $x + (n - m) + y$ in $a + b$ enthalten sein. Ersetzen von $x + y$ durch m ergibt $n - m + m = n$, was bedeutet, dass n auch in $a + b$ enthalten sein muss, was aber im widerspruch zu unser Annahme steht.

Sei $x + y$ das kleinstes Element in $a + b$. Sei weiterhin x' ein Element aus a. Sei $y' = x + y - x'$. Diese Zahl kann nicht $\in b$ sein, da sonst $x' + y' > x + y \Leftrightarrow y' > x + y - y'$.

[2] Vgl. Richard Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen, S. 17ff

Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass $x + y \in a + b$, da per Definition der Addition nur solche Elemente in $a + b$ enthalten sind, für die $x \in a$ und $y \in b$.

6.1.1 Kommutativität und neutrales Element

Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität der rationalen Zahlen:

$$\begin{aligned} a + b = \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ = \{y + x \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ = \{y + x \mid y \in b \wedge x \in a\} = \\ = b + a \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist die Menge $\{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$. Bei Addition kommen nur Elemente größer-gleich der ursprünglichen Elemente heraus, und damit bleibt der dedekind'sche Schnitt identisch.

6.1.2 Assoziativität

Wir können $A + (B + C)$ schreiben als:

$$\{a + d \mid a \in A \wedge d \in \{b + c \mid b \in B \wedge c \in C\}\}$$

Was wir umschrieben dürfen als:

$$\{a + b + c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

Und weiterhin:

$$\{d + c \mid d \in \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\}$$

$$= \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} + C = (A + B) + C$$

6.1.3 Inverse Element und Subtraktion

Wir schreiben das Inversum von A als $-A$ und definieren es als:

$$A^{-} := \{b \in \mathbb{Q} \mid a + b > 0 \wedge a \in A\}$$

Die Menge ist nicht-leer, da $a + b > 0$ in den rationalen Zahlen Lösungen besitzt, solange $|a| \neq \infty$ und $|b| \neq \infty$.

Aus gleichem Grund ist die Menge nicht gleich den rationalen Zahlen, da es für obige Gleichung rationale Zahlen gibt, die diese nicht erfüllen.

Doch das Inversum kann ein kleinstes Element haben. In diesem Fall müssen wir dieses Element ausschließen, und wir definieren also:

$$-A := \begin{cases} A^- \; wenn \; A^- \; kein \; kleinstes \; Element \; hat \\ A^- \backslash x_0 \; sonst \end{cases}$$

Die Subtraktion ist wie üblich Definiert mit: $A - B := A + (-B)$

Weiterhin ist damit der Betrag eines dedekind'schen Schnittes definiert als:

$$|A| := \begin{cases} A \;\; wenn \; A \geq 0 \\ -A \;\; sonst \end{cases}$$

6.1.4 Addition zweier rationaler Zahlen als dedekind'sche Schnitte

Seien a und b zwei rationale Zahlen, und A und B ihre dedekind'schen Schnitte.

Wir können A + B schreiben als:

$$\{x + y \mid x \in A \land y \in B\}$$

Oder auch:

$$= \{x + y \mid x, y \in \mathbb{Q} \land x > a \land y > b\} =$$

$$= \{q \mid q \in \mathbb{Q} \land q > (a + b)\} = schnitt(a + b)$$

Damit ist die Addition gleich der der rationalen Zahlen.

6.2 Multiplikation dedekidsch'scher Schnitte

Wir definieren $A \times B$ für zwei positive dedekidsch'sche Schnitte A und B folgendermaßen:

$$A \times B := \{a * b \mid a \in A \land b \in B\}$$

Diese Menge ist wieder nicht-leer, da sie wieder die Kombinationen zweier nichtleerer Mengen enthält.

Sie ist nicht identisch zu den rationalen Zahlen, da sie nur positive Elemente enthalten kann.

Sie hat kein kleinstes Element.

Wir können nun die Multiplikation wiefolgendend mithilfe obiger $\times$-Operation definieren, dafür verwenden wir folgende Fallunterscheidung:

$$A * B := \begin{cases} A \times B \; wenn \; A \geq 0 \; und \; B \geq 0 \\ -A \times -B \; wenn \; A < 0 \; und \; B < 0 \\ -(-A \times B) \; wenn \; A < 0 \; und \; B \geq 0 \\ -(A \times -B) \; wenn \; A \geq 0 \; und \; B < 0 \end{cases}$$

Die Kommutativität für positive Schnitte ist wie bei der Addition klar ersichtlich. Ein Vorzeichen ändert daran nichts, da dieses in der eigentlichen Berechung nicht verwendet wird.

6.2.1 Assoziativität

Seien a, b und c drei dedekind'sche Schnitte, und d = (a * b) * c. Der Einfachheit halber seien a, b und c zunächst positiv.

Wir können d schreiben als:

$$d = \{m * n \mid m \in \{x * y \mid x \in a \wedge y \in b\} \wedge n \in c\}$$

Und durch Vereinfachung:

$$d = \{(x * y) * n \mid (x \in a \wedge y \in b) \wedge n \in c\}$$

Und weiterhin:

$$d = \{x * y * n \mid x \in a \wedge y \in b \wedge n \in c\}$$

Was sich umformen lässt zu:

$$d = \{x * m \mid x \in a \wedge m \in \{y * n \mid y \in b \wedge n \in c\}\}$$

Auf dem selben weg kommen wir zur geforderten Gleichung $d = a * (b * c)$.

6.2.2 Neutrales Element

Das neutrale Element der Multiplikation ist die '1', also $\{q > 1 \mid q \in \mathbb{Q}\}$

Dabei ist klar, dass für einen positiven Schnitt a bei Multiplikation mit 1 für jedes Element aus a nur Elemente größer-gleich demselben entstehen, und damit keine kleineren Elemente dazukommen, sodass der Schnitt gleich bliebt.

6.2.3 Inverse Element und die Division

Wir definieren:

$$a^* := \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$$

a^* ist nicht-leer und enthält nicht alle Elemente der rationalen Zahlen.

Aber wir stellen fest, dass diese Menge ein kleinstes Element haben kann.

Wir definieren also a^{-1} als:

$$a^{-1} := \begin{cases} \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} \; wenn\; diese\; kein\; kleinstes\; Element\; hat \\ \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} \backslash \{kleinstesElement\} \; sonst \end{cases}$$

Und weiterhin definieren wir die Division mithilfe:

$a \div b := a * b^{-1}$

6.2.4 Multiplikation zweier positiven rationalen Zahlen als dedekind'sche Schnitte

Seien a und b zwei rationale Zahlen und A und B ihre dedekind'schen Schnitte.

Wir können $A * B$ schreiben als:

$$\{x * y \mid x \in A \wedge y \in B\} =$$

$$= \{x * y \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x > a \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge y > b\} =$$

$$= \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > (a * b)\} = schnitt(a * b)$$

Damit ist die Multiplikation gleich der in den rationalen Zahlen.

6.3 Distributivität

Wir betrachten im folgenden den Term $(A+B)*C$. Dafür unterscheiden wir verschieden Fälle der Vorzeichen von A, B und C.

a) $A, B, C \geq 0$

Wir setzen unsere Definitionen ein und erhalten:

$$(A+B)*C = \{x*c \mid x \in \{a+b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\} =$$
$$= \{(a+b)*c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} =^3$$
$$= \{a*c+b*c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} =$$
$$= \{x+y \mid x \in \{a*c \mid a \in A \wedge c \in C\} \wedge \{b*c \mid b \in B \wedge c \in C\}\} =$$
$$= (A*C)+(B*C)$$

b) $A, B \geq 0 \wedge C < 0$

Wir substituieren $C = -C'$ und erhalten:

$$= (A+B)*(-1)*C' = (-1)*((A+<B)*C') = (-1)*(AB+AC') =$$

Wir setzten nun $A' = AC'$ und $B' = BC'$ und erhalten mit Substitution der Inversionsformel:

$$= \{b \in \mathbb{Q} \mid x+b > 0 \wedge x \in (A'+B')\} =$$
$$= \{b \in (Q) \mid a'+b'+b > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} =$$
$$= \{b_1+b_2 \in \mathbb{Q} \mid a'+b_1 > 0 \wedge b'+a_2 > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} =$$

Bei Aufspaltung durch die Rechenregeln dedekind'scher Schnitte:

$$= \{b_1 \in \mathbb{Q} \mid a'+b_1 > 0 \wedge a' \in A'\} + \{b_2 \in \mathbb{Q} \mid b'+b_2 > 0 \wedge b' \in B'\} =$$

Und Verwendung der Inversions-formel:

$$= (-A')+(-B') = A*(-C')+B*(-C')$$

[3] Diese Umformung nimmt an, dass $\{f(x) \mid x \in \{g(x) \mid x \in A\}\} = \{f(g(x)) \mid x \in A)\}$ ist, was ich an dieser Stelle nicht beweise.

Und resubstituiert $-C' = C$ die geforderte Formel $AC + BC$

c) $A < 0 \wedge B, C \geq 0 \wedge A + B \geq 0$

Folgendes gilt auch, wenn A und B getauscht werden (Kommutativität der Addition).

Aufgrund der Bedingung $|A| < |B|$ muss $(-A + B) > 0$ sein.

Wir substituieren $A = -A'$ und erhalten:

$$(-A' + B) * C = \{c * x \mid c \in C \wedge x \in \{a + b \mid a \in -A' \wedge b \in B\}\} =$$
$$= \{c * (a + b) \mid c \in C \wedge a \in -A' \wedge b \in B\} =$$
$$= \{a * c + b * c \mid c \in C \wedge a \in -A' \wedge b \in B\} =$$
$$= \{a * c \mid a \in -A' \wedge c \in C\} + \{b * c \mid b \in B \wedge c \in C\} =$$
$$= -A' * C + B * C$$

Und mit Resubstituiert $A' = -A$: $A * C + B * C$

d) $A, C < 0 \wedge B \geq 0 \wedge A + B \geq 0$

Wir substituieren $A = -A'$ und $C = -C'$:

$$(-A' + B) * (-C') = -1 * ((-A' + B) * C') = -1 * (AC' + BC') =$$
$$= -AC' + (-BC') = AC + BC$$

e) $A < 0 \wedge B, C \geq 0 \wedge A + B < 0$

$$(A + B) * C = -\{x * c \mid x \in -(A + B) \wedge c \in C\} =$$
$$= -\{(-a + -b) * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} =$$

Der innere Teil stellt $((-A) + (-B)) * C$ dar. $(-A) + (-B)$ ist aber > 0, also dürfen wir es umschreiben als: $-AC + (-BC)$.

Das '-' können wir nun auf beide Terme aufteilen, und erhalten das gesuchte $AC+BC$

f) $A, C < 0 \wedge B \geq 0 \wedge A + B < 0$

$$(A + B) * (-C') = -((A + B) * C') = -(AC' + BC') = AC + BC$$

g) $A, B < 0 \land C \geq 0$

Wir substituieren $A = -A'$ und $B = -B'$:

$$((-A') + (-B')) * C$$

Unter Verwendung der Umkehrung der Distributivität mit $A, B > 0$ und $C < 0$ ergibt sich daraus:

$$((A' + B') * (-1)) * C = (A' + B') * (-C) = -A'C + (-B'C) = AC + BC$$

h) $A, B, C < 0$

$$= (A + B) * (-C') = -((A + B) * C') = -(AC' + BC') = AC + BC$$

Damit ist unser Körper wirklich ein Körper.

7 Abgrenzung zu den rationalen Zahlen

Nachdem wir anfangs herausgefunden hatten, dass Zahlen wie $\sqrt{2}$ keine rationalen Zahlen sind, stellt sich die Frage, ob wir diese Eigenschaft nicht mathematisch festhalten können.

Dafür betrachten wir unser Beispiel, den dedekind'schen Schnitt zu $\sqrt{2}$. Diese Menge besitzt kein Infimum, da die Zahl $\sqrt{2}$, welche nicht Teil des dedekind'schen Schnittes ist, keine rationale Zahl ist, sich aber beliebig annähern lässt, und somit zu jeder rationalen Zahl kleiner als $\sqrt{2}$ eine existiert, die näher an $\sqrt{2}$ ist.

Wir definieren darauf den Begriff der Vollständigkeit[4]:

Eine geordnete Menge M ist genau dann Vollständig, wenn alle Teilmengen von M, die nach unten beschränkt sind, ein Infimum in M besitzen.

Für die Menge $\mathbb{Q}$ ist der Schnitt $\sqrt{2}$, der eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist, ein Gegenbeispiel. Also ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

7.1 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Sei M eine nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $C \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M.

[4] Eine alternative, gleichbedeutende Definition der Vollständigkeit durch Cauchy Folgen lässt sich finden unter: 'Proofs in Competition Math: Vol. 1', S. 107f

Sei

$$I = \bigcup_{a \in M} a \subseteq M$$

I ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$: Sei $n \in I$ eine Zahl $\notin \mathbb{Q}$. Nach der Definition der Schnittmenge muss mindestens ein $a \in M$ geben, für dass $n \in a$, was aber unmöglich ist, da a selbst eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist.

Da alle Elemente aus M dicht sind, muss I ebenfalls dicht sein.

I besitzt weiterhin kein kleinstes Element:

Sei i das kleinste Element aus I. Nach der Definition der Vereinigungsmenge existiert midestens ein $a \in M$ für das $i \in a$. i kann aber nicht das kleinste Element aus a sein, da a ein dedekind'scher Schnitt ist. Damit muss es ein $j \in a$ geben, was kleiner als i ist. Das aber müsste auch in I enthalten sein, was aber unmöglich ist, da i das kleinste Element aus I sein soll.

I ist nach unten beschränkt, da alle Elemente aus M nach unten beschränkt sind, und somit ein $u \in \mathbb{Q}$ existieren muss, dass eine untere Schranke für alle $a \in M$ ist.

Also ist I wieder ein dedekind'scher Schnitt.

Es gilt $I \leq a$ für alle $a \in M$, da $\forall m \in M : m \subseteq I$. (Eigenschaften der Vereinigungsmenge)

Durch die Definition von I folgt, dass I eine Teilmenge von C ist, und damit alle C kleiner als I. Damit ist I die größte untere Schranke der Menge M.

Damit ist $\mathbb{R}$ vollständig, da mit obigen Konstruktion allen reellen Zahlen ein Infimum, I, zugewiesen werden können.

8 Der Archimedische Körper der reellen Zahlen

Ein geordneter Körper M ist dann archimedisch, wenn für alle $x, y > 0 \in M$ eine natürliche Zahl n existiert, sodass $nx > y$ ist.[5]

Definiert M die Umkehrung der Multiplikation, so reicht es zu beweisen, dass $n > \frac{y}{x}$, oder auch $n > x'$ für ein $x' \in M$.

Also ist ein geordneter Körper M, in dem die Division definiert ist, dann archimedisch, wenn für alle seiner Elemente m eine natürliche Zahl n existiert, die größer als m ist.

Zunächst benötigt M eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$, welche einer natürlichen Zahl ein Element aus M zuordnet.

[5]Vgl. 'Proofs in Competition Math: Vol. 1', S. 108

Diese Funktion sollte die Elemente zurückgeben, sodass die Ordnung erhalten bleibt, also $a, b \in \mathbb{R} \wedge a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Für die reellen Zahlen ist eine solche Funktion die folgende:

$$f : n \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q > n\}$$

Sei nun N die Menge aller natürlicher Zahlen kleiner als m sind, also

$$N = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq m\}$$

Sei s nun das Supremum von N. Es muss gelten: $f(s) \leq m$. Aber auch $f(s+1) \geq m$ und ferner $f(s+2) > m$, da sonst $s+1$ auch Teil von N sein müsste.

Somit gibt es zu jeder reellen Zahlen m mindestens eine natürliche Zahl n (hier z.B. s + 1), die größer als m ist, und damit ist $\mathbb{R}$ archimedisch.

9 Ausblick

In der Einleitung haben wir $\sqrt{2}$ betrachtet, und gemerkt, dass sie keine rationale Zahl ist. Dies lässt sich einfach auf alle weiteren positiven rationale Zahlen erweitern, wobei nur die Quadrate von rationalen Zahlen rationale Wurzeln besitzen.

Doch der dedekind'sche Schnitt für -1, also $\{a \mid a^2 > -1\}$, ist gleich $\mathbb{Q}$, da dass Quadrat einer rationalen Zahl nie negativ sein kann. Wir können an dieser Stelle auch nicht einfach wieder 'dedekind'sche Schnitte' über den reellen Zahlen bilden, da die reellen Zahlen ebenfalls die Eigenschaft besitzen, dass ihr Quadrat immer postitiv ist.

(An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Konstruktion von dedekind'schen Schnitten über $\mathbb{R}$ gar keine neuen Zahlen konstruiert)

Wir wollen also eigentlich neue Zahlen konstruieren, für die Wurzeln auf beliebige Zahlen, nicht nur positive, definiert sind.

Durch die Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus der Potenzmenge der rationalen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, welche 'ja größer sein sollte' als die rationalen Zahlen selbst (Satz von Cantor), stellt sich die Frage, ob die reellen Zahlen 'größer' als die rationalen Zahlen sind.

Ein weiteres Anliegen an dieser Stelle könnte es sein, weitere mathematische Operationen auf den reellen Zahlen zu definieren (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, ...), und für diese dann auch die verschiedenen Rechenregeln zu beweisen.

10 Literaturverzeichnis

- Courant, R. and Robbins, H. 'Alternative Methods of Defining Irrational Numbers. Dedekind Cuts.', 2. Auflage, S. 71f

- http://www.math.columbia.edu/ harris/2000/2016Dedcuts.pdf, zuletzt abgerufen am 26.10.2021

- Dedekind Cuts. Brilliant.org. Abgerufen am 3.11.2021, 9:30, https://brilliant.org/wiki/dedekind-cuts/

- Prof. Dr. Siegfried Echterhoff: 'Ergänzung zur Vorlesung Analysis I WS08/0, Konstruktion von $\mathbb{R}$', https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Konstruktion_reelle_Zahlen.pdf, zuletzt abgerufen am 23.10.2021

- Uwe Storch, Hartmut Wiebe: 'Grundkonzepte der Mathematik: Mengentheoretische, algebraische, topologische Grundlagen sowie reelle und komplexe Zahlen', Springer Spektrum Verlag, 2017

- Alexander Toller, Dennis Chen, Freya Edholm: 'Proofs in Competition Math: Vol. 1', Version 1.1, Unabhängig veröffentlicht, 2019

- Richard Dedekind, 'Stetigkeit und Irrationale Zahlen', Vieweg+Teubner Verlag, 1960

Ich erkläre hiermit, dass ich die Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

...., den ....
Ort Datum

....
Unterschrift des Verfassers