**Reelle Zahlen und ihre Arithmetik**

**in der Darstellung Dedekind’scher Schnitte**

*von Lukas Bilstein*

1. Rationale Zahlen und ihre Unvollständigkeit

Die rationalen Zahlen (ℚ) sind eine Erweiterung der ganzen Zahlen (ℤ), eine Erweiterung der natürlichen Zahlen (ℕ). Es ist also nicht verwunderlich, dass es weitere Zahlen gibt, die nicht in den rationalen Zahlen dargestellt werden können.

Doch wie schauen diese Zahlen aus? Nehmen wir zum Beispiel . Die Eigenschaften der rationalen Zahlen ist es, dass sich jeder in der Form mit darstellen. Sei also .

Umgeformt:

Nach dem Satz, dass jede Quadratzahl jeden Faktor gerade oft enthält, kann es keine zwei Quadratzahlen und geben, die die obige Gleichung erfüllen

*[An dieser Stelle könnte ein genauerer Beweis folgen]*

Also ist keine rationale Zahl.

Ähnliches gilt für alle nicht-Quadratzahlen, und sogar alle nicht- für jeweils

*[Auch hier könnte ein Beweis stehen]*

Wir haben also unendlich viele Zahlen (sogar mehr, als es rationale Zahlen gibt), die keine rationalen Zahlen sind.

*[Vielleicht auch noch ein Beweis, dass auf dem Zahlenstrahl, und nicht ∞ ist, also nach oben und unten begrenzt ist]*

2. Die reellen Zahlen durch Annäherung

Wir können aber genau definieren, welche rationale Zahlen kleiner/größer sind als , nämlich . Es gibt zwar keine ganze Zahl, die gleich ist, aber wir können uns annähern.

Doch, wie lässt sich definieren. mag zwar sich als darstellen, aber es gibt noch viele weitere, die sich nicht so darstellen lassen.

*[Hier vielleicht ein Beispiel mit Beweis]*

Also kommen wir zu der Menge aller rationalen Zahlen kleiner als . Wir nennen diese Menge im folgendem *Dedekind’scher Schnitt von* .

3. Konstruktion Dedekind’scher Schnitte

Wir haben gesehen, dass der dedekind’sche Schnitt von eine Teilmenge von ℚ ist, einfach Aufgrund der Konstruktion durch . Es gibt einfach keine anderen Elemente, welche infrage kommen.

Das gleiche gilt für alle anderen dedekind’sche Schnitte, wie wir im folgendem durch die allgemeine Definition erarbeiten.

Sei ℝ die Menge aller dedekind’scher Schnitte.

Ein dedekind’scher Schnitt S ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

* S ist nicht-leer
* Sei a ein Element aus S, und b eine Zahl kleiner (?) als a, so ist auch b in S
* S hat kein kleinstes Element

*Formal:*

Sei ℝ nun die Menge der Zahlen, und die Elemente aus ℝ die reellen Zahlen selbst.

4. Ganze Zahlen als dedekind‘sche Schnitte

Einen neuen Zahlentyp zu definieren ist das eine. Aber wir wollen auch eine Konvertierung von ℚ gegen ℝ definieren, also eine Funktion .

Ähnlich wie bei verwenden wir dafür die Funktion . Das Resultat ist ein dedekind’scher Schnitt, also eine reelle Zahl. *[Hier vielleicht ein kurzer Beweis]*

5. Ordnung in den reellen Zahlen

Als nächsten Schritt wollen wir in die reellen Zahlen eine Ordnung bringen, also definieren, was eine Zahl größer/kleiner einer anderen macht.

Seien also A und B zwei reelle Zahlen.

Wir definieren „A = B“ := (A = B), also zwei reelle Zahlen sind dann gleich, wenn die dedekind’sche Schnitte, die sie repräsentieren, gleich sind. Da dedekind’sche Schnitte Mengen sind, können wir sie nach Axiom 1 auf Gleichheit überprüfen.

Im folgendem wollen wir überprüfen, ob A > B ist. Sei . Wenn das größte Element aus B kleiner ist als das aus A, gibt es Elemente in C, welche zwischen den beiden Maxima liegen [unteres inklusiv, oberes exklusiv]. Diese Elemente sind die rationalen Zahlen, die zwischen A und B „liegen“. Also wenn A > B, dann liegen rationale Zahlen dazwischen, damit ist C nicht leer.

Dazu muss aber auch bewiesen werden, dass es zu je zwei unterschiedlichen reellen Zahlen A und B eine rationale gibt, die dazwischen liegt. O.b.d.a. ist A > B. Wir betrachten nun die Zahl n, die die Stelle nach dem Komma angibt, an der sich A und B unterscheiden, wenn diese vor dem Komma liegt, also negativ. Diese gibt es, da A != B. Die Zahl, die die Ziffern von A bis zur n-ten nach dem Komma gefolgt von dem Durchschnitt der beiden nächsten Ziffern, wenn diese ungerade ist, der Durchschnitt \* 10, liegt zwischen den beiden Zahlen, da die n+1-te Ziffer von A größer als die n+1-ten Ziffern des Ergebnis größer als die n+1-te Ziffer von B ist [Der Durchschnitt zweier Zahlen liegt immer zwischen den beiden, solang sie nicht identisch sind]. Damit gibt es immer zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen rationale Zahle(n), damit ist die Menge C entweder für A > B oder B > A nicht gleich der leeren Menge. Damit lässt sich A > B definieren als:

*Anmerkung: Dies ist meine eigene Definition, welche ich mir selbst erarbeitet habe.*

Aus der obigen Definition lässt sich folgendes Definieren:

6. Beibehaltung der Ordnung beim Übergang von ℚ -> ℝ

Es gilt zu beweisen, dass für zwei rationale Zahlen p und q, mit p > q, und deren reelle Repräsentationen a und b auch a > b gilt. Damit wäre bewiesen, dass die Ordnung identisch zu der in Q ist.

*[todo]*

7. Addition in den reellen Zahlen

Seien A und B zwei reelle Zahlen. Wir definieren .

*[todo: Beweis von p, q, r rational mit p+q=r -> R(p)+R(q)=R(r)]*

8. Inverses Element zur Addition

Wir wollen nun das inverses Element zur Addition definieren. Es ist die Lösung für A bei gegebenen B in .

Sei b die größte Zahl in B (und damit . Damit ist . Damit ist . Das größte Element aus C ist das größte Element aus A + das größte Element aus B. Diese sind nach Definition b und -b, wobei die Summe damit 0 ist. *[todo: hier noch kurz, dass wirklich Schnitt entsteht]*

Wir Definieren das inverse Element zu A als -A.

Wir definieren des Weiteren

Noch zu schreiben:

* Die Definition für +, -, \*, /, …
* Verweis auf die Überabzählbarkeit (-> Sven)
* Verweis auf die komplexen Zahlen am Anfang (der nächste Schritt zur Erweiterung)
* Beweise zu „Rechenregeln“ wie Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, …
* Neutrales Element (0) Definition (-> -> frage denjenigen, der ℚ macht, ob er definiert)

Literaturverzeichnis

* <https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Analysis/AnalysisI/Skript/Konstruktion_reelle_Zahlen.pdf> [Zuletzt aufgerufen am 26.02.2021]
* <https://de.wikipedia.org/wiki/Dedekindscher_Schnitt> [Zuletzt abgerufen am 26.02.2021]
* <https://www.youtube.com/watch?v=_l6AWLD_Krs> [Zuletzt abgerufen am 26.02.2021]
* Unterrichtsskript des W-Seminars „Moderne Mathematik“