

**Hans-Sachs-Gymnasium Nürnberg**

**Oberstufenjahrgang 2020/2022**

Seminarfach Mathematik

Seminararbeit

**Reelle Zahlen und ihre Arithmetik in der Darstellung der  
dedekind'schen Schnitte**

Verfasser: Lukas Bilstein

Kursleiter: OStR Dr. Dennis Simon

Bewertung der Arbeit: \_\_\_\_\_

Bewertung der Präsentation: \_\_\_\_\_

Unterschrift Kursleiter: \_\_\_\_\_

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Unvollständigkeit der rationale Zahlen</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Näherung von <math>\sqrt{2}</math></b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Formale Definition Dedekind'scher Schnitte</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Begriffsdefinitionen</b>	<b>4</b>
4.1	Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Ordnung in den reellen Zahlen</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Der Körper der reellen Zahlen</b>	<b>6</b>
6.1	Addition dedekind'scher Schnitte . . . . .	6
6.1.1	Kommutativität und neutrales Element . . . . .	7
6.1.2	Assoziativität . . . . .	7
6.1.3	Inverse Element und Subtraktion . . . . .	8
6.1.4	Addition zweier rationaler Zahlen als dedekind'sche Schnitte .	8
6.2	Multiplikation dedekidsch'scher Schnitte . . . . .	9
6.2.1	Multiplikation mit -1 ist gleich Inversion . . . . .	9
6.2.2	Assoziativität . . . . .	10
6.2.3	Neutrales Element . . . . .	10
6.2.4	Inverse Element und die Division . . . . .	11
6.2.5	Multiplikation zweier positiven rationalen Zahlen als dede- kind'sche Schnitte . . . . .	11
6.3	Distributivität . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Abgrenzung zu den rationalen Zahlen</b>	<b>14</b>
7.1	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Der Archimedische Körper der reellen Zahlen</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>16</b>
<b>10</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>17</b>

# 1 Unvollständigkeit der rationale Zahlen

In unserer Entdeckungsreise durch die Welt der Zahlen haben wir immer wieder festgestellt, dass unsere bisherigen Zahlen nicht ausreichen, um unsere Probleme zu lösen.

Im Zuge einer anderen Idee, die Mathematik auf Basis einiger Axiome aufzubauen, haben wir bisher verschiedene Zahlenmengen konstruiert. Aber wir stehen wieder vor einem Problem, wie es schon die Division in den ganzen Zahlen darstellt. Diesmal ist es die Wurzelfunktion. Die Gleichung  $a^2 = a * a = 2$  hat keine Lösung in den rationalen Zahlen (Auch wenn wir die Schreibweise  $\sqrt{2}$  kennen.).

Beweis: Gibt es eine rationale Zahl  $q$  mit  $q = \frac{m}{n}$ , sodass  $q = \sqrt{2}$ , so müsste gelten:

$$q = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Also muss entweder  $m^2$  oder  $n^2$  ungerade viele 2-er in der Primzahlenzerlegung enthalten, was aber unmöglich ist, da Quadratzahlen Primfaktoren immer gerade oft enthalten.

Damit kann es keine rationale Zahl  $q$  geben, die die obige Gleichung erfüllt.

Weiterhin gibt es in den rationalen Zahlen  $q$  für die Gleichung  $x^2 = q$  nur für die  $q$  Lösungen, die der Form  $q = x'^2$  mit  $x' \in \mathbb{Q}$  sind.<sup>1</sup>

## 2 Näherung von $\sqrt{2}$

Wir können aber klar definieren, welche rationalen Zahlen kleiner bzw. größer als  $\sqrt{2}$  sind:

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \vee q^2 < 2\}$$

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 > 2\}$$

An dieser Stelle müssen wir die Bedingung  $n > 0$  bzw.  $n < 0$  einfügen, da  $n^2 = 2$  zwei Lösungen besitzt, an dieser Stelle aber nur die Positive gesucht ist.

Beide Mengen sind klar definiert, enthalten aber weder gemeinsame Elemente noch  $\sqrt{2}$ . (Da diese keine rationale Zahl ist)

Wir wollen im folgendem die zweite dieser Mengen als Dedekind'scher Schnitt bezeichnen, also die Menge aller rationalen Zahlen, die größer als  $\sqrt{2}$  sind.

---

<sup>1</sup>An dieser Stelle ist für beide kein solcher Beweis angefügt, aber der Beweis für  $\sqrt{2}$  lässt sich auf beliebige  $q$  erweitern.

### 3 Formale Definition Dedekind'scher Schnitte

1. Ein Dedekind'scher Schnitt  $r$  ist eine nicht-leere Teilmenge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , also ein Element der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ , welche nach unten beschränkt ist, (Vgl. Begriffsdefinition im nachfolgendem Teil) und weder leer (noch gleich den rationalen Zahlen selbst, was aber aus der Beschränktheit folgt) ist.
2. Es muss gelten:  $\forall a \in r : \forall b \in \mathbb{Z} : b \geq a \Rightarrow b \in r$ , d.h. für eine rationale Zahl in einem dedekind'schen Schnitt müssen alle größeren rationalen Zahlen auch enthalten sein, sodass der dedekind'sche Schnitt keine 'Lücken' hat (Man spricht: 'r ist dicht').
3. Für einen dedekind'schen Schnitt  $r$  gibt es keine rationale Zahl  $q$ , für die  $q \in r$  und  $\forall x \in r : q \leq x$ , also  $r$  besitzt keine kleinste rationale Zahl.<sup>2</sup>

Wir definieren nun die Menge  $\mathbb{R}$  als die Menge aller dedekind'schen Schnitten, also der Menge aller Elemente der Potenzmenge der rationalen Zahlen, für die obige drei Eigenschaften gelten.

Anmerkung:

Je nach Literatur wird ein dedekidsch'scher Schnitt auch als eine nach oben beschränkte Teilmenge beschrieben, welche kein größtes Element besitzt, oder auch als geordnetes Paar beider Mengen. Der einfachhalthalber verwende ich im folgenden nur die obige Definition.

### 4 Begriffsdefinitionen

Zu einer Teilmenge  $m$  einer geordneten Menge  $M$ , wie sie die Menge der rationalen Zahlen darstellt, kann es obere und untere Schranken geben.

Eine obere Schranke  $s$  ist ein Element aus  $M$ , für das alle Elemente aus  $m$  kleiner als  $s$  sind.

Eine untere Schranke analog für das alle Element aus  $m$  größer als  $s$  sind.

Besitzt  $M$  eine Schranke, spricht mann dass  $M$  nach der jeweiligen Seite beschränkt ist.

Weiterhin ist das Supremum die kleinste obere Schranke, und das Infimum die größte untere Schranke einer Menge  $m$ .

---

<sup>2</sup>Nicht zu verwechseln mit 'r ist nach unten unbeschränkt'. Wir finden zwischen allen Elementen aus  $r$  und jeder beliebigen unteren Schranke von  $r$  beliebig viele Zahlen aus  $r$ , und nicht alle Elemente aus  $\mathbb{Q}$ , die kleiner als ein Element aus  $r$  sind, sind wieder in  $r$ .

## 4.1 Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen

Wir wollen eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, die jeder rationalen Zahl  $q$  einen Dedekind'schen Schnitt  $r$  zuordnet. Wir werden diese Funktion später noch benötigen.

Eine solche Funktion ist:

$$r = \{x > q \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

Das Infimum eines solchen Schnittes ist die rationale Zahl selbst, die diesen Schnitt beschreibt.

## 5 Ordnung in den reellen Zahlen

Seien  $a$  und  $b$  zwei Dedekind'sche Schnitte. Wir definieren

$$A > B := A \subset B$$

Und weiterhin  $a < b := b > a$ ,  $a \geq b := \neg(a < b)$  und  $a \leq b := \neg(a > b)$ .

Diese Gleichung sollte idealerweise auch für zwei Schnitte, die rationalen Zahlen repräsentieren, gelten:

Sei  $a, b \in \mathbb{Q}$  mit  $a > b$ , und  $A$  und  $B$  die beiden Dedekind'schen Schnitte von  $a$  und  $b$ .

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} A > B &\Leftrightarrow \{q \in \mathbb{Q} \mid q > a\} \subset \{q \in \mathbb{Q} \mid q > b\} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A) \end{aligned}$$

Für den ersten Teil nehmen wir an,  $x'$  sei  $\in A$ , aber nicht  $\in B$ . Dafür müsste  $x' > a$ , aber  $\leq b$  sein, was aber unmöglich ist, da  $a > b$ .

Für den anderen Teil nehmen wir  $y = a$  und erhalten, dass  $a$  nicht in  $A$  enthalten ist, aber in  $B$  enthalten sein muss.

Damit ist die Ordnung zweier Schnitte zweier rationaler Zahlen die gleiche wie in den rationalen Zahlen selbst.

## 6 Der Körper der reellen Zahlen

Ein Körper  $K$  ist ein System aus einer Menge  $M$ , und zwei Funktionen  $‘+’ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $‘*’ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir schreiben für  $+(a, b)$  auch  $a + b$  und analog für  $*(a, b)$  auch  $a * b$ .

Für die Operationen  $‘+’$  und  $‘*’$  muss jeweils gelten, dabei ist  $\emptyset$  ein operationsspezifisches neutrales Element:

- $\forall x, y, z \in M : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$  (Assoziativität)
- $\forall x, y \in M : x \oplus y = y \oplus x$  (Kommutativität)
- $\exists x \in M : \forall y \in M : x \oplus y = y$  (Existenz eines neutralen Elements, hier  $x$ )
- $\forall x \in M : \exists y \in M : x \oplus y = \emptyset$  (Existenz einer Inversen)

Und Operationsübergreifend:

- $\forall x, y, z \in M : (x + y) * z = (x * z) + (y * z)$  (Distributiv)

All diese sollen im folgenden für unser konstruiertes  $\mathbb{R}$  bewiesen werden.

### 6.1 Addition dedekind'scher Schnitte

Wir definieren zunächst die Addition folgendermaßen:

$$a + b := \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\}^3$$

Wir müssen zunächst beweisen, dass  $a + b$  tatsächlich ein dedekind'scher Schnitt ist.

$a + b$  ist nicht leer, da  $a + b$  alle Kombinationen aus  $a$  und  $b$  enthält, und  $a$  und  $b$  nicht leer sind.

$a + b$  enthält nicht alle rationalen Zahlen, da die Zahl  $\text{UntereSchranke}(a) + \text{UntereSchranke}(b) - 1$  nicht in  $a + b$  enthalten sein kann, da dafür ein Element kleiner als das Infimum in  $a$  oder  $b$  enthalten sein müsste, was aber nach der Definition unmöglich ist.

$a + b$  hat auch keine Lücken:

Sei  $m$  eine Zahl aus dem Schnitt  $a + b$  und  $n$  eine Zahl die größer als  $m$  ist, aber nicht in  $a + b$  enthalten ist. Sei  $x \in a$  und  $y \in b$ , sodass  $x + y = m$ . Da  $a$  neben  $x$  auch die Zahl  $x + (n - m)$  enthalten muss, muss auch  $x + (n - m) + y$  in  $a + b$  enthalten sein. Ersetzen von  $x + y$  durch  $m$  ergibt  $n - m + m = n$ , was bedeutet, dass  $n$  auch in  $a + b$  enthalten sein muss, was aber im Widerspruch zu unser Annahme steht.

---

<sup>3</sup>Vgl. Richard Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen, S. 17ff

$a + b$  hat weiterhin kein kleinstes Element:

Sei  $x + y$  das kleinste Element in  $a + b$ . Sei weiterhin  $x'$  ein Element aus  $a$ . Sei  $y' = x + y - x'$ . Diese Zahl kann nicht  $\in b$  sein, da sonst  $x' + y' > x + y \Leftrightarrow y' > x + y - y'$ . Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass  $x + y \in a + b$ , da per Definition der Addition nur solche Elemente in  $a + b$  enthalten sind, für die  $x \in a$  und  $y \in b$ .

### 6.1.1 Kommutativität und neutrales Element

Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität der rationalen Zahlen:

$$\begin{aligned} a + b &= \{x + y \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ &= \{y + x \mid x \in a \wedge y \in b\} = \\ &= \{y + x \mid y \in b \wedge x \in a\} = \\ &= b + a \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist die Menge  $\{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$ . Bei Addition kommen nur Elemente größer-gleich der ursprünglichen Elemente heraus, und damit bleibt der dedekind'sche Schnitt identisch.

Durch das  $\geq$  ist das Ergebnis nach unten Beschränkt, hat aber immer noch kein kleinstes Element.

### 6.1.2 Assoziativität

Wir können  $A + (B + C)$  schreiben als:

$$\{a + d \mid a \in A \wedge d \in \{b + c \mid b \in B \wedge c \in C\}\}$$

Was wir umschreiben dürfen als:

$$\{a + b + c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

Und weiterhin:

$$\begin{aligned} &\{d + c \mid d \in \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\} \\ &= \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} + C = (A + B) + C \end{aligned}$$

### 6.1.3 Inverse Element und Subtraktion

Wir schreiben das Inversum von  $A$  als  $-A$  und definieren es als:

$$A^- := \{b \in \mathbb{Q} \mid a + b > 0 \wedge a \in A\}$$

Die Menge ist nicht-leer, da  $a + b > 0$  in den rationalen Zahlen immer Lösungen besitzt.

Aus gleichem Grund ist die Menge nicht gleich den rationalen Zahlen, da es für obige Gleichung rationale Zahlen gibt, die diese nicht erfüllen.

Doch das Inversum kann ein kleinstes Element haben. In diesem Fall müssen wir dieses Element ausschließen, und wir definieren also:

$$-A := \begin{cases} A^- & \text{wenn } A^- \text{ kein kleinstes Element hat} \\ A^- \setminus x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Subtraktion ist wie üblich Definiert mit:  $A - B := A + (-B)$

Weiterhin ist damit der Betrag eines dedekind'schen Schnittes (nicht die Mengengröße!) definiert als:

$$|A| := \begin{cases} A & \text{wenn } A \geq 0 \\ -A & \text{sonst} \end{cases}$$

### 6.1.4 Addition zweier rationaler Zahlen als dedekind'sche Schnitte

Seien  $a$  und  $b$  zwei rationale Zahlen, und  $A$  und  $B$  ihre dedekind'schen Schnitte.

Wir können  $A + B$  schreiben als:

$$\{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Oder auch:

$$\begin{aligned} &= \{x + y \mid x, y \in \mathbb{Q} \wedge x > a \wedge y > b\} = \\ &= \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > (a + b)\} = \text{schnitt}(a + b) \end{aligned}$$

Damit ist die Addition gleich der der rationalen Zahlen.



## 6.2 Multiplikation dedekindscher Schnitte

Wir definieren  $A \times B$  für zwei positive dedekindsche Schnitte A und B folgendermaßen:

$$A \times B := \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Diese Menge ist wieder nicht-leer, da sie wieder die Kombinationen zweier nicht-leerer Mengen enthält.

Sie ist nicht identisch zu den rationalen Zahlen, da sie nur positive Elemente enthalten kann.

Sie hat kein kleinstes Element, da weder A noch B ein kleinstes Element haben. Das Infimum von  $A \times B$  ist das Produkt der Infima von A und B, es ist aber nicht in  $A \times B$  enthalten. Wir können aber beliebig nahe Zahlen an diese Infimum konstruieren.

Wir können nun die Multiplikation wie folgend mithilfe obiger  $\times$ -Operation definieren, dafür verwenden wir folgende Fallunterscheidung:

$$A * B := \begin{cases} A \times B & \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } B \geq 0 \\ -A \times -B & \text{wenn } A < 0 \text{ und } B < 0 \\ -(-A \times B) & \text{wenn } A < 0 \text{ und } B \geq 0 \\ -(A \times -B) & \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } B < 0 \end{cases}$$

Die Kommutativität für positive Schnitte ist wie bei der Addition klar ersichtlich aus der Kommutativität der rationalen Zahlen. Ein Vorzeichen ändert daran nichts, da dieses in der eigentlichen Berechnung nicht verwendet wird.

### 6.2.1 Multiplikation mit -1 ist gleich Inversion

Sei  $D = (-1) * A$ , wobei D, -1 und A drei dedekindsche Schnitte sind, und a positiv. Es gilt:

$$D = -(|-1| * A) = -(1 * A) = -\{x * a \mid x \in Schnitt(1) \wedge a \in A\}$$

Der Schnitt zu 1 enthält nur solche Elemente, die größer als 1 sind, aber beliebig nahe an 1. Also entstehen bei  $x * a$  nur solche Zahlen, die größer-gleich a sind. Damit bleibt der dedekindsche Schnitt D identisch, und damit ist das ganze gleich dem gesuchten Wert  $-A$ .

### 6.2.2 Assoziativität

Seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  drei dedekind'sche Schnitte, und  $d = (a * b) * c$ . Der Einfachheit halber seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  zunächst positiv.

Wir können  $d$  schreiben als:

$$d = \{m * n \mid m \in \{x * y \mid x \in a \wedge y \in b\} \wedge n \in c\}$$

Und durch Vereinfachung:

$$d = \{(x * y) * n \mid (x \in a \wedge y \in b) \wedge n \in c\}$$

Und weiterhin:

$$d = \{x * y * n \mid x \in a \wedge y \in b \wedge n \in c\}$$

Was sich umformen lässt zu:

$$d = \{x * m \mid x \in a \wedge m \in \{y * n \mid y \in b \wedge n \in c\}\}$$

Auf dem selben weg kommen wir zur geforderten Gleichung  $d = a * (b * c)$ .

Wenn  $c$  '-1' ist, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} d &= -1 * (a * b) = -(a * b) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q + x > 0 \wedge x \in a * b\} = \\ &= \{q \in \mathbb{Q} \mid q + x * y > 0 \wedge x \in a \wedge y \in b\} = \\ &= \{\} \end{aligned}$$

### 6.2.3 Neutrales Element

Das neutrale Element der Multiplikation ist die '1', also  $\{q > 1 \mid q \in \mathbb{Q}\}$

Dabei ist klar, dass für einen positiven Schnitt  $a$  bei Multiplikation mit 1 für jedes Element aus  $a$  nur Elemente größer-gleich demselben entstehen, und damit keine kleineren Elemente dazukommen, sodass der Schnitt gleich bleibt.

### 6.2.4 Inverse Element und die Division

Wir definieren:

$$a^* := \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$$

$a^*$  ist nicht-leer und enthält nicht alle Elemente der rationalen Zahlen.

Aber wir stellen fest, dass diese Menge ein kleinstes Element haben kann.

Wir definieren also  $a^{-1}$  als:

$$a^{-1} := \begin{cases} \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} & \text{wenn diese kein kleinstes Element hat} \\ \{y \mid x * y > 1 \wedge x \in a \wedge y \in \mathbb{Q}\} \setminus \{\text{kleinstes Element}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Und weiterhin definieren wir die Division mithilfe:

$$a \div b := a * b^{-1}$$

### 6.2.5 Multiplikation zweier positiven rationalen Zahlen als dedekind'sche Schnitte

Seien  $a$  und  $b$  zwei rationale Zahlen und  $A$  und  $B$  ihre dedekind'schen Schnitte.

Wir können  $A * B$  schreiben als:

$$\begin{aligned} & \{x * y \mid x \in A \wedge y \in B\} = \\ & = \{x * y \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x > a \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge y > b\} = \\ & = \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > (a * b)\} = \text{schnitt}(a * b) \end{aligned}$$

Damit ist die Multiplikation gleich der in den rationalen Zahlen.

### 6.3 Distributivität

Wir betrachten im folgenden den Term  $(A + B) * C$ . Dafür unterscheiden wir verschieden Fälle der Vorzeichen von A, B und C.

a)  $A, B, C \geq 0$

Wir setzen unsere Definitionen ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (A + B) * C &= \{x * c \mid x \in \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \wedge c \in C\} = \\
 &= \{(a + b) * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} =^4 \\
 &= \{a * c + b * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} = \\
 &= \{x + y \mid x \in \{a * c \mid a \in A \wedge c \in C\} \wedge \{b * c \mid b \in B \wedge c \in C\}\} = \\
 &= (A * C) + (B * C)
 \end{aligned}$$

b)  $A, B \geq 0 \wedge C < 0$

Wir substituieren  $C = -C'$  und erhalten:

$$= (A + B) * (-1) * C' = (-1) * ((A + B) * C') = (-1) * (AB + AC') =$$

Wir setzen nun  $A' = AC'$  und  $B' = BC'$  und erhalten mit Substitution der Inversionsformel:

$$\begin{aligned}
 &= \{b \in \mathbb{Q} \mid x + b > 0 \wedge x \in (A' + B')\} = \\
 &= \{b \in (Q) \mid a' + b' + b > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} = \\
 &= \{b_1 + b_2 \in \mathbb{Q} \mid a' + b_1 > 0 \wedge b' + a_2 > 0 \wedge a' \in A' \wedge b' \in B'\} =
 \end{aligned}$$

Bei Aufspaltung durch die Rechenregeln dedekind'scher Schnitte:

$$= \{b_1 \in \mathbb{Q} \mid a' + b_1 > 0 \wedge a' \in A'\} + \{b_2 \in \mathbb{Q} \mid b' + b_2 > 0 \wedge b' \in B'\} =$$

Und Verwendung der Inversionsformel:

$$= (-A') + (-B') = A * (-C') + B * (-C')$$

Und resubstituiert  $-C' = C$  die geforderte Formel  $AC + BC$

---

<sup>4</sup>Diese Umformung nimmt an, dass  $\{f(x) \mid x \in \{g(x) \mid x \in A\}\} = \{f(g(x)) \mid x \in A\}$  ist, was ich an dieser Stelle nicht beweise.

c)  $A < 0 \wedge B, C \geq 0 \wedge A + B \geq 0$

Folgendes gilt auch, wenn A und B getauscht werden (Kommutativität der Addition).

Aufgrund der Bedingung  $|A| < |B|$  muss  $(-A + B) > 0$  sein.

Wir substituieren  $A = -A'$  und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (-A' + B) * C &= \{c * x \mid c \in C \wedge x \in \{a + b \mid a \in -A' \wedge b \in B\}\} = \\
 &= \{c * (a + b) \mid c \in C \wedge a \in -A' \wedge b \in B\} = \\
 &= \{a * c + b * c \mid c \in C \wedge a \in -A' \wedge b \in B\} = \\
 &= \{a * c \mid a \in -A' \wedge c \in C\} + \{b * c \mid b \in B \wedge c \in C\} = \\
 &= -A' * C + B * C
 \end{aligned}$$

Und mit Resubstituiert  $A' = -A$ :  $A * C + B * C$

d)  $A, C < 0 \wedge B \geq 0 \wedge A + B \geq 0$

Wir substituieren  $A = -A'$  und  $C = -C'$ :

$$\begin{aligned}
 (-A' + B) * (-C') &= -1 * ((-A' + B) * C') = -1 * (AC' + BC') = \\
 &= -AC' + (-BC') = AC + BC
 \end{aligned}$$

e)  $A < 0 \wedge B, C \geq 0 \wedge A + B < 0$

$$\begin{aligned}
 (A + B) * C &= -\{x * c \mid x \in -(A + B) \wedge c \in C\} = \\
 &= -\{(-a + -b) * c \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} =
 \end{aligned}$$

Der innere Teil stellt  $((-A) + (-B)) * C$  dar.  $(-A) + (-B)$  ist aber  $> 0$ , also dürfen wir es umschreiben als:  $-AC + (-BC)$ .

Das ‘-‘ können wir nun auf beide Terme aufteilen, und erhalten das gesuchte  $AC + BC$

f)  $A, C < 0 \wedge B \geq 0 \wedge A + B < 0$

$$(A + B) * (-C') = -((A + B) * C') = -(AC' + BC') = AC + BC$$

g)  $A, B < 0 \wedge C \geq 0$

Wir substituieren  $A = -A'$  und  $B = -B'$ :

$$((-A') + (-B')) * C$$

Unter Verwendung der Umkehrung der Distributivität mit  $A, B > 0$  und  $C < 0$  ergibt sich daraus:

$$((A' + B') * (-1)) * C = (A' + B') * (-C) = -A'C + (-B'C) = AC + BC$$

**h)**  $A, B, C < 0$

$$= (A + B) * (-C') = -((A + B) * C') = -(AC' + BC') = AC + BC$$

Damit ist unser Körper wirklich ein Körper.

## 7 Abgrenzung zu den rationalen Zahlen

Nachdem wir anfangs herausgefunden hatten, dass Zahlen wie  $\sqrt{2}$  keine rationalen Zahlen sind, stellt sich die Frage, ob wir diese Eigenschaft nicht mathematisch festhalten können.

Dafür betrachten wir unser Beispiel, den dedekind'schen Schnitt zu  $\sqrt{2}$ . Diese Menge besitzt kein Infimum, da die Zahl  $\sqrt{2}$ , welche nicht Teil des dedekind'schen Schnittes ist, keine rationale Zahl ist, sich aber beliebig annähern lässt, und somit zu jeder rationalen Zahl kleiner als  $\sqrt{2}$  eine existiert, die näher an  $\sqrt{2}$  ist.

Wir definieren darauf den Begriff der Vollständigkeit<sup>5</sup>:

Eine geordnete Menge  $M$  ist genau dann Vollständig, wenn alle Teilmengen von  $M$ , die nach unten beschränkt sind, ein Infimum in  $M$  besitzen.

Für die Menge  $\mathbb{Q}$  ist der Schnitt  $\sqrt{2}$ , der eine Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  ist, ein Gegenbeispiel. Also ist  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig.

### 7.1 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Sei  $M$  eine nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , und  $C \in \mathbb{R}$  eine untere Schranke von  $M$ .

Sei

$$I = \bigcup_{a \in M} a \subseteq M$$

---

<sup>5</sup>Eine alternative, gleichbedeutende Definition der Vollständigkeit durch Cauchy Folgen lässt sich finden unter: 'Proofs in Competition Math: Vol. 1', S. 107f

$I$  ist eine Teilmenge von  $\mathbb{Q}$ : Sei  $n \in I$  eine Zahl  $\notin \mathbb{Q}$ . Nach der Definition der Schnittmenge muss mindestens ein  $a \in M$  geben, für dass  $n \in a$ , was aber unmöglich ist, da  $a$  selbst eine Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  ist.

Da alle Elemente aus  $M$  dicht sind, muss  $I$  ebenfalls dicht sein.

$I$  besitzt weiterhin kein kleinstes Element:

Sei  $i$  das kleinste Element aus  $I$ . Nach der Definition der Vereinigungsmenge existiert mindestens ein  $a \in M$  für das  $i \in a$ .  $i$  kann aber nicht das kleinste Element aus  $a$  sein, da  $a$  ein Dedekind'scher Schnitt ist. Damit muss es ein  $j \in a$  geben, was kleiner als  $i$  ist. Das aber müsste auch in  $I$  enthalten sein, was aber unmöglich ist, da  $i$  das kleinste Element aus  $I$  sein soll.

$I$  ist nach unten beschränkt, da alle Elemente aus  $M$  nach unten beschränkt sind, und somit ein  $u \in \mathbb{Q}$  existieren muss, dass eine untere Schranke für alle  $a \in M$  ist.

Also ist  $I$  wieder ein Dedekind'scher Schnitt.

Es gilt  $I \leq a$  für alle  $a \in M$ , da  $\forall m \in M : m \subseteq I$ . (Eigenschaften der Vereinigungsmenge)

Durch die Definition von  $I$  folgt, dass  $I$  eine Teilmenge von  $C$  ist, und damit alle  $C$  kleiner als  $I$ . Damit ist  $I$  die größte untere Schranke der Menge  $M$ .

Damit ist  $\mathbb{R}$  vollständig, da mit obigen Konstruktion allen reellen Zahlen ein Infimum,  $I$ , zugewiesen werden können.

## 8 Der Archimedische Körper der reellen Zahlen

Ein geordneter Körper  $M$  ist dann archimedisch, wenn für alle  $x, y > 0 \in M$  eine natürliche Zahl  $n$  existiert, sodass  $nx > y$  ist.<sup>6</sup>

Definiert  $M$  die Umkehrung der Multiplikation, so reicht es zu beweisen, dass  $n > \frac{y}{x}$ , oder auch  $n > x'$  für ein  $x' \in M$ .

Also ist ein geordneter Körper  $M$ , in dem die Division definiert ist, dann archimedisch, wenn für alle seiner Elemente  $m$  eine natürliche Zahl  $n$  existiert, die größer als  $m$  ist.

Zunächst benötigt  $M$  eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ , welche einer natürlichen Zahl ein Element aus  $M$  zuordnet.

Diese Funktion sollte die Elemente zurückgeben, sodass die Ordnung erhalten bleibt, also  $a, b \in \mathbb{R} \wedge a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$

---

<sup>6</sup>Vgl. 'Proofs in Competition Math: Vol. 1', S. 108

Für die reellen Zahlen ist eine solche Funktion die folgende:

$$f : n \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q > n\}$$

Sei nun  $N$  die Menge aller natürlicher Zahlen kleiner als  $m$  sind, also

$$N = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq m\}$$

Sei  $s$  nun das Supremum von  $N$ . Es muss gelten:  $f(s) \leq m$ . Aber auch  $f(s+1) \geq m$  und ferner  $f(s+2) > m$ , da sonst  $s+1$  auch Teil von  $N$  sein müsste.

Somit gibt es zu jeder reellen Zahlen  $m$  mindestens eine natürliche Zahl  $n$  (hier z.B.  $s+1$ ), die größer als  $m$  ist, und damit ist  $\mathbb{R}$  archimedisch.

## 9 Ausblick

In der Einleitung haben wir  $\sqrt{2}$  betrachtet, und gemerkt, dass sie keine rationale Zahl ist. Dies lässt sich einfach auf alle weiteren positiven rationale Zahlen erweitern, wobei nur die Quadrate von rationalen Zahlen rationale Wurzeln besitzen.

Doch der dedekind'sche Schnitt für  $-1$ , also  $\{a \mid a^2 > -1\}$ , ist gleich  $\mathbb{Q}$ , da das Quadrat einer rationalen Zahl nie negativ sein kann. Wir können an dieser Stelle auch nicht einfach wieder 'dedekind'sche Schnitte' über den reellen Zahlen bilden, da die reellen Zahlen ebenfalls die Eigenschaft besitzen, dass ihr Quadrat immer positiv ist.

(An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Konstruktion von dedekind'schen Schnitten über  $\mathbb{R}$  gar keine neuen Zahlen konstruiert)

Wir wollen also eigentlich neue Zahlen konstruieren, für die Wurzeln auf beliebige Zahlen, nicht nur positive, definiert sind.

Durch die Konstruktion der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  aus der Potenzmenge der rationalen Zahlen  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ , welche 'ja größer sein sollte' als die rationalen Zahlen selbst (Satz von Cantor), stellt sich die Frage, ob die reellen Zahlen 'größer' als die rationalen Zahlen sind.

Ein weiteres Anliegen an dieser Stelle könnte es sein, weitere mathematische Operationen auf den reellen Zahlen zu definieren (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, ...), und für diese dann auch die verschiedenen Rechenregeln zu beweisen.



## 10 Literaturverzeichnis

- Courant, R. and Robbins, H. ‘Alternative Methods of Defining Irrational Numbers. Dedekind Cuts.’, 2. Auflage, S. 71f
- <http://www.math.columbia.edu/harris/2000/2016Dedcuts.pdf>, zuletzt abgerufen am 26.10.2021
- Dedekind Cuts. Brilliant.org. Abgerufen am 3.11.2021, 9:30, <https://brilliant.org/wiki/dedekind-cuts/>
- Prof. Dr. Siegfried Echterhoff: ‘Ergänzung zur Vorlesung Analysis I WS08/0, Konstruktion von  $\mathbb{R}$ ’, [https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Konstruktion\\_reelle\\_Zahlen.pdf](https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Konstruktion_reelle_Zahlen.pdf), zuletzt abgerufen am 23.10.2021
- Uwe Storch, Hartmut Wiebe: ‘Grundkonzepte der Mathematik: Mengentheoretische, algebraische, topologische Grundlagen sowie reelle und komplexe Zahlen’, Springer Spektrum Verlag, 2017
- Alexander Toller, Dennis Chen, Freya Edholm: ‘Proofs in Competition Math: Vol. 1’, Version 1.1, Unabhängig veröffentlicht, 2019
- Richard Dedekind, ‘Stetigkeit und Irrationale Zahlen’, Vieweg+Teubner Verlag, 1960

*Ich erkläre hiermit, dass ich die Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.*

....., den .....  
Ort Datum

.....  
Unterschrift des Verfassers