题目：课程资料整理

作者：数学强基 2301 刘欣楠

关键词：数学专业课、专业基础课、知识点、作业

Title:

Name:

Supervisor:

ABSTRACT

KEY WORDS: Wikipedia; Free encyclopedia; Winner; Good morning

目 录

Part I 抽象代数

这部分内容主要参考丘维声《近世代数》[2]

抽象代数定义及主要定理

绪论

定义 0.1

设 R 是一个非空集合, 在其上定义加法和乘法, 若满足下列性质

(1) (加法交换律) $a+b=b+a, \forall\, a,b \in R$.

(2) (加法结合律) $(a+b)+c=a+(b+c), \forall\, a,b,c \in R$.

(3) 存在**零元**, 记作 0.

(4) 存在**负元**, 记作 $-a$.

(5) (乘法结合律) $(ab)c=a(bc), \forall\, a,b,c \in R$.

(6) (乘法分配律) $a(b+c)=ab+ac, (b+c)a=ba+ca$.

则称 R 是一个**环**.

定义 0.2

如果环 R 中有一个元素 e 具有下述性质:

$$ea=ae=a, \quad \forall a \in R,$$

那么称 e 是 R 的**单位元**, 并称 R 是幺环.

定义 0.3

设 R 是幺环. 对于 $a \in R$, 如果存在 $b \in R$ 使得

$$ab=ba=e$$

, 那么称 a 是一个**可逆元** (或**单位**), b 称作 a 的**逆元**, 记作 a^{-1}.

定义 0.4

幺环 R 的所有单位关于 R 上的乘法构成一个群, 称之为 R 的**单位群**.

定义 0.5

设 R 是一个环. 对于 $a \in R$, 如果存在 $c \in R$ 且 $c \neq 0$, 使得 $ac=0$(或 $ca=0$), 那么称 a 是一个**左零因子** (或**右零因子**). 二者统称**零因子**.

定义 0.6

设 F 是交换幺环, 如果 F 中每个非零元素都是可逆元, 那么称 F 是一个**域**.

定义 0.7

设 G 是一个非空集合. 如果在 G 上定义了一个代数运算, 通常称作乘法, 并且满足:

(1) $(ab)c = a(bc)$, $\forall\, a, b, c \in G$ (结合律);

(2) G 中存在单位元 e.

(3) G 中每个元素都可逆.

那么称 G 是一个**群**.

定义 0.8

当群 G 中只有有限个元素时, 称 G 为**有限群**, 且元素个数称为 G 的阶, 记作 $|G|$. 否则称 G 是**无限群**.

注. 只有有限阶群才有群的阶, 做题时要注意题设条件.

第一章　群

§ 1.1　循环群

定义 1.1

设 G 是一个群, 如果 G 的每一个元素都能写成 G 的某个元素 a 的整数次幂的形式, 那么称 G 为**循环群**, 称 a 是 G 的一个**生成元**, 并记 $G = \langle a \rangle$.

定义 1.2

对于群 G 中元素 a, 如果存在最小的正整数 n, 使得 $a^n = e$. 则称 a 的**阶**为 n, 记作 $|a| = n$. 如果不存在这样的 n, 则称 a 是**无限阶元素**.

命题 1.1. 有限群 G 是循环群, 当且仅当 $\exists\, a \in G,\ s.t.\ |a| = |G|$.

命题 1.2. 设 $a \in G,\ |a| = n$ 则

$$a^m = e \Leftrightarrow n \mid m.$$

命题 1.3. 设 $a \in G,\ |a| = n$ 则

$$|a^k| = \frac{n}{(n,k)}.$$

命题 1.4. 若 $a, b \in G,\ ab = ba,\ |a| = n, |b| = m, (n,m) = 1$ 则 $|ab| = nm$.

命题 1.5. 设 G 是有限 Abel 群, 则 $\exists\, a \in G,\ s.t.\ \forall b \in G, |b| \big| |a|$.

定理 1.6

设 m 是大于 1 的整数, 则 $\mathbb{Z}_m^*$ 为循环群当且仅当 m 为下列情形之一:

$$2,\ 4,\ p^r,\ 2p^r,\quad \text{其中 } p \text{ 是奇素数},\ r \in \mathbb{N}^*$$

定理 1.7

有限域 F 的所有非零元组成的集合 F^* 对于乘法构成群, 且是循环群.

定义 1.3

群同构

命题 1.8. 设 σ 是 G 到 $\widetilde{G}$ 的一个群同构映射, 则

(1) $\sigma(e)=\widetilde{e}$.

(2) $\sigma(a^{-1})=\sigma(a)^{-1}$.

(3) $\sigma(a)$ 与 a 的阶相同.

定理 1.9

(1) 任意一个无限循环群都与 $(\mathbb{Z},+)$ 同构;

(2) 对于 $m>1$, 任意一个 m 阶循环群都与 $(\mathbb{Z}_m,+)$ 同构;

(3) 1 阶循环群都与加法群 $\{0\}$ 同构.

定理 1.10

设 m_1,m_2 是大于 1 的整数, 则 $(\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2},+)$ 是循环群当且仅当 $(m_1,m_2)=1$.

习题　1.1

1. 证明: 若 $\mathbb{Z}_m^*$ 是循环群, 则 $\mathbb{Z}_m^*$ 的生成元个数等于 $\varphi(\varphi(m))$.

证明. $|\mathbb{Z}_m^*|=\varphi(m)$, 设 a 是 $\mathbb{Z}_m^*$ 的生成元, 那么 $|a|=\varphi(m)$.
则有 $b=a^k\in\mathbb{Z}_m^*$ 是生成元 $\Leftrightarrow |a^k|=\varphi(m)\Leftrightarrow \dfrac{\varphi(m)}{(\varphi(m),k)}\Leftrightarrow(\varphi(m),k)=1$. □

2. 证明: 如果群 G 的阶为偶数, 那么 G 必有 2 阶元.

证明. 反设 G 中没有 2 阶元, 则对于 G 中每个个非单位元 a 都有 $a\neq a^{-1}$. 从而可以将 G 的元素和对应的逆元两两配对, 也即除去单位元后元素个数为偶数, 所以总个数为奇数矛盾. 故 G 中有 2 阶元. □

§ 1.2　图形的对称 (性) 群

定义 2.1

平面上 (或空间中) 的一个变换 σ 如果保持任意两点的距离不变, 那么称 σ 是平面上 (或空间中) 的一个**正交点变换** (或**保距变换**)(isometry).

定义 2.2

平面上 (或空间中) 的一个正交点变换 σ 如果使得图形 Γ 的像与自身重合, 那么称 σ 是图形 Γ 的**对称 (性) 变换**.

容易验证, Γ 的所有对称变换构成一个群, 称为**图形 Γ 的对称 (性) 群**.

我们一般用 τ 来表示图形关于直线反射 (轴对称) 的对称变换, 用 σ 来表示关于图形中心旋转得到的对称变换.

用 D_n 表示正 n 边形的对称群.

当 $n = 4$ 时, 正方形一共有四条对称轴对应 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, 且每转动 $90°$ 都重合对应着 $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma_4 = I$.

经过研究, $D_4 = \{I, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$. 同时 τ_i 也可以由 σ 和 τ_1 表示. 所以也可以把 D_4 简单的记作

$$D_4 = \langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^2 = I, (\tau\sigma)^2 = I \rangle.$$

类似的, 对于 D_n 也可以记作 $\langle \sigma, \tau | \sigma^n = \tau^2 = (\tau\sigma)^2 = I \rangle$.

由于 $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau = \sigma^{n-1}\tau \neq \sigma\tau$, 所以 D_n 是非 Abel 群.

我们称 D_n 为**二面体群**, 且有 $|D_n| = 2n$.

§ 1.3 n 元对称群

定义 3.1

对于非空集合 Ω, 设 S_Ω 是全部 Ω 到自身的双射构成的集合, 容易验证 S_Ω 是一个群, 我们称之为**全变换群** (full transformationm group).

特别的, 当 Ω 是有限集合时, 称 Ω 到自身的双射为 Ω 上的一个**置换** (permutation). 当 $|\Omega| = n$ 时, 称 Ω 上的置换为 n **元置换**, 并称 S_Ω 为 n **元对称群**, 记作 S_n.

定义 3.2

如果一个 n 元置换 σ 把 i_1 映成 i_2, 把 i_2 映成 $i_3, \cdots$, 把 i_r 映成 i_1, 并且保持其余元素不变, 那么称 σ 为 $r-$ **轮换**, 简称为**轮换**, 记作 $(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r)$.

特别地, 当 $r = 2$ 时, 也称为**对换**. 恒等映射 I 记作 (1).

如果两个轮换之间没有公共元素, 则称它们**不相交**.

性质 3.1.

$$(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r)^{-1} = (i_r i_{r-1} \cdots i_2 i_1). \tag{1.1}$$

$$(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \cdots (i_1 i_3)(i_1 i_2). \tag{1.2}$$

$$(ij) = (1i)(1j)(1i). \tag{1.3}$$

定理 3.2

S_n 中任一非单位元的置换都能表示成一些两两不相交的轮换的乘积, 并且除了轮换的排列次序外, 表示法是唯一的.

注. 在计算多个轮换复合时, 注意运算顺序是从右至左, 因为轮换本质上是函数映射的复合.

推论 3.3

S_n 中每个置换都可以表示成一些对换的乘积.

命题 3.4. S_n 中一个置换表示成对换的乘积, 其中对换的个数的奇偶性只和这个置换本身有关, 与表示方式无关.

例 3.5. (49^{th} ICPC Asia Shenyang Regional Contest D.Dot Product Game)

当我们将 b_i 映射到 $1 \sim n$ 时, 每次操作都会改变 a_i 对换数目的奇偶性, 而最终状态是 a_i 也变为 $1 \sim n$, 所以只需计算初始的奇偶性就可以判断.

定义 3.3

基于上述命题, 我们将可以由偶数个对换表示的置换称为**偶置换**, 由奇数个对换表示的置换称为**奇置换**.

同时, 按照定义偶置换和偶置换的乘积还是偶置换, 所以所有偶置换对乘法封闭是 S_n 的子群, 称为 n **元交错群**, 记作 A_n. 且有 $|A_n| = \dfrac{1}{2}|S_n| = \dfrac{n!}{2}$.

定义 3.4

设 S 的群 G 的一个非空子集, 如果 G 中每一个元素都能表示成 S 中有限多个元素的整数次幂的乘积, 那么称 S **是群** G **的生成元集**, 或者说 S **的所有元素生成** G.

特别的, 如果 G 的一个生成元集是有限集, 那么称 G 是**有限生成的群**, 记作 $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle$.

推论 3.6

由 (1.3) 及推论 3.3 可知, 每个置换都可以表示成 $(1i)(1j)(1k)\cdots$, 从而 $S_n = \langle\, (12), (13), \ldots, (1n)\, \rangle$.

习题 1.3

1. 在 S_n 中, 设 $\sigma(i_1 i_2 \cdots i_r)$, 证明: 对于任意 $\tau \in S_n$, 有

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\ \tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \ \cdots\ \ \tau(i_r)).$$

2. 证明: $S_n = \langle\, (12), (23), \ldots, (n-1, n)\, \rangle = \langle\, (12), (12\cdots n)\, \rangle$.
3. 证明: 当 $n \geqslant 3$ 时, $A_n = \langle\, (123), (124), \ldots, (12n)\, \rangle$.

§ 1.4 子群, Lagrange 定理

定义 4.1

如果群 G 的一个非空子集 H 对于 G 的运算也成为一个群, 那么称 H 为 G 的一个**子群**, 记作 $H < G$.

n 元对称群 S_n 的任一子群称为 n **元置换群**.

非空集合 Ω 上的全变换群 S_Ω 的任一子群称为 Ω 上的**变换群**.

群 G 中, 仅由单位元 e 组成的子集 $\{e\}$ 是 G 的一个子群. G 本身也是 G 的一个子群. $\{e\}$ 和 G 称为 G 的**平凡子群**.

命题 4.1. 群 G 的非空子集 H 是子群当且仅当从 $a, b \in H$ 可以推出

$$ab^{-1} \in H.$$

定义 4.2

设 $H < G$, 我们规定 G 上面的一个二元关系 $\sim$, 满足

$$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H.$$

容易验证, $\sim$ 是一个等价关系.

下面我们就来考虑这个关系中的等价类, 任给 $a \in G$.

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \{x \in G | x \sim a\} = \{x \in G | xa^{-1} \in H\} = \{x \in G | xa^{-1} = h, h \in H\} \\ &= \{x \in G | x = ha, h \in H\} = \{ha | h \in H\} \triangleq Ha.\end{aligned}$$

定义 4.3

我们称 Ha 是 H 的一个**右陪集**, a 称为**陪集代表**. H 的所有右陪集组成的集合是 G 的一个划分, 此集合也称为 G 关于子群 H 的**右商集**, 记作 $(G/H)_r$.

类似的, 定义二元关系 $b^{-1}a \in H$, 可定义**左陪集** aH, 和左商集 $(G/H)_l$.

取映射

$$\begin{aligned} \sigma : (G/H)_l &\to (G/H)_r \\ aH &\mapsto Ha^{-1} \end{aligned}$$

则有 $aH = cH \Leftrightarrow c^{-1}a \in H \Leftrightarrow c^{-1}(a^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow Hc^{-1} = Ha^{-1}$. 从而说明 σ 是单射. 又 $\sigma(b^{-1}H) = Hb$, 因此 σ 是满射, 从而 σ 是双射.

定义 4.4

设 $H < G$, 把 $(G/H)_l$ 的基数称为 H 在 G 中的**指数**, 记作 $[G : H]$.

若 $[G : H] = r$, 则有

$$G = H \cup a_1H \cup \cdots \cup a_{r-1}H, \tag{1.4}$$

其中 $H, a_1H, \ldots, a_{r-1}H$ 两两不相交, 我们称 (1.4) 为 G 关于 H 的**左陪集分解式**, $\{e, a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ 称为**左陪集代表系**.

考虑映射

$$\begin{aligned} \tau : H &\to aH \\ h &\mapsto ah \end{aligned}$$

显然 τ 是一个双射, 即 H 与 aH 有相同的基数.

定理 4.2.(Lagrange 定理)

设 G 是有限群, $H < G$, 则有

$$|G| = [G : H]|H|$$

从而 G 的任一子群 H 的阶是 G 的阶的因数.

定义 4.5

设 G 是有限群, $a \in G$ 且 $|a| = s$. 令

$$H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{s-1}\}$$

显然 $H < G$, 我们称之为**由 a 生成的子群**, 记作 $\langle a\rangle$.

推论 4.3

设 G 是有限群, 则 G 的任一元素 a 的阶是 G 的阶的因数, 从而 $a^{|G|} = e$.

推论 4.4

素数阶群一定是循环群.

证明. 对于非单位元 a, $|a|\,\big|\,|G|$, 由于 $|G|$ 是素数, 故 $|a| = |G|$, 进而 G 是循环群. □

定理 4.5.(欧拉定理)

设 $m \in \mathbb{Z}_{>1}$, 若整数 a 满足 $(a, m) = 1$ 则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod} m).$$

定理 4.6.(费马小定理)

设 p 是素数, 则对于任意整数 a, 有

$$a^p \equiv a(\mathrm{mod} p).$$

定理 4.7

设 $G = \langle a\rangle$ 是 n 阶循环群, 则

(1) G 的每一个子群都是循环群.

(2) 对于 G 的阶 n 的每一个正因数 s, 都存在唯一一个 s 阶子群 ($\langle a^{\frac{n}{s}}\rangle$), 它们就是 G 的全部子群.

4 阶群恰有两个同构类, 一类是 4 阶循环群, 它的代表是 $(\mathbb{Z}_4, +)$; 另一类是 4 阶非循环的 Abel 群, 它的代表是 $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +)$, 称它为 **Klein 群**, 也称为**四群**, 记作 V.

习题 1.4

1. 设 H, K 都是群 G 的子群. 证明: HK 为 G 的子群当且仅当

$$HK = KH.$$

2. 设 H, K 都是群 G 的有限子群, 证明:

$$|HK| = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}.$$

3. 设 S 是群 G 的一个非空子集. G 的包含 S 的所有子群的交集 $\bigcap\limits_{S\subseteq H<G} H$ 称为**由 S 生成的子集**, 记作 $\langle S\rangle$, 称 S 是**生成元集**.

4. 在 $(\mathbb{C}, +)$ 中, 由 $\{1, \mathrm{i}\}$ 生成的子群称为**高斯整数群**.

5. 群 G 中元素 a, 如果存在 $b\in G$ 使得 $b^2 = a$, 那么称 a 是**平方元**, b 是 a 的一个**平方根**. 证明: 奇数阶群 G 的每个元素 a 都是平方元, 且 a 的平方根唯一.

证明. $(a^k)^2 = a^{2k}$, $\quad (a^{\frac{n+2k+1}{2}})^2 = a^{2k+1}$.

做映射 $\sigma : a^k \to a^{2k}$, 由每个元素都是平方元知是满射, 又集合元素个数相等, 从而是双射. 故每个元素的平方根唯一. □

§ 1.5　群的直积

§ 1.6　群的同态, 正规子群, 商群, 群同态进本定理

§ 1.7　可解群, 单群, Jordan-Holder 定理

§ 1.8　群在集合上的作用, 轨道-稳定子定理

定义 8.1

设 G 是一个群, Ω 是一个非空集合. 如果映射

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & G\times\Omega & \to & \Omega\\ & (a,x) & \mapsto & a\circ x\end{array}$$

满足:

$$(ab)\circ x = a\circ(b\circ x),\quad \forall\, a,b\in G,\ \forall\, x\in\Omega,$$
$$e\circ x = x,\quad \forall\, x\in\Omega.$$

那么称群 G 在集合 Ω 上有一个作用.

注. 可理解为 $a\circ x$ 运算, 就是 G 中元素 a 在 Ω 上的作用.

更直接的, 我们任给 $a\in G$ 就可以得到一个 Ω 到自身的映射 $\psi(a)$:

$$\begin{array}{rccc}\psi(a): & \Omega & \to & \Omega\\ & x & \mapsto & a\circ x.\end{array}$$

容易验证 $\psi(a)$ 是 Ω 上的可逆变换, 从而 $\psi(a)$ 是 Ω 到自身的双射, 即 $\psi(a)\in S_\Omega$.

由此, 我们令

$$\begin{array}{rccc} \psi: & G & \to & S_\Omega \\ & a & \mapsto & \psi(a), \end{array}$$

则 ψ 是 G 到 S_Ω 的一个映射. 可以类似的验证 ψ 保持运算, 即 ψ 是 G 到 S_Ω 的同态.

命题 8.1. 设群 G 在集合 Ω 上有一个作用, 任给 $a \in G$, 令

$$\psi(a)x := a \circ x, \quad \forall\, x \in \Omega,$$

则 $\psi : a \mapsto \psi(a)$ 是 G 到 S_Ω 的一个群同态.

定义 8.2

我们称同态 ψ 的核 $\mathrm{Ker}\psi$ 为这个**作用的核**. 可以得到, $a \in G$ 是这个作用的核 $\Leftrightarrow \ a \circ x = x, \quad \forall x \in G$.

定义 8.3

当 $\mathrm{Ker}\psi = \{e\}$ 时, 称这个作用是**忠实的**, 此时 ψ 是一个单同态.

命题 8.2. 设群 G 到非空集合 Ω 上的全变换群 S_Ω 有一个同态 ψ, 令

$$a \circ x := \psi(a)x, \quad \forall\, a \in G, \forall\, x \in \Omega,$$

则 G 在 Ω 上有一个作用.

1. **群 G 在集合 G 上的左平移**

   设 G 是一个群, 令

   $$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (a, x) & \mapsto & ax. \end{array}$$

   容易验证这是 G 在集合 G 上的作用, 称该作用为 G 在集合 G 上的左平移.

   并且左平移的核 $\Leftrightarrow \ ax = x \Leftrightarrow a = e$, 即左平移是忠实的作用. 所以 $G \cong \mathrm{Im}\psi$, 即 G 与 G 上的一个变换群同构.

   定理 8.3.(Cayley)

   任意一个群都同构于某一集合上的变换群.

2. **群 G 在左商集 $(G/H)_l$ 上的左平移**

设 H 是 G 的子群, 令

$$\begin{aligned} G \times (G/H)_l &\to (G/H)_l \\ (a, xH) &\mapsto axH. \end{aligned}$$

容易验证这是 G 在 $(G/H)_l$ 上的作用, 称之为 G 在 $(G/H)_l$ 上的左平移.

注: 当题目中有子群时, 优先考虑在其左商集上的左平移.

3. **群 G 在集合 G 上的共轭作用**

令

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a, x) &\mapsto axa^{-1}. \end{aligned}$$

容易验证, 这是 G 在 G 上的作用, 称之为共轭作用.

定义 8.4

设 $Z(G) := \{b \in G | bx = xb, \forall x \in G\}$, 易得 $Z(G)$ 是共轭作用的核. 我们称 $Z(G)$ 为群 G 的**中心**, 它是由与 G 中每个元素都可交换的元素组成的集合.

群 G 在集合 G 上的共轭作用引出了一个 G 到 S_G 的同态 σ, 把 a 在 σ 下的像记作 σ_a, 于是

$$\sigma_a(x) = a \circ x = axa^{-1}, \quad \forall\, x \in G. \tag{1.5}$$

容易验证 σ_a 是 G 到自身的同构映射.

定义 8.5

群 G 到自身的一个同构映射称为 G 的一个**自同构**. 由 (1.5) 式定义的 σ_a 称为 G 的一个**内自同构**.

此外, 群 G 的所有自同构组成的集合对于映射的乘法构成一个群, 称它为**自同构群**, 记作 $\mathrm{Aut}(G)$.

群 G 的所有内自同构组成的集合是上述的 $\mathrm{Im}\sigma$, 它是 S_G 的一个子群, 称它是 G 的**内自同构群**, 记作 $\mathrm{Inn}(G)$.

由于 G 的每个内自同构 σ_a 是 G 的一个自同构, 因此 $\mathrm{Inn}(G) < \mathrm{Aut}(G)$.

更进一步的, 可以验证 $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

定理 8.4

对于群 G 有

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G).$$

证明. 由于 $\mathrm{Ker}\sigma = Z(G), \mathrm{Im}\sigma = \mathrm{Inn}(G)$, 根据群同态基本定理 $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$. □

引理 8.5

集合 Ω 上的二元关系:

$$y \sim x :\Leftrightarrow \exists\, a \in G,\ s.t.\ y = a \circ x. \tag{1.6}$$

是等价关系.

定义 8.6

我们称

$$G(x) := \{a \circ x | a \in G\},$$

为 x 的 G-**轨道**. 且 $G(x)$ 是等价关系 (1.6) 中的一个等价类. 于是 Ω 的所有 G-轨道组成的集合是 Ω 的一个划分. Ω 的任意两条轨道要么相等, 要么不交. 且所有轨道的并是 Ω.

若 Ω 的子集 $I = \{x_i\}$ 使得

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} G(x_i), \tag{1.7}$$

且当 $i \neq j$ 时有 $G(x_i) \cap G(x_j) = \varnothing$. 那么就称 I 为 Ω 的 G-轨道的**完全代表系**.

定义 8.7

我们称

$$G_x := \{g \in G | g \circ x = x\},$$

为 x 的**稳定子群**.

容易验证 G_x 是 G 的子群. 且 G_x 中的每个元素作用 x 保持 x 不变.

引理 8.6

任给 $a, b \in G$, $aG_x = bG_x \Leftrightarrow b^{-1}a \in G_x \Leftrightarrow a \circ x = b \circ x$.

因此 G_x 的某个陪集中的元素对 x 的作用是相同的. 从而考虑

$$\begin{aligned}\varphi:(G/G_x)_l &\to G(x)\\ aG_x &\mapsto a\circ x,\end{aligned}$$

由引理 8.6 可知 φ 是 $(G/G_x)_l$ 到 $G(x)$ 的一个单射, 从其定义可知这也是个满射, 由此 φ 是双射. 于是我们有 $|G(x)|=|(G/G_x)_l|$.

定理 8.7

(轨道-稳定子定理) 设群 G 在集合 Ω 上有一个作用, 则对于任给 $x\in\Omega$, 有

$$|G(x)|=|(G/G_x)_l|=[G:G_x] \tag{1.8}$$

推论 8.8

如果有限群 G 在 Ω 上有一个作用, 那么对于 $x\in\Omega$ 有

$$|G|=|G_x||G(x)|.$$

下面考虑上述讨论在共轭作用中的应用.

定义 8.8

我们称共轭作用中的 G-轨道 $G(x)=\{axa^{-1}|a\in G\}$ 为 x 的**共轭类**.

当且仅当 $x\in Z(G)$ 时, 有 $|G(x)|=1$.

定义 8.9

当 G 为有限群时, 我们称

$$|G|=|Z(G)|+\sum_{j=1}^{r}|G(x_j)| \tag{1.9}$$

为有限群 G 的**类方程**. 其中 $Z(G)$ 为 G 的中心, $\{x_1,x_2\dots,x_r\}$ 为 G 的非中心元素的共轭类的完全代表系.

定义 8.10

在共轭作用下, 我们称 $C_G(x):=G_x=\{g\in G|g\circ x=x\}=\{g\in G|gx=xg\}$ 为 x 在 G 里的**中心化子**.

推论 8.9

运用轨道-稳定子定理可知, $|G(x)|=[G:C_G(x)]$.

定义 8.11

如果群 G 在 Ω 上的作用只有一条轨道, 即 $\forall\, x, y \in \Omega,\ \exists\, g \in G,\ s.t. y = g \circ x$, 那么称 G 在 Ω 上的这个作用是**传递的**. 并称 Ω 是群 G 上的一个**齐性空间**.

命题 8.10. 设群 G 在集合 Ω 上有一个作用, 则对任一给定 $x \in \Omega$, 对于轨道 $G(x)$ 有 $\forall\, y \in G(x)$, G_x 和 G_y 彼此共轭, 即存在 $a \in G$, 使得 $G_y = aG_xa^{-1}$. 从而 $|G_x| = |G_y|, [G : G_x] = [G : G_y]$.

定义 8.12

对于给定的 $g \in G$, 我们称 $F(g) := \{x \in \Omega | g \circ x = x\}$ 为 g 的**不动点集**. 即 g 存在于哪些 x 的稳定子群中.

定理 8.11.(Burnside 引理)

设有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用, 则 Ω 的 G-轨道条数 r 为

$$r = \frac{1}{|G|} \sum g \in G |F(g)|.$$

证明. 考虑集合

$$S = \{(g, x) | g \circ x = x\}.$$

一方面, $|S| = \sum\limits_{x \in \Omega} |G_x| = r|G|$.

另一方面, $|S| = \sum\limits_{g \in G} |F(g)|$. □

定义 8.13

设群 G 在集合 Ω 上有一个作用, 对于 $x \in \Omega$, 若 x 的 G-轨道只含一个元素 (即 x 自身), 则称 x 是群 G 的一个**不动点**. 群 G 的所有不动点组成的集合称为群 G 的**不动点集**, 记作 Ω_0.

定义 8.14

若有限群 G 的阶是素数 p 的方幂, 即 $|G| = p^m$, $(m \geqslant 1)$, 则称 G 是 p-群.

命题 8.12. 设 p-群 G 在集合 Ω 上有一个作用, 则

$$|\Omega_0| \equiv |\Omega| (\mathrm{mod} p).$$

推论 8.13

p-群 G 必有非平凡中心, 即 $Z(G) \neq \{e\}$.

推论 8.14

设 p 是素数, 则 p^2 阶群要么是循环群, 要么同构于 $(\mathbb{Z}_p, +) \oplus (\mathbb{Z}_p, +)$, 从而 p^2 阶群都是 Abel 群.

§ 1.9　Sylow 定理

引理 9.1

设 $n = p^l m$, 其中 $(m, p) = 1$, p 是素数, 则对 $1 \leqslant k \leqslant l$, 有

$$p^{l-k} | C_n^{p^k}, \quad p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k}.$$

定理 9.2.(Sylow 第一定理)

设群 G 的阶 $n = p^l m$, 其中 p 为素数, $(m, p) = 1$, $l > 0$, 则对 $1 \leqslant k \leqslant l$, G 中必有 p^k 阶子群, 其中 p^l 阶子群 (即 p 的最高方幂阶子群) 称为 G 的 Sylow p-子群.

证明. 设集合 Ω 中的元素形如:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p^k}\}, \quad 其中\ a_i \in G.$$

对于 $g \in G$, 令

$$g \circ A := \{ga_1, ga_2, \ldots, ga_{p^k}\}.$$

容易验证这是 G 在 Ω 上的作用.

我们取 Ω 的 G-轨道完全代表系 $\{A_i\}$, 从而 $|\Omega| = \sum\limits_{i=1}^{r} |G(A_i)|$.

由引理可知, $p^{l-k+1} \nmid |\Omega|$. 于是至少存在一个 i 满足 $p^{l-k+1} \nmid |G(A_i)|$.

根据轨道稳定子定理 $|G| = |G(A_i)||G_{A_i}|$. 由 p^l 恰好整除 $|G|$, 所以 $|G_{A_i}|$ 含有的 p 因子至少为 k 阶. 即

$$|G_{A_i}| = p^k q \geqslant p^k.$$

另一方面, 对于任意 $g \in G_{A_i}$, 有 $g \circ A_i = A_i$. 于是对于 $a \in A_i$, 有 $ga \in A_i$.

从而

$$G_{A_i} a = \{ga | g \in G_{A_i}\} \subseteq A_i.$$

因此

$$|G_{A_i}| = |G_{A_i}a| \leqslant |A_i| = p^k.$$

综上, $|G_{A_i}| = p^k$. 从而 G_{A_j} 就是 G 的一个 p^k 阶子群. $\square$

定理 9.3.(Sylow 第二定理)

设群 G 的阶 $n = p^l m$, 其中 p 为素数, $(m, p) = 1, l > 0$, 则

(1) 对于 $1 \leqslant k \leqslant l$, G 的任一 p^k 阶子群一定包含于 G 的某个 Sylow p-子群中;

(2) G 的任意两个 Sylow p-子群在 G 中共轭.

推论 9.4

有限群 G 的 Sylow p-子群是正规子群, 当且仅当 G 的 Sylow p-子群的个数为 1.

定理 9.5.(Sylow 第三定理)

设群 G 的阶 $n = p^l m$, 其中 p 为素数, $(m, p) = 1, l > 0$, 则 G 的Sylow p-子群的个数 r 满足

$$r \equiv 1 (\bmod\ p), \quad 且\ r \mid m.$$

推论 9.6

$2p$ 阶群或者是循环群, 或者同构于二面体群 D_p.

定义 9.1

形如 $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, 且满足 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = i, \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j},$$

称为**四元数**.

定义 9.2

称 $Q = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ 为四元数群, 容易验证 Q 对于上述乘法构成一个群.

§ 1.10 有限 Abel 群和有限生成的 Abel 群的结构

§ 1.11 自由群

第二章　环的理想, 域的构造

§ 2.1　环同态, 理想, 商环

定义 1.1

若非空集合 $R_1 \subseteq R$, R 是一个环, 如果 R_1 对于 R 的加法和乘法也构成环, 则称 R_1 是 R 的**子环**.

命题 1.1. 环 R 的子集 R_1 是的子环, 当且仅当

$$a, b \in R \Rightarrow a - b \in R \wedge ab \in R.$$

定义 1.2

如果环 R 到环 $\widetilde{R}$ 有一个映射 σ, 满足:

$$\begin{aligned}
&\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b), \\
&\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b), \\
&\sigma(1) = \widetilde{1}.
\end{aligned}$$

那么称 σ 是**环同态**.

注: 只有存在单位元才需验证上述最后一条条件.

性质 1.2. 设 σ 是 R 到 $\widetilde{R}$ 的环同态, 则

$$\sigma(0) = \widetilde{0}, \quad \sigma(-a) = -\sigma(a).$$

定义 1.3

称 $\mathrm{Ker}\sigma$ 为 R 到 $\widetilde{R}$ 的**环同态核**.

定义 1.4

如果环 R 的一个非空子集 I 对 R 的减法封闭, 并且具有” 左, 右吸收性”, 即

$$a \in I,\ r \in R\ \Rightarrow ra \in I \wedge ar \in I,$$

那么称 I 是 R 的一个**理想**或**双边理想**.

推论 1.3

理想是加法子群.

定义 1.5

称 R 和 $\{0\}$ 是环 R 的**平凡的理想**.
如果 R 只有平凡的理想, 那么称 R 是**单环**.

推论 1.4

设环 R 有单位元, 则 R 的每个非平凡理想均不含有单位元.

推论 1.5

域 F 没有非平凡理想.

证明. 由于存在逆元, 非零理想中必存在幺元, 进而非零理想就是 F. □

推论 1.6

设 R 是交换幺环, 则

$$R \text{ 是域} \Leftrightarrow R \text{ 没有非平凡理想.}$$

证明. 考虑 Ra 是 R 的理想, $Ra = R$ 可得存在 $ba = e$, 由此 a 有逆元. □

定义 1.6

如果环 R 的子集 J 对减法封闭, 并且具有” 左吸收性”, 即

$$b \in J, r \in R \Rightarrow rb \in J.$$

则称 J 是 R 的**左理想**.

定义 1.7

设 I 是环 R 的一个理想, 令

$$R/I := \{r + I | r \in R\}.$$

并在 R/I 中规定

$$(r_1 + I)(r_2 + I) := r_1 r_2 + I.$$

则 R/I 成为一个环, 称它为环 R 对于理想 I 的**商环**, 它的元素 $r + I$ 称为模 I 的**同余类**.

定义 1.8

设 I 是环 R 的一个理想, 令

$$\begin{aligned} \pi: \quad R &\to R/I \\ r &\mapsto r+I. \end{aligned}$$

则 π 是环 R 到 R/I 的一个环同态, 且是满同态, $\mathrm{Ker}\pi = I$. 称 π 为 R 到 R/I 的**自然环同态**.

定理 1.7.(环同态基本定理)

设 σ 是环 R 到 $\widetilde{R}$ 的一个环同态, 则 $\mathrm{Ker}\sigma$ 是 R 的一个理想, 且 $\mathrm{Im}\sigma \cong R/\mathrm{Ker}\sigma$.

定理 1.8.(第一环同构定理)

设 I 是环 R 的一个理想, H 是 R 的一个子环, 则

(1) $H+I$ 是 R 的一个子环.

(2) $H\cap I$ 是 H 的一个理想, 且 $H/H\cap I \cong (H+I)/I$.

命题 1.9. 设 I 是环 R 的一个理想, 则商环 R/I 的所有理想组成的集合为

$$\{K/I | K \text{ 是 } R \text{ 的包含 } I \text{ 的理想}\}.$$

定理 1.10.(第二环同构定理)

设 I, J 是环 R 的理想, 且 $I\subseteq J$, 则 J/I 是 R/I 的一个理想, 且有环同构:

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J.$$

§ 2.2　理想的运算, 环的直和

命题 2.1. 设 R 是含有单位元的交换环, 任给 $a\in R$, 令

$$\{ar | r\in R\} =: aR = Ra := \{ra | r\in R\}$$

则 Ra, aR 是 R 的理想.

命题 2.2. 若 $\{I_j | j\in J\}$ 是环 R 的一族理想, 则 $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$ 也是 R 的理想.

定义 2.1

设 S 是环 R 的非空子集, 把 R 的所有包含 S 的理想的交集称为**由 S 生成的理想**, 记作 (S). 如果 S 是有限集, 那么称 (S) 是**有限生成的**. 若 $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, 则把 (S) 记作 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

定义 2.2

环 R 中由一个元素生成的理想称为**主理想**, 记作 (a).

性质 2.3. 若 R 是有单位元的交换环, 则 $Ra=(a)$.

命题 2.4. 设 R 是一个环 (不一定有单位元, 也不一定是交换环), 则元素 a 生成的理想 (a) 为

$$(a)=\left\{r_1a+ar_2+ma+\sum_{i=1}^{n}x_iay_i|r_1,r_2,x_i,y_i\in R,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

命题 2.5. 若 R 是有单位元的交换环, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in R$, 则

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\{\sum_{i=1}^{n}r_ia_i|r_i\in R,i=1,2,\ldots,n\}.$$

定义 2.3

设 A,B 是环 R 的两个非空子集, 定义

$$A+B:=\{a+b|a\in A,b\in B\}$$
$$AB:=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\middle|a_i\in A,b_i\in B,i=1,2,\ldots,n,n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

定义 2.4

若 I,J 是环 R 的两个理想, 则 $I+J,IJ$ 都是 R 的理想, 分别称他们为理想的**和**、**积**, 并且有

$$IJ\subseteq I\cap J\subseteq I+J.$$

性质 2.6. 设 I, J, K 都是环 R 的理想, 则

$$\begin{aligned} I+J &= J+I, \\ (I+J)+K &= I+(J+K), \\ (IJ)K &= I(JK), \\ I(J+K) &= IJ+IK, \\ (J+K)I &= JI+KI. \end{aligned}$$

例 2.7. 在整环 $\mathbb{Z}$ 中,

$$(n)(m) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} (k_i n)(l_i m) \middle| k_i l_i \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant t, t \in \mathbb{N}^* \right\}, \tag{2.1}$$

$$(n) \cap (m) = ([n, m]), \tag{2.2}$$

$$(n) + (m) = \{kn + lm | k, l \in \mathbb{Z}\} = ((n, m)). \tag{2.3}$$

定义 2.5

设 R 是有单位元的环, I, J 是 R 的理想. 如果 $I + J = R$, 那么称 I 与 J **互素**.

例 2.8. 在整数环 $\mathbb{Z}$ 中,

$$(n, m) = 1 \Leftrightarrow (n) + (m) = (1) = \mathbb{Z}.$$

命题 2.9. 设 R 是有单位元的环, I, J, K 都是 R 的理想. 如果 I 和 J 都与 K 互素, 那么 IJ 也与 K 互素.

例 2.10. 在整数环 $\mathbb{Z}$ 中, (n) 与 (m) 互素当且仅当 $(n, m) = 1$.

命题 2.11. 设 R 是有单位元的交换环, I, J 是 R 的理想, 则

$$I + J = R \Rightarrow IJ = I \cap J.$$

例 2.12. 在整数环 $\mathbb{Z}$ 中,

$$(n) + (m) = \mathbb{Z} \Rightarrow ([n, m]) = (nm) \Rightarrow (n) \cap (m) = (n)(m).$$

定义 2.6

设 $R_1, R_2, \ldots, R_s$ 都是环, 在笛卡尔积 $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s$ 中规定

$$(a_1, a_2 \ldots, a_s) + (b_1, b_2, \ldots, b_s) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_s + b_s), \tag{2.4}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s) \times (b_1, b_2, \ldots, b_s) := (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_s b_s). \tag{2.5}$$

容易验证, 上述加法和乘法构成一个环, 称它为环 $R_1, R_2, \ldots, R_s$ 的**直和**, 记作 $R_1 \oplus R_2 \oplus \cdot \oplus R_s$, 零元为 $(0_1, 0_2, \ldots, 0_s)$.

如果每个环有单位元则 $(1_1, 1_2, \ldots, 1_s)$ 是直和的单位元.

如果每个环都是交换环, 那么直和是交换环.

定义 2.7

设 I 是环 R 的一个理想, 对于 $a, b \in R$, 如果

$$a - b \in I,$$

那么称 a 与 b **模 I 同余**, 记作 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ I)$.

容易验证, 模 I 同余是等价关系. 任给 $r \in R$, r 的等价类

$$\begin{aligned}
\overline{r} &= \{x \in R | x \equiv r(\mathrm{mod}\ I)\} \\
&= \{x \in R | x - r \in I\} = \{x \in R | x - r = b, b \in I\} \\
&= \{r + b | b \in I\} = r + I.
\end{aligned}$$

我们称 $r + I$ 为**模 I 同余类**.

性质 2.13. 若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ I), c \equiv d(\mathrm{mod}\ I)$, 则

$$\begin{gathered}
a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\ I), \\
ac \equiv bd(\mathrm{mod}\ I), \\
ca \equiv db(\mathrm{mod}\ I)
\end{gathered}$$

定理 2.14

设 R 是有单位元的环, 若它的理想 $I_1, I_2, \ldots, I_s$ 两两互素, 则有环同构:

$$R/(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s) \cong R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus \cdots \oplus R/I_s. \tag{2.6}$$

定理 2.15.(中国剩余定理)

设 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ 是两两互素的大于 1 的整数, 任给整数 $b_1, b_2, \ldots, b_s$, 则一次同余方程

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x \equiv b_s \pmod{m_s}, \end{cases} \tag{2.7}$$

在 $\mathbb{Z}$ 中有解, 它的一个解是

$$a = \sum_{i=1}^{s} b_i v_i \prod_{j \neq i} m_j,$$

其中 v_i 满足 $u_i m_i + v_i \prod\limits_{j \neq i} m_j = 1, i = 1, 2, \ldots, s$. 它的全部解为

$$a + k m_1 m_2 \cdots m_s, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义 2.8

设 I 是交换环 R 的一个理想. 令

$$\text{rad}\, I := \{r \in R \mid r^n \in I, \exists\, n \in \mathbb{N}^*\},$$

称 rad I 是理想 I 的**根**, 且 rad I 是 R 的一个理想.

定义 2.9

若环 R 中元素 a, 满足 $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$, $s.t.\ a^n = 0$, 那么称 a 是**幂零元**. 并且如果 R 有单位元且 a 是幂零元, 则 $1 - a$ 可逆.

定义 2.10

在交换环 R 中, 所有幂零元组成的集合是 R 的一个理想, 且它是零理想 (0) 的根, 称为 R 的**幂零根**.

定义 2.11

设 $I_1, I_2, \ldots, I_s$ 都是环 R 的理想, 并且

$$R = I_1 + I_2 + \cdots I_s$$
$$I_i \cap \left(\sum_{j \neq i} I_j \right) = (0), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

则

(1) 环 R 的每个元素 x 都可以唯一表示成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s, \quad x_i \in I_i, i = 1, 2, \ldots, s.$$

(2) 有环同构

$$R \cong I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_s,$$

并称 R 是其理想 $I_1, I_2, \ldots, I_s$ 的**内直和**.

§ 2.3 素理想和极大理想

注 3.1. 本节中主要研究含幺环.

定义 3.1

若 R 交换幺环, 且 R 没有非零的零因子, 则称 R 是**整环**.

定义 3.2

设 R 是交换幺环, P 是 R 的理想, 且 $P \neq R$. 如果从 $ab \in P$ 可以推出 $a \in P$ 或者 $b \in P$, 那么称 P 是一个**素理想**.

例 3.2. 在整环 $\mathbb{Z}$ 中, 设 p 是大于 1 的整数, 则

$$p \text{ 是素数} \Leftrightarrow (p) \text{ 是素理想}$$

例 3.3. 在域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 中, 设 $p(x)$ 是次数大于 0 的多项式, 则

$$p(x) \text{ 不可约} \Leftrightarrow (p(x)) \text{ 是素理想}$$

推论 3.4

设 R 是交换幺环, 则

$$(0) \text{ 是 } R \text{ 的一个理想} \Leftrightarrow R \text{ 是整环}$$

例 3.5. 整数环 $\mathbb{Z}$ 的每一个理想都是由一个非负整数生成的主理想.

证明. 取理想中最小的正元素为除数做带余除法. □

推论 3.6

$\mathbb{Z}$ 的全部素理想为 $(0), (p)$, 其中 p 是素数.

定理 3.7

设 R 是交换幺环, P 是 R 的一个理想, 则

$$\text{商环 } R/P \text{ 是整环} \Leftrightarrow P \text{ 是 } R \text{ 的素理想.}$$

定义 3.3

设 R 是环, M 是 R 的理想, 且 $M \neq R$. 如果 R 中包含 M 的理想只有 M 和 R, 那么称 M 是 R 的一个**极大理想**.

定理 3.8

设 R 是交换幺环, I 是 R 的一个理想, 则

$$\text{商环 } R/I \text{ 是域} \Leftrightarrow I \text{ 是 } R \text{ 的极大理想}$$

证明. 利用推论 1.6 和极大理想定义即可直接得到. □

例 3.9. 域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 的每一个理想都是主理想, 其中非 (0) 的主理想可以由首项系数为 1 的多项式生成.

证明. 类比例 3.5 取次数最低 (非 0 次) 的多项式做带余除法. □

例 3.10. 在整环 $\mathbb{Z}$ 中, 设 p 是大于 1 的整数, 则

$$p \text{ 是素数} \Leftrightarrow (p) \text{ 是极大理想}$$

例 3.11. 域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 中, 设 $p(x)$ 是次数大于 0 的多项式, 则

$$p(x) \text{ 不可约} \Leftrightarrow (p(x)) \text{ 是 } F[x] \text{ 的极大理想.}$$

例 3.12. 域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 中, M 是 $F[x]$ 的一个理想, 则

$$F[x]/M \text{ 是域} \Leftrightarrow M = (p(x)), \quad \text{其中 } p(x) \text{ 是不可约多项式.}$$

定理 3.13

在幺环 R 中必存在极大理想.

定义 3.4

设 R 是幺环, 令 $\mathbb{Z}e := \{ne|n \in \mathbb{Z}\}$. 则有 $\mathbb{Z}e$ 是 R 的子环, 且存在非负整数 m 满足环同构 $\mathbb{Z}/(m) \cong \mathbb{Z}e$, 我们称 m 是环 R 的**特征**.

注 3.14. 环的特征也定义为, 最小的正整数 m 满足 $\forall\, r \in R, mr = 0$. 如果不存在这样的正整数, 则称环的特征为 0.

可以理解为环中单位元的加法阶.

命题 3.15. 如果 R 是整环, 那么 R 的特征是 0 或者一个素数.

§ 2.4 有限域的构造, 构造扩域的途径

由上节, 我们已经知道若 $p(x)$ 是 $F[x]$ 上的不可约多项式, 那么 $F[x]/(p(x))$ 是一个域.

在具体研究这个域的性质前, 我们先补充几个概念.

定理 4.1

设域 F 的单位元为 e, 则要么 $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ 有 $ne \neq 0$, 要么存在一个素数 p, 使得 $pe = 0$ 且对于 $0 < l < p$, $le \neq 0$.

定义 4.1

设域 F 的单位元为 e.

如果 $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ 有 $ne \neq 0$, 则称**域 F 的特征**为 0.

如果存在素数 p, 使得 $pe = 0$ 且对于 $0 < l < p$, $le \neq 0$, 则称**域 F 的特征**为 p.

例 4.2. 构造含 4 个元素的域.

解. 考虑在 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中取不可约多项式 $x^2 + x + \bar{1}$, 则 $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + \bar{1})$ 是一个域, 任取 $f(x)$ 做带余除法, 可得余数就是不同等价类的代表元, 由此可知该域仅有四个元素. 当我们记 $u = x + (x^2 + x + \bar{1})$, 则

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + \bar{1}) = \{0, 1, u, 1 + u\}.$$

又 $2(\bar{1} + (x^2 + x + \bar{1})) = (\bar{1} + \bar{1}) + (x^2 + x + \bar{1}) = \bar{0} + (x^2 + x + 1)$

该步中, $\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$ 因为在 $\mathbb{Z}_2$ 中.

由此, 该四元域的特征为 2. 我们有 $u^2+u+1=(x^2+x+\bar{1})+(x^2+x+\bar{1})=(x^2+x+\bar{1})=0$.

且满足 $u+(1+u)=1+2u=1+0=1$ (利用域的特征为 2), $u(1+u)=u+u^2=-1=1$. (利用 $u^2+u+1=0$) □

定理 4.3

设 F_q 是含 q 个元素的有限域, 其中 $q=p^r$, p 为素数, $r\geqslant 1$. 如果 $F_q[x]$ 的 n 次不可约多项式为 $m(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 那么 $F_q[x]/(m(x))$ 是含 q^n 个元素的域, 并且它的每一个元素可以唯一地表示成

$$c_0+c_1u+\cdots+c_{n-1}u^{n-1},$$

其中 $c_i\in F_q$, $i=0,1,\ldots,n-1$; $u=x+(m(x))$, u 满足

$$a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n=0.$$

注意到, 尽管 $m(x)$ 在 F_q 中无根, 但是在我们构造出来的域 $F_q[x]/(m(x))$ 中, 元素 $u=x+m(x)$, 有 $m(u)=0$, 即 u 是 $m(x)$ 的根.

由此, 对于当前域中不可约多项式 $m(x)$, 我们可以通过该方法构造出一个更大的域, 使其在更大的域中有根.

例 4.4. 在实数域 $\mathbb{R}$ 中, 多项式 x^2+1 不可约, 那么就考虑域 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.

则取 $u=x+(x^2+1)$, 那么 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ 中的元素可唯一表示为

$$c_0+c_1u,\quad c_0,c_1\in\mathbb{R}.$$

且有 $u^2+1=0$.

更进一步的考虑到复数域的映射 $\sigma: c_0+c_1u\mapsto c_0+c_1i$.

容易验证这是双射, 即

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}.$$

更一般的, 我们有如下结论:

定理 4.5

设 F 是一个域, $p(x)=x^r+b_{r-1}x^{r-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是 F 上的一个不可约多项式, 那么 $F[x]/(p(x))$ 是一个域, 并且 $\sigma: a\mapsto a+(p(x))$ 是 F 到 $F[x]/(p(x))$ 的一个单的环同态, 从而可以把 a 和 $a+(p(x))$ 等同. 又取 $u=x+(p(x))$, 则 $F[x]/(p(x))$ 的每

个元素可以唯一表成

$$c_0 + c_1 u + \cdots + c_{r-1} u^{r-1},$$

其中 $c_i \in F$, 并且 u 是 $p(x)$ 在 $F[x]/(p(x))$ 中的根.

定义 4.2

设 R 和 $\widetilde{R}$ 都是有幺环, 如果 $\widetilde{R}$ 有一个子环 $\widetilde{R}_1$ 且与 $\widetilde{R}$ 具有相同的幺元, 并且 $\widetilde{R}_1$ 与 R 环同构, 那么把 $\widetilde{R}$ 称为 R 的一个**扩环**, 此时可以把 R 看作是 $\widetilde{R}$ 的一个子环.

定义 4.3

设 F 和 K 都是域, 如果 F 与 K 的一个子环 K_1 环同构, 那么称 K 是 F 的一个**扩域**, 或者称 K 是 F 上的一个**域扩张**, 记作 K/F, 此时可以把 F 看成是 K 的一个**子域**.

定义 4.4

设 R 是交换幺环, $\widetilde{R}$ 是 R 的一个扩环, 且 $\widetilde{R}$ 是交换环. 任意取定 $\widetilde{a} \in \widetilde{R}$, 我们把 $\widetilde{R}$ 中包含 $R \bigcup \{\widetilde{a}\}$ 的所有子环的**交**称为 R **添加** $\widetilde{a}$ **得到的子环**, 或者 $\widetilde{a}$ **在** R **上生成的子环**, 记作 $R[\widetilde{\alpha}]$.

定义 4.5

考虑 $R[\widetilde{\alpha}]$ 中元素的形式, 对于任意的 $a_0, a_1 \ldots, a_n \in R$, 有

$$a_0 + a_1\widetilde{\alpha} + \cdots + a_n\widetilde{\alpha}^n \in R[\widetilde{\alpha}].$$

容易验证

$$R[\widetilde{\alpha}] = \{a_0 + a_1\widetilde{\alpha} + \cdots + a_n\widetilde{\alpha}^n | a_0, a_1 \ldots, a_n \in R, n \in \mathbb{N}\}.$$

其中 $a_0 + a_1\widetilde{\alpha} + \cdots + a_n\widetilde{\alpha}^n$ 称为 $\widetilde{\alpha}$ **在** R **上的一个多项式**.

下面我们来研究在什么条件下 $F[\widetilde{\alpha}]$ 是一个域. 由于域中非零元都不是零因子, 因此显然有一个必要条件 $\widetilde{R}$ 是整环. 所以接下来的讨论都建立在 $\widetilde{R}$ 是整环的情况下.

考虑下述对应法则:

$$\begin{aligned} \sigma_{\widetilde{a}} : F[x] &\rightarrow \widetilde{R} \\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\mapsto f(\widetilde{\alpha}) := \sum_{i=0}^{n} a_i \widetilde{\alpha}^i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

容易验证, $\sigma_{\widetilde{a}}$ 是 $F[x]$ 到 $\widetilde{R}$ 的一个环同态, 并且有 $\mathrm{Im}\sigma_{\widetilde{a}} = F[\widetilde{\alpha}]$ 于是根据环同态基

本定理得

$$F[x]/\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} \cong F[\widetilde{\alpha}].$$

又 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} = \{f(x) \in F[x] | \widetilde{\alpha}$ 是$f(x)$ 的一个根$\}$. 由于 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}}$ 是 $F[x]$ 的一个理想, 且 $F[x]$ 的理想都是主理想, 因此 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} = (0)$ 或者 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} = (m(x))$, 其中 $m(x)$ 是首项系数为 1 的多项式.

下面, 我们对这两种情况分别讨论.

定义 4.6

(1) 当 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} = (0)$ 时, 则 $\widetilde{\alpha}$ 不是 $F[x]$ 中任何非零多项式的根, 此时称 $\widetilde{\alpha}$ 是 F 上的**超越元**. 并且有

$$F[\widetilde{\alpha}] \cong F[x]/(0) \cong F[x].$$

由 $F[x]$ 不是域, 从而 $F[\widetilde{\alpha}]$ 不是域.

(2) 当 $\mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}} = (m(x))$ 时, 则 $\widetilde{\alpha}$ 是 $F[x]$ 中非零多项式 $m(x)$ 的一个根, 此时称 $\widetilde{\alpha}$ 是 F 上的**代数元**. 且 $F[x]$ 中以 $\widetilde{\alpha}$ 为根的多项式都是 $m(x)$ 的倍式. 因此 $m(x)$ 是所有以 $\widetilde{\alpha}$ 为根的非零多项式中次数最低的, 称之为 $\widetilde{\alpha}$ 在 F 上的**极小多项式**.

并且有 $m(x)$ 是不可约的, 否则设 $m(x) = m_1(x)m_2(x)$, 则有 $0 = m(\widetilde{\alpha}) = m_1(\widetilde{\alpha})m_2(\widetilde{\alpha})$. 由于 $\widetilde{R}$ 是整环, 所以有 $m_1(\widetilde{\alpha}) = 0$ 或者 $m_2(\widetilde{\alpha}) = 0$. 那么不妨设 $m_1(\widetilde{\alpha}) = 0$ 就有 $m_1(x) \in \mathrm{Ker}\sigma_{\widetilde{\alpha}}$, 但显然有 $m_1(x) \notin (m(x))$, 故产生矛盾.

由此, $m(x)$ 是不可约的, 从而 $F[x]/(m(x))$ 是一个域, 又 $F[\widetilde{\alpha}] \cong F[x]/(m(x))$, 故 $F[\widetilde{\alpha}]$ 是一个域.

在之前, 我们已经知道, $F[x]/(m(x))$ 的每一个元素可以唯一表示成

$$c_0 + c_1u + \cdots + c_{r-1}u^{r-1}$$

其中 $u = x + m(x)$. 那么根据环同态基本定理中用到的环同态映射

$$\psi(f(x) + (m(x))) = \sigma_{\widetilde{\alpha}}(f(x)) = f(\widetilde{\alpha}).$$

从而 $\psi(c_0 + c_1u + \cdots + c_{r-1}u^{r-1}) = \psi(c_0 + c_1x + \cdots + c_{r-1}x^{r-1} + (m(x)))$
$= c_0 + c_1\widetilde{\alpha} + \cdots + c_{r-1}\widetilde{\alpha}^{r-1}$, 特别的, 有 $\psi(u) = \widetilde{\alpha}$.

因此 $F[\widetilde{\alpha}]$ 的每个元素都可以唯一的表示成

$$c_0 + c_1\widetilde{\alpha} + \cdots + c_{r-1}\widetilde{\alpha}^{r-1}.$$

综上所述, 我们得到了定理:

定理 4.6

设 F 是一个域, $\widetilde{R}$ 是 F 的一个扩环, 且 $\widetilde{R}$ 是整环. 任取 $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{R}$.

(1) 若 $\widetilde{\alpha}$ 是 F 上的超越元, 则 $F[\widetilde{\alpha}]$ 同构于 $F[x]$, 从而 $F[\widetilde{\alpha}]$ 不是域.

(2) 若 $\widetilde{\alpha}$ 是 F 上的代数元, 且 $\widetilde{\alpha}$ 在 F 上的极小多项式为 $m(x)$, 则 $m(x)$ 在 F 上不可约, 且 $F[\widetilde{\alpha}]$ 是同构于 $F[x]/(m(x))$ 的域. $F[\widetilde{\alpha}]$ 中的元素可以唯一的表成

$$c_0 + c_1\widetilde{\alpha} + \cdots + c_{r-1}\widetilde{\alpha}^{r-1}.$$

注 4.7. 当 $F[\widetilde{\alpha}]$ 是域时, 我们将其记作 $F(\widetilde{\alpha})$.

定义 4.7

当我们取 $F = \mathbb{Q}, \widetilde{R} = \mathbb{C}$ 时, 如果复数 t 是 $\mathbb{Q}$ 上的代数元, 那么称 t 是一个**代数数**. 相应的, 如果 t 是超越元, 那么称之为**超越数**.

定义 4.8

在复数域 $\mathbb{C}$ 中的一个本原 n 次单位根 $\xi_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ 是一个代数数. 于是 $\mathbb{Q}[\xi_n]$ 是一个域, 称它为**第 n 个分圆域**. 由于本原 n 次单位根有 $\varphi(n)$ 个, 分别记作 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi(n)}$, 令

$$f_n(x) = (x - \eta_1)(x - \eta_2)\cdots(x - \eta_{\varphi(n)})$$

则称 $f_n(x)$ 是 n **阶分圆多项式**. 可以证明 $f_n(x) = m_{\xi_n}(x)$, 其中 $m_{\xi_n}(x)$ 是 ξ_n 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式, 从而

$$\mathbb{Q}(\xi_n) \cong \mathbb{Q}[x]/(f_n(x)).$$

定义 4.9

如果一个复数 α 是一个首项系数为 1 的整系数多项式的根, 那么称 α 是一个**代数整数**.

定义 4.10

对于任意整数 n, m, 复数 $m + n\mathrm{i}$ 是代数整数, 称这种形式的代数整数为**高斯整数**.

§ 2.5　分式域

定义 5.1

设 R 是一个整环, 如果有一个域 F 使得从 R 到 F 有一个单的环同态 σ, 并且 F 中每个元素都可以表成 $\sigma(a)\sigma(b)^{-1}$, 即 ab^{-1} 的形式, 其中 $a \in R, b \in R^*$, 那么把 F 称为 R 的**分式域**. 我们常常把 ab^{-1} 记作 $\dfrac{a}{b}$.

例 5.1. 考虑 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的映射 $\sigma(a) = a$. 那么根据定义 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的分式域.

定理 5.2

设 R 是一个整环, 则存在 R 的分式域, 并且在环同构的意义下, R 的分式域是唯一的.

任一域 F 上的 n 元多项式环 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个整环. 于是存在 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 的分式域, 记作 $F(x_1, \ldots, x_n)$, 它的元素可以表示成

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)},$$

其中 $g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

定义 5.2

$F(x_1, \ldots, x_n)$ 的元素 $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}$ 称为 n **元分式**, 其中 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 称为**分子**, $g(x_1, \ldots, x_n)$ 称为**分母**.

若 $l(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, 则有

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_n)l(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)l(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{2.9}$$

上式称为 n **元分式的基本性质**.

第三章　整环的整除性

§ 3.1　整除关系, 不可约元, 素元, 最大公因子

定义 1.1

设 R 是整环, 对于 $a, b \in R$, 若存在 $c \in R$, 使得 $a = bc$, 则称 b **整除** a, 记作 $b \mid a$. 否则称 b **不能整除** a, 记作 $b \nmid a$. 当 $b \mid a$ 时, 称 b 是 a 的**因子**, a 是 b 的**倍元**.

性质 1.1.

(1) 由整除的定义立即得到: 在整环 R 中, $b \mid a \Leftrightarrow (a) \subseteq (b)$.

(2) 任意元素都是 0 的一个因子. 特别的, 0 也是 0 的因子.

(3) 在整环中 u 可逆 $\Leftrightarrow\ \exists\, v \in R,\ s.t.\ uv = 1 \Leftrightarrow u \mid 1 \Leftrightarrow 1 \in (u) \Leftrightarrow (u) = R$.

(4) 设 u 可逆, 则 $\forall\, a \in R$, 有 $a = u(u^{-1}a)$, 从而 $u \mid a$. 因此可逆元是 R 中任意元素的因子.

(5) 若 $b \mid a_1, b \mid a_2$ 则有

$$b \mid (r_1 a_1 + r_2 a_2), \quad \forall\, r_1, r_2 \in R.$$

定义 1.2

在整环 R 中, 若 $b \mid a \wedge a \mid b$, 则称 a 与 b **相伴**, 记作 $a \sim b$.

容易验证, 相伴是 R 上的一个等价关系.

命题 1.2. 在整环 R 中, $a \sim b$ 当且仅当存在可逆元 u 使得 $a = bu$.

推论 1.3

在整环 R 中, 若 $a \sim b, c \sim d$, 则 $ac \sim bd$.

定义 1.3

在整环 R 中, 若 $b \mid a$ 但是 $a \nmid b$ (即 b 是 a 的一个因子, 但是 b 不是 a 的相伴元), 则称 b 是 a 的一个**真因子**.

定义 1.4

在整环 R 中, a 的任一相伴元, 以及 R 中任一可逆元都是 a 的因子, 称这些因子是 a 的**平凡因子**. 其他因子称为 a 的**非平凡因子**.

定义 1.5

在整环 R 中, 设 $a \neq 0$, 且 a 不可逆. 如果 a 只有平凡因子, 那么称 a 是**不可约的**, 否则称 a 是**可约的**.

利用相伴的性质可以推出, 不可约元的相伴元也是不可约元.

定义 1.6

设 $a \neq 0$, 且 a 不可逆. 如果从 $a \mid bc$ 可以推出 $a \mid b$ 或 $a \mid c$, 那么称 a 是一个**素元**.

命题 1.4. 在整环 R 中, 素元一定是不可约元.

命题 1.5. 在整环 R 中, a 为素元当且仅当 (a) 是非零素理想

定义 1.7

在整环 R 中, 对于 $a, b \in R$. 如果有 $c \in R$ 使得 $c \mid a \wedge c \mid b$ 那么称 c 是 a 与 b 的一个**公因子**. 如果 a 与 b 的一个公因子 d 满足: 对于 a, b 的任一公因子 c 有 $c \mid d$. 那么称 d 是 a, b 的一个**最大公因子**.

性质 1.6. 若 d_1, d_2 是 a 与 b 的最大公因子, 那么从定义 1.7 得出, $d_1 \sim d_2$. 反之, 若 d_1 是 a, b 的最大公因子, 且 $d_1 \sim d_2$, 则 d_2 也是 a 与 b 的一个最大公因子. 记作 (a, b).

命题 1.7. 在整环 R 中, 如果每一对元素都有最大公因子, 那么对任意 $a, b, c \in R$, 有 $(ca, cb) \sim c(a, b)$.

§ 3.2　欧几里得整环, 主理想整环, 唯一因子分解整环

定义 2.1

设 R 为整环, 如果存在 R^* ($R^* = R \backslash \{0\}$) 到 $\mathbb{N}$ 的一个映射 δ, 使得对任意 $a, b \in R \wedge b \neq 0$, 都有 $h, r \in R$ 满足

$$a = hb + r, \quad r = 0 \text{ 或 } r \neq 0 \text{ 且 } \delta(r) < \delta(b),$$

那么称 R 是一个**欧几里得整环**.

定理 2.1

欧几里得整环 R 的每一个理想都是主理想.

定义 2.2

设 R 为整环, 如果 R 的每一个理想都是主理想, 那么称 R 是一个**主理想整环**.

定理 2.2

设 R 是主理想整环, 则

$$a \text{ 是不可约元} \Leftrightarrow (a) \text{ 是非零极大理想.}$$

推论 2.3

设 R 是主理想整环, 则 R 的不可约元 a 一定是素元.

定义 2.3

整环 R 如果满足下列两个条件:

(1) R 中每个非零且不可逆的元素 a 可以分解成有限多个不可约元的乘积

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s;$$

(2) 上述分解在相伴的意义下是唯一的, 即如果 a 有两个这样的分解式:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$$

那么 $s = t$, 并且可以通过适当的调换位置使得 $p_i \sim q_i$.

那么称 R 是一个**唯一因子分解整环**或者**高斯整环**.

定理 2.4

整环 R 如果满足下列两个条件:

(1) **因子链条件**: 在整环 R 中, 如果序列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 中, 每一个 a_i 是 a_{i-1} 的真因子, 那么这个序列是有限序列.

(2) 每一个不可约元都是素元.

那么称 R 是唯一因子分解整环.

命题 2.5. 设 R 是整环, 如果 R 的每一对元素都有最大公因子, 那么 R 的每一个不可约元都是素元.

基于上述命题, 我们可以将定理 2.4 中的条件 2 进行替换.

定理 2.6

若 R 是唯一因子分解整环, 则 R 的每一对元素都有最大公因子.

定理 2.7

主理想整环都是唯一因子分解整环.

定义 2.4

设 R 是唯一因子分解整环, 任给 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$. 用 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 表示 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 的最大公因子. 如果有 $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \sim 1$, 那么称 f 是一个**本原多项式**.

命题 2.8. $R[x]$ 中的可逆元只能是 0 次多项式, 且是 R 的可逆元. 反之, R 的可逆元也是 $R[x]$ 的可逆元. 根据定义, $R[x]$ 的可逆元是零次本原多项式.

命题 2.9. 若 $p(x)$ 是 $R[x]$ 中的一个不可约元, 则 $p(x) \neq 0$, $p(x)$ 不是 R 的可逆元, 并且 $p(x)$ 的因式只有 R 的可逆元和 $p(x)$ 的相伴元. 从而 $p(x)$ 要么是 R 的一个不可约元, 要么是一个次数大于 0 的不可约的本原多项式.

反之, $R[x]$ 的一个不可约的本原多项式是 $R[x]$ 的一个不可约元.

引理 2.10

设 R 是唯一因子分解整环, 则 $R[x]$ 中任一非零多项式 $f(x)$ 可以写成

$$f(x) = df_1(x),$$

其中 $d \in R$ 且 $d \neq 0$, $f_1(x)$ 是一个本原多项式, 并且 d 和 $f_1(x)$ 在相伴的意义下由 $f(x)$ 唯一确定.

引理 2.11.(高斯引理)

设 R 是唯一因子分解整环, 则 $R[x]$ 中两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

引理 2.12

设 R 是唯一因子分解整环, F 是 R 的分式域, 则 $R[x]$ 中两个本原多项式 $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中相伴当且仅当 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $R[x]$ 中相伴.

引理 2.13

§ 3.3　诺特环

定义 3.1

设 R 是一个交换环, 如果 R 的每一条**理想升链**

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$$

都有限, 那么称 R 满足**理想升链条件**, 此时称 R 是一个**诺特环 (Noether ring)**.

推论 3.1

主理想整环都是诺特环.

证明. 因为主理想整环都是唯一因子分解整环, 则对于该环的每一个理想升链, 取其中每个主理想的代表元, 就构成了一个因子链, 从而是有限的. □

定理 3.2

设 R 是一个交换环, 则 R 是诺特环当且仅当 R 的每一个理想都是有限生成的.

定理 3.3.(希尔伯特 (Hilbert) 基定理)

如果 R 是一个有单位元 $1(\neq 0)$ 的诺特环, 那么 R 上的一元多项式环 $R[x]$ 也是诺特环.

推论 3.4

如果 R 是有幺元的诺特环, 那么 R 上的 n 元多项式环 $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 也是诺特环.

证明. 考虑 $R[x_1, x_2]$ 可以视作 $R[x_1]$ 上的一元多项式环 $R[x_1][x_2]$, 从而利用归纳法可知 n 元多项式环也是诺特环. □

命题 3.5. 域 F 是诺特环, 因为 F 只有平凡的理想, 从而 $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是诺特环. 因此 $F[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ 的每个理想都是有限生成的.

第四章　域扩张, 伽罗瓦理论

§ 4.1　域扩张的性质

定义 1.1

如果域扩张 K/F 可以在 F 上添加一个元素 α 得到, 即 $K = F(\alpha)$, 那么称 K 是 F 上的一个**单扩张**.

如果域 F 的一个子环是域, 那么称它为 F 的一个**子域**.

定义 1.2

设 K/F 是一个域扩张, S 是 K 的一个非空子集. 我们把 K 中包含 $F \cup S$ 的一切子域的交称为 F **添加** S **得到的子域**, 或 S **在** F **上生成的子域**, 记作 $F(S)$. 若 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, 则把 $F(S)$ 写成 $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

第五章　模

§ 5.1　环上的模, 子模, 商模, 模同态

定义 1.1

设 M 是一个 Abel 加法群, R 是幺环. 如果 $R \times M$ 到 M 有一个映射: $(r, a) \mapsto ra$, 并且满足下列 4 条法则：$\forall a_1, a_2, a \in M, r, r_1, r_2 \in R$, 有

(1) $r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2$.

(2) $(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a$.

(3) $(r_1 r_2)a = r_1(r_2 a)$.

(4) $1a = a$.

那么称 M 是**环 R 上的一个左模**或**一个左 R-模**.

特别的, 幺环 R 中的加法群 $(R, +)$ 是 R 的一个左模, 称它为 R 的**左正则模**或**左正则 R-模**.

同样, 我们可以类似地定义右模.

定义 1.2

设 M 是一个 Abel 加法群, R 是幺环. 如果 $R \times M$ 到 M 有一个映射: $(r, a) \mapsto ra$, 并且满足下列 4 条法则：$\forall a_1, a_2, a \in M, r, r_1, r_2 \in R$, 有

(1) $(a_1 + a_2)r = a_1 r + a_2 r$.

(2) $a(r_1 + r_2) = ar_1 + ar_2$.

(3) $a(r_1 r_2) = (ar_1)r_2$.

(4) $a1 = a$.

那么称 M 是**环 R 上的一个右模**或**一个右 R-模**.

特别的, 幺环 R 中的加法群 $(R, +)$ 是 R 的一个右模, 称它为 R 的**右正则模**或**右正则 R-模**.

定义 1.3

设 R 是交换幺环, M 是 R 的左模, 令

$$ar := ra, \quad \forall a \in M, r \in R.$$

则 M 也是右模, 此时称 M 是 R-模.

命题 1.1. 设 M 是幺环 R 的左模, 则 $\forall r, r_1, \ldots, r_m \in R, a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, 有

(1) $r0 = 0$.

(2) $r(-a) = -ra$.

(3) $0a = 0$.

(4) $(-r)a = -ra$.

(5) $r\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} ra_i$.

(6) $(\sum\limits_{i=1}^{m} r_i)a = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i a$.

定义 1.4

设 M 是幺环 R 的左模, H 是 M 的非空子集. 如果 $H < M$, 并且对任意的 $r \in R, h \in H$, 都有 $rh \in H$. 那么称 H 是 M 的**子模**.

特别的, 我们称 $\{0\}$ 和 M 是 M 的**平凡子模**.

Part II　数学分析

这部分内容主要参考陆亚明《数学分析入门》[1].

数学分析定义及主要定理

积分表

$\int\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert\right)$
$\int 1$	1

第一章　多元函数极限

§ 1.1　$\mathbb{R}^n$ 中的点集

1.1.1　邻域、开集

定义 1.1.(ε-邻域、去心邻域)

设 $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$ 是一个正实数, 我们称集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$$

为 $\boldsymbol{a}$ 的 ε-邻域, 记作 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$.

称 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \backslash \{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的去心邻域.

定义 1.2.(内点、内部)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{a} \in E$. 若存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \subseteq E$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的内点. E 的全体内点所成之集被称作 E 的内部，记作 E°.

定义 1.3.(外点、外部)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\boldsymbol{a}$ 是 E^c 的内点, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的外点. E 的全体外点所成之集被称作 E 的外部.

定义 1.4.(边界点、边界)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\boldsymbol{a}$ 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的边界点. E 的全体边界点所成之集被称作 E 的边界, 记作 ∂E.

定义 1.5.(开集)

设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 G 中每个点均为内点, 则称 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 即 G 是开集, 当且仅当 $G = G^\circ$.

命题 1.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E° 是开集.

命题 1.2. 我们有

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是开集.

(2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族开集, 则 $\bigcup\limits_{\lambda \in L} G_\lambda$ 也是开集.

(3) 设 $G_1, \cdots, G_m$ 是开集, 则 $\bigcap\limits_{j=1}^{m} G_j$ 也是开集.

定义 1.6.(邻域)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若开集 G 满足 $E \subseteq G$, 则称 G 是 E 的一个邻域. 特别的, 当 $E = \{\boldsymbol{a}\}$ 时我们称 G 是 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域.

1.1.2　聚点、闭集

定义 1.7.(闭集)

设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 F^c 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

命题 1.3. 我们有

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是闭集.

(2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族闭集, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in L} G_\lambda$ 也是闭集.

(3) 设 $G_1, \cdots, G_m$ 是开集, 则 $\bigcup\limits_{j=1}^{m} G_j$ 也是闭集.

定义 1.8.(聚点、导集)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 均有

$$(B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \backslash \{\boldsymbol{a}\}) \cap E \neq \varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 称 E 的全体聚点所成之集为 E 的导集, 记作 E'

定义 1.9.(孤立点)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 $\boldsymbol{a} \in E \backslash E'$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的孤立点.

定义 1.10.(闭包)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 称 $E \cup E'$ 为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$.

命题 1.4. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 $\overline{E}$ 是闭集.

命题 1.5. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E 是闭集当且仅当 $E = \overline{E}$.

命题 1.6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 $\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$.

定义 1.11.(极限、收敛)

设 $\{\boldsymbol{x_m}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, 如果存在 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在正整数 N 满足

$$|\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon, \qquad \forall m > N.$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\{x_m\}$ 的极限, 并称 $\{x_m\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$.

定义 1.12.(柯西列)

若 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_m\}$ 满足: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在正整数 N 使得

$$|\boldsymbol{x_l} - \boldsymbol{x_m}| < \varepsilon, \qquad \forall l, m > N,$$

则称 $\{x_m\}$ 是柯西列.

定理 1.7.(柯西收敛准则)

$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_m\}$ 收敛当且仅当它是柯西列.

定理 1.8.(压缩映像原理)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, $f : E \to E$. 如果存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq \theta|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E,$$

那么存在唯一的 $\boldsymbol{a} \in E$ 使得 $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. 我们称 $\boldsymbol{a}$ 为 f 的不动点.

定义 1.13.(闭矩形)

形如 $[a_1, b_1] \times [a_2, .b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 的集合为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭矩形.

定义 1.14.(直径)

对 $\mathbb{R}^n$ 的任意非空子集 E 记

$$\operatorname{diam}(E) = \sup_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|,$$

并称之为 E 的**直径**.

定理 1.9.(闭矩形套定理)

设闭矩形列 $\{I_m\}$ 满足 $I_{m+1} \subseteq I_m (\forall m \in \mathbb{Z}_{>0})$ 以及 $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam}(I_m) = 0$, 那么存在唯一的 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\boldsymbol{a}\}.$$

定义 1.15.(紧集)

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 K 的每个开覆盖均有有限子覆盖, 那么我们称 K 是一个**紧集**,

命题 1.10. $\mathbb{R}^n$ 中的闭矩形是紧集.

定义 1.16.(有界)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 均有 $|\boldsymbol{x}| \leq M$, 则称 E 是**有界**的.

定理 1.11

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 K 是紧集当且仅当它是有界闭集.

定理 1.12.(波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理)

$\mathbb{R}^n$ 的任意一个有界无限子集必有聚点.

1.1.3　连通集

定义 1.17.(开 (闭) 子集)

设 $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 (相应的, 闭集) S 使得 $A = E \cap S$, 则称 A 是 E 上的开子集 (相应的, 闭子集).

命题 1.13. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \subseteq E$, 那么

(1) A 是 E 的开子集当且仅当对任意的 $\boldsymbol{a} \in A$, 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $E \cap U \subseteq A$.

(2) B 是 E 的闭子集当且仅当 $E \backslash B$ 是 E 的开子集.

定义 1.18.(连通集)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若不存在 E 的两个非空开子集 A 和 B 使得 $A \cup B = E$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的**连通集**.

定义 1.19.(区域、闭区域)

$\mathbb{R}^n$ 中的连通开集被称作**区域**. 如果 E 是区域，那么也将 $\overline{E}$ 称作**闭区域**. 要注意的是, **闭区域**不是**区域**.

命题 1.14. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 那么 E 是 $\mathbb{R}$ 中的连通集当且仅当 E 是区间.

命题 1.15. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集, 且 $E \subseteq S \subseteq \overline{E}$, 那么 S 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集. 特别的 $\overline{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集.

§ 1.2 多元函数的极限

定义 2.1.(极限)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 若存在 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 满足

$$|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in (B(\boldsymbol{a}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{a}\}) \cap E,$$

则称 $\boldsymbol{b}$ 为 f 沿 E 中元素趋于 $\boldsymbol{a}$ 的**极限**.

命题 2.1. (极限的唯一性) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是 f 沿 E 中元素趋于 $\boldsymbol{a}$ 的极限, 则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

定理 2.2.(海涅归结原理)

$\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in E}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ 的充要条件是: 对于 E 中满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$ $(\forall k)$ 的任一序列 $\{x_k\}$ 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.

定理 2.3.(柯西收敛准则)

$\lim\limits_{\underset{E}{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}} f(\boldsymbol{x})$ 存在的重要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in (B(\boldsymbol{a}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{a}\}) \cap E$ 有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon.$$

定理 2.4.(夹逼定理)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点, f, g, h 均是定义在 E 上的函数, 并且存在 $\delta > 0$, 使得存在 $(B(\boldsymbol{a}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{a}\}) \cap E$ 内有 $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x})$. 如果

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in E}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in E}} h(\boldsymbol{x}) = A,$$

那么 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in E}} g(\boldsymbol{x}) = A$.

§ 1.3　连续映射

定义 3.1.(连续)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$. 又设 $\boldsymbol{a} \in E$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ 均有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon,$$

则称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续. 若 f 在 E 的每一点处均连续, 则称 f 在 E 上连续.

注 3.1. 按照上述定义, E 上的任一映射 f 在 E

定理 3.2

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f : E \to \mathbb{R}^m$, 则下列命题等价:

(1) f 在 E 上连续.

(2) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的开集 G, $f^{-1}(G)$ 均是 E 的开子集.

(3) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的闭集 F, $f^{-1}(F)$ 均是 E 的闭子集.

命题 3.3. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f = (f_1, \cdots, f_m)^T : E \to \mathbb{R}^m$, 那么 f 是 E 上的连续函数当且仅当每个 f_j $(1 \leq j \leq m)$ 均是 E 上的连续函数.

定理 3.4

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是连续映射. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $f(K)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集.

定义 3.2.(凸集)

$\mathbb{R}^n$ 的子集 S 被称为凸集当且仅当对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ 均有

$$\{(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} : \lambda \in [0,1]\} \subseteq S.$$

第二章 多元函数的微分

§ 2.1 微分的定义

定义 1.1.(可微)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: E \to \mathbb{R}^m$. 又设 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 若存在线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = \boldsymbol{0},$$

则称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微. 若 f 在 E 中每个点处均可微, 我们就称 f 在 E 上可微.

§ 2.2 方向导数与偏导数

定义 2.1.(方向导数)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$, 且 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 对 $\mathbb{R}^n$ 中给定的非零向量 $\boldsymbol{u}$, 若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

存在, 我们就称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 是可微的, 并将上述极限称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数, 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$.

命题 2.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$, 且 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 若 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微, 则 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的所有方向导数均存在, 并且对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意非零向量 $\boldsymbol{u}$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

定义 2.2.(雅可比矩阵)

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

定义 2.3.(偏导数的链式法则)

如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是一个 m 元可微函数, 并且每个 x_j 均是 n 元可微函数 $x_j(t_1, t_2 \dots, t_n)$, 那么我们也可以把 f 看作变量 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的函数, 于是由链式法则及 (2.1) 知

因此对 $1 \leqslant j \leqslant n$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}. \tag{2.2}$$

这一公式也被称作**偏导数的链式法则**.

定义 2.4.(中值定理)

1

§ 2.3 有限增量定理与泰勒公式

定义 3.1.(范数)

设 $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 定义 L 的范数 $\|L\|$ 为

$$\|L\| = \sup_{|\boldsymbol{h}|=1} |L\boldsymbol{h}|.$$

并且我们有 $|L\boldsymbol{x}| \leq \|L\| \cdot |\boldsymbol{x}|, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

定理 3.1.(有限增量定理)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸开集, $f : E \to \mathbb{R}^m$ 在 E 上可微, 且存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 均有 $\|f'(\boldsymbol{x})\| \leq M$. 那么对任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ 有

$$|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})| \leqslant M|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|.$$

§ 2.4 反函数定理

定理 4.1.(反函数定理)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f : E \to \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$. 又设 $\boldsymbol{a} \in E$. 若 $f'(\boldsymbol{a})$ 非奇异, 那么必存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $f|_U : U \to V$ 是双射. 此外, g 表示 $f|_U$ 的逆映射, 则 $g \in C^1(V)$, 并且对任意的 $\boldsymbol{y} \in V$ 有

$$g'(\boldsymbol{y}) = f'(g(\boldsymbol{y}))^{-1}.$$

换种说法, 如果有

- E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.
- $f: E \to \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$
- $\boldsymbol{a} \in E$, $f'(\boldsymbol{a})$ 非奇异, 即 $\det f'(\boldsymbol{a}) \neq 0$

那么

- 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集
- $f|_U : U \to V$ 是双射.
- 若设 $g = f|_U^{-1}$ 则 $g \in C^1(E)$, 并且对任意的 $\boldsymbol{y} \in V$ 有

$$g'(\boldsymbol{y}) = f'(g(\boldsymbol{y}))^{-1}.$$

§ 2.5　隐函数定理

定理 5.1.(隐函数定理)

设 E 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的开集, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : E \to \mathbb{R}^m$ 连续可微. 又设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 及 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in E$ 且 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$. 现将 f 的雅可比矩阵写成如下分块矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \end{bmatrix}$$

的形式, 其中

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{1\le i,j\le m}.$$

那么当

$$\det \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$$

时, 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U, $\boldsymbol{b}$ 的邻域 V 以及唯一的连续可微映射 $g: U \to V$, 使得

(1) $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$ 有 $f(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.

(3) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$ 有 $\det \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \neq 0$, 并且

$$g'(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})).$$

定义 5.1

在上述定理中, $y = g(\boldsymbol{x})$

第三章　含参变量的积分与反常积分

专题一　欧拉积分

§ 3ε.1　第一型欧拉积分

定义 1.1

我们称 $\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\ (a,b>0)$ 为第一型欧拉积分.

下面我们给出几个它的简单性质.

性质 1.1. 作变量替换 $x=1-t$ 易知 $\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a)$ 也就是说第一型欧拉积分具有对称性.

性质 1.2. 当 $b>1$ 时，由分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a,b)&=\int_0^1(1-x)^{b-1}\mathrm{d}\frac{x^a}{a}\\&=\left.\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\right|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b).\end{aligned}$$

其中第三个等号用到了 $x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$.

由此 $\mathrm{B}(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1)$.

那么由对称性, 我们也能得到 $\mathrm{B}(a,b)=\dfrac{a-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a-1,b)\quad(a>1)$.

而当 a,b 均为正整数时, 我们有

$$\mathrm{B}(n,m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

性质 1.3. 我们作变量替换 $x=\dfrac{y}{1+y}$ 可将 $\mathrm{B}(a,b)$ 转化为无穷积分, 这种形式也有很好的性质.

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\mathrm{d}y$$

而如果令 $b=1-a\ (0<a<1)$ 我们就得到

$$\mathrm{B}(a,1-a)=\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y}\mathrm{d}y$$

而这个积分的值是可以计算的，就是

$$\mathrm{B}(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

§ 3ε.2 第二型欧拉积分

3ε.2.1 定义

定义 2.1

我们称

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ (a>0)$$

为**第二型欧拉积分**.

其实这个 $\Gamma(a)$ 函数在我们之前的课程中也定义过, 不过当时我们是用阶乘函数, 用无穷乘积的形式来定义的.

$$\Gamma(x)=\Pi(x-1)=x^{-1}\Pi(x),$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})(1+\frac{1}{n})^{-x}.$$

下面我们先来探究这两个证明是否等价.

证明. 当 $s>0$ 时有

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{s}\\&=\frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{s}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{s}\\&=\frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^{s}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}.\end{aligned}$$

注意到极限中的内容和我们之前推导的 B 函数的递推式相似, 不难发现, 当我们取 $a=N+1,b=s$ 时, 我们有

$$\mathrm{B}(s,N+1)=\frac{N}{s+N}\mathrm{B}(s,N)=\cdots=B(s,1)\frac{N!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}$$

又由 $\mathrm{B}(s,1)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^0\mathrm{d}x=\frac{1}{s}$
我们可以得到

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^s}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}\\ &= \lim_{N\to\infty}\mathrm{B}(s,1)\frac{N!\cdot N^s}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}\\ &= \lim_{N\to\infty}\mathrm{B}(s,N+1)N^s\\ &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^N\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接着我们做变量替换 $x\to\frac{x}{N}$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^N\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^N\left(\frac{x}{N}\right)^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}\frac{x}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面我们考虑证明

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x\right)=0.$$

由伯努利不等式 $x>-1$ 时, 有 $(1+x)^N\geqslant 1+Nx$.

和不等式 $e^t\geqslant 1+t$, 把 $t=\frac{x}{N}$ 带入得到 $e^{\frac{x}{N}}\geqslant 1+\frac{x}{N}$ 即 $e^x\geqslant(1+\frac{x}{N})^N$.

我们可以得到

$$0\leqslant e^{-x}-(1-\frac{x}{N})^N=e^{-x}\left[1-e^x(1-\frac{x}{N})^N\right]\leqslant e^{-x}\left[1-(1-\frac{x^2}{N^2})^N\right]\leqslant\frac{e^{-x}x^2}{N}.$$

进而有

$$\left|\int_0^N e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x-\int_0^N\left(1-\frac{x}{N}\right)^N x^{s-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^N\frac{e^{-x}x^{s+1}}{N}\mathrm{d}x<\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x.$$

易知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x$ 收敛, 故当 $N\to\infty$ 时, $\displaystyle\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x\to 0$.

进而可知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x\right)=0.$$

即 $\displaystyle\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x,\quad N\to\infty.$

故这两种定义方式等价. □

除此之外, Γ 函数, 还有两种定义方式.

第一种是上述证明过程中出现过的极限定义, 也称**欧拉-高斯公式**.

$$\Gamma(s)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}.$$

第二种则引入了欧拉常数 γ.

设 $H_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, 则称 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}H_n-\ln n$.

那么我们就有 Γ 函数的 **Weierstrass 积形式**.

$$\Gamma(s)=\frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}.$$

3ε.2.2 性质

从我们证明两种定义方式等价的过程中, 不难发现这两类欧拉积分并不是孤立的, 下面我们就来探究这两类欧拉积分的关系.

接下来, 我们证明

性质 2.1.

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\qquad\forall p>0,q>0.$$

证明. 对 $\mathrm{B}(p,q)$ 用 $x=\sin^2\theta$ 换元得到

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta.$$

对 $\Gamma(p)$ 用 $x=s^2$ 换元得到

$$\Gamma(p)=2\int_0^{\infty}s^{2p-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s.$$

我们考虑

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}s^{2p-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s\int_0^{\infty}t^{2q-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

下面我们进行极坐标变换, 令 $s=r\sin\theta,t=r\cos\theta$ 则有 $r^2=s^2+t^2,\mathrm{d}s\mathrm{d}t=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

又由 Γ 函数的连续性, 我们可以对积分符号进行交换, 进而得到.

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\infty} r^{2p+2q-2}e^{-r^2}r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\infty} r^{(p+q)-1}e^{-r}\mathrm{d}r\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$

进而得到

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

推论 2.2

在上述证明过程中, 我们取 $q=\frac{1}{2}$, 则对于 $j>-1$ 我们有

$$\int_0^{\pi}\sin^j\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{B}\left(\frac{j+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2}{2}\right)}$$

性质 2.3. (余元公式)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

为了证明这个事情, 我们先证明一个引理.

引理 2.4

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

证明. 通过二倍角公式, 我们可以将 $\sin(2n+1)x$ 不断升幂, 可以将其表示为形如 $\sin x\cdot P(\sin^2 x)$ 的式子, 其中 $P(x)$ 表示关于 x 的 n 次多项式.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(2n+1)x\sin(x) = 2n+1$, 所以 $P(x)$ 的常数项为 $2n+1$.

同时我们有, $\sin(2n+1)x$ 的根为 $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k\in\mathbb{Z}$, 所以 $\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k=1,2,\ldots,n$ 恰为 $P(x)$ 的 n 个根.

所以

$$P(x) = (2n+1)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right)$$

即

$$P(x)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

故我们有

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=P(\sin^2 x)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

带入 $x\to\frac{x}{2n+1}$

$$\Rightarrow\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{1}{2n+1}x}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$\forall 1\leqslant m<n$ 有

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{1}{2n+1}x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)}=\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时, 左边为

$$\frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}$$

对于右边, 我们考虑下列不等式, 当 n 充分大时.

(1) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$

(2) $\sin^2\frac{1}{2n+1}x<\frac{x^2}{(2n+1)^2}$

(3) $\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}>\frac{4k^2}{(2n+1)^2}$

(4) $\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}<\frac{x^2}{4k^2}$

其中由 (1) 可得 (2), (3), 进而可知 (4).
于是我们有

$$1>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)>\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

所以 $n \to \infty$ 时,

$$1 > \frac{\sin x}{x \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} > \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$$

由 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{4k^2}\right)$ 收敛,
可知 $m \to \infty$ 时

$$\prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) = 1$$

所以由夹逼定理, 我们可以得到

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

□

下面由 Γ 函数的极限定义来证明余元公式

证明.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot N^p \cdot N! \cdot N^{1-p}}{p(p+1)\cdots(p+N)(1-p)(1-p+1)\cdots(1-p+N)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N \cdot N! \cdot N!}{p(1-p^2)(2^2-p^2)\cdots(N^2-p^2)(1+N-p)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{1-p+N} \cdot \frac{1}{p \prod\limits_{k=1}^{N} (1 - \frac{p^2}{k^2})}
\end{aligned}$$

由引理 2.4 可知

$$\sin p\pi = p\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)$$

故

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = 1 \cdot \frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

□

性质 2.5. (倍元公式, 也称勒让德公式)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

在之前的作业中, 我们已经用无穷乘积的定义方式证明过该公式, 下面我们用另一种方式再次证明这个问题.

证明. 由前面给出的性质

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}=\frac{\mathrm{B}(x,\frac{1}{2})}{\Gamma(x)},\quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{\mathrm{B}(x,x)}{\Gamma(x)}.$$

带入之后, 我们只需证明

$$\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{2}\right)=2^{2x-1}\mathrm{B}(x,x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

接下来通过若干次变量替换可得

$$\begin{aligned}
2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t &= \int_0^1 (2t)^{x-1}(2-2t)^{x-1}\mathrm{d}(2t)=\int_0^2 t^{x-1}(2-t)^{x-1}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1}^1 (1+t)^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t=\int_{-1}^1(1-t^2)^{x-1}\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^1(1-t^2)^{x-1}\mathrm{d}t=2\int_0^1(1-t)^{x-1}\mathrm{d}\sqrt{t}\\
&=2\int_0^1(1-t)^{x-1}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)^{x-1}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

这样我们就证明了

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x)=2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

□

3ε.2.3 应用

在之前的作业中, 我们已经证明过了斯特林 (Stirling) 公式. 下面我们用另外的两种方式进行证明.

引理 2.6

对于任意给定的 a 有,

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=x^{-a}+O\left(x^{-a-1}\right)$$

证明. 先假定 $a>1$,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}&=\mathrm{B}(x,a)\\&=\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{x-1}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\\&\triangleq I_1+I_2\end{aligned}$$

下面我们分别对 I_1 和 I_2 进行估计.

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(t+O\left(t^2\right))^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}(1+O\left(t\right))^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 x 充分大时, t 在 0 附近, 我们有, $(1+O\left(t\right))^{a-1}\sim 1+(a-1)O\left(t\right)\sim 1+O\left(t\right)$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}(1+O\left(t\right))^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}(1+O\left(t\right))\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}O\left(t\right)\cdot t^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t+O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot t^{a}\cdot e^{-xt}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

作换元 $t=xt$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t + O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot t^a \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t\right) \\
&= x^{-a} \int_0^{\sqrt{x}} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t + O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot t^a \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t\right) \\
&= x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t + O\left(x^{-a} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t\right) + O\left(x^{-a-1} \int_0^{\sqrt{x}} \cdot t^a \cdot e^{-t} \mathrm{d}t\right)
\end{aligned}
$$

由 Γ 函数收敛, $\int_0^{\sqrt{x}} \cdot t^a \cdot e^{-t} \mathrm{d}t \sim O\left(1\right)$.
而 $\int_{\sqrt{x}}^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t = O\left(\int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
故

$$
I_1 = x^{-a}\Gamma(a) + O\left(x^{-a-1}\right)
$$

$$
I_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} (1-e^{-t})^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t = O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{xe^{\sqrt{x}}}\right) = O\left(x^{-a-1}\right).
$$

因此

$$
I_1 + I_2 = x^{-a}\Gamma(a) + O(x^{-a-1})
$$

$$
\Rightarrow \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a} + O(x^{-a-1})
$$

对于 $0 < a < 1$ 的情况, 我们取 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 使得 $a + k > 1$
可以得到

$$
\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a+k)} = x^{-a-k} + O(x^{-a-k-1})
$$

进而通过 Γ 函数的递推公式可以得到相应的结论. □

定理 2.7.(斯特林公式)

$$
\log\Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + O\left(\frac{1}{s}\right).
$$

证明. 我们先对 x 为正整数的情形进行估计

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(n) &= \log[(n-1)!] = \sum_{k=1}^{n-1}\log k = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log k\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log k - \log t\mathrm{d}t + \int_k^{k+1}\log t\mathrm{d}t \\
&= \int_1^n \log t\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log\frac{t}{k}\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \log\frac{t+k}{k}\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \log(1+\frac{t}{k})\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + O(\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

下面我们将这个结论推广到任意实数上, 令 $x = n + a, 0 < a < 1$
由引理可知

$$
\begin{aligned}
\log\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)} &= \log(n^{-a} + O(n^{-a-1})) \\
&= \log n^{-a} + \log\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -a\log n + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= \log\Gamma(n) + a\log n + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (n-\frac{1}{2})\log n - n + C + a\log n + O\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= (x-a-\frac{1}{2})\log(x-a) - x + a + C + a\log(x-a) + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x-\frac{1}{2})[\log x + \log(1-\frac{a}{x})] - x + a + C + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x-\frac{1}{2})\log x - x + C + (x-\frac{1}{2})\left(-\frac{a}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + a + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x-\frac{1}{2})\log x - x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

下面我们来确定常数 C 的值.
考虑倍元公式

$$\Gamma(2x)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

对两边取对数得

$$\log\Gamma(2x) + \log\Gamma(\frac{1}{2}) = (2x-1)\log 2 + \log\Gamma(x) + \log\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

再带入我们得到的估计式, 并整理可得

$$x\log(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + C + O\left(\frac{1}{x}\right) = \log\Gamma(\frac{1}{2})$$

当 $x \to +\infty$ 时, $x\log(1+\dfrac{1}{2x}) - \dfrac{1}{2} = x\cdot\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} = 0$
故

$$C = \log\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\log 2, \qquad x \to +\infty$$

下面我们来求 $\Gamma(\frac{1}{2})$
由余元公式 $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$
我们取 $p = \dfrac{1}{2}$, 则有 $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
故 $C = \log\sqrt{\pi} + \dfrac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2\pi}$
综上, 我们就得到了斯特林公式

$$\log\Gamma(s) = (s-\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

□

除了这种方式之外, 下面再通过书本习题 14.2 中的一组题来证明这件事.
16. 设 $s \geqslant 2$, 利用 (14.17) 以及变量替换证明

$$\Gamma(s) = (s-1)^s e^{1-s}\int_{-1}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x.$$

证明. 做变量替换 $x \to (s-1)(x+1)$ 则有

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{+\infty} e^{-(s-1)(x+1)}[(s-1)(x+1)]^{s-1}\mathrm{d}x \\ &= (s-1)^s e^{1-s}\int_{-1}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

17. 设 $s\geqslant 2$, 并记 $\delta=s^{-0.4}$, 利用 2.24 证明

$$\int_{-\delta}^{\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2\pi}{s}}+O\left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right).$$

证明. 因为当 $|x|\leqslant\delta$ 时

$\log((1+x)e^{-x})^{s-1}=(s-1)(\log(1+x)-x)=(s-1)(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+O(x^4)).$

所以 $((1+x)e^{-x})^{s-1}=e^{-\frac{s-1}{2}x^2}(1+\frac{(s-1)}{3}x^3+O(sx^4))$, 进而有

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x&=\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\mathrm{d}x+\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x+O\left(s\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}x^4\mathrm{d}x\right)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\mathrm{d}x+O\left(\int_{\delta}^{\infty}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)+\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x\\&\quad+O\left(s\int_0^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}x^4\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

其中

(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{s-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2\pi}{s-1}}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\mathrm{d}x&=\sqrt{\frac{2}{s-1}}\int_{\delta\sqrt{\frac{s-1}{2}}}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\ll\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\delta\sqrt{\frac{s-1}{2}}}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot e^{-\delta\sqrt{\frac{s-1}{2}}}\ll\frac{1}{s\sqrt{s}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

(3) $e^{-\frac{s-1}{2}x^2}\dfrac{x^3}{3}$ 是奇函数积分是 0.

(4)

$$\begin{aligned}s\int_0^{\delta}e^{-\frac{s-1}{2}x^2}x^4\mathrm{d}x&=s\int_0^{\frac{s-1}{2}\delta^2}e^{-x}\frac{4}{(s-1)^2}x^2\mathrm{d}\sqrt{\frac{2}{s-1}x}\\&=\frac{2\sqrt{2}s}{(s-1)^{\frac{5}{2}}}\int_0^{\frac{s-1}{2}\delta^2}e^{-x}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\ll\frac{1}{s\sqrt{s}}.\end{aligned}$$

所以有

$$\int_{-\delta}^{\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2\pi}{s}}+O\left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right).$$

□

18. 通过考察被积函数的单调性证明

$$\int_{-1}^{-\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x \ll \frac{1}{s\sqrt{s}}.$$

证明. 一方面, 因为 $(1+x)e^{-x}$ 在 $[-1,-\delta]$ 上单调递增, 故而

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x &\leqslant ((1-\delta)e^{\delta})^{s-1}=\exp\left((s-1)(\log(1-\delta)+\delta)\right)\\ &=\exp\left(-\frac{s\delta^2}{2}+O(s\delta^3)\right)\ll e^{-\frac{1}{2}s^{0.2}}\ll \frac{1}{s\sqrt{s}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

另一方面, 由 $(1+x)e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上单调递减, 以及 $(1+x)e^{-\frac{x}{2}}$ 在 $\mathbb{R}_{\geqslant 1}$ 上单调递减且 $(1+x)e^{-\frac{x}{2}}\geqslant(1+x)e^{-x}$ 知

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x &= \int_{\delta}^{1}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x\\ &\ll ((1+\delta)e^{-\delta})^{s-1}+\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{s-1}{2}x}\mathrm{d}x\\ &=\exp\left((s-1)(\log(1+\delta)-\delta)\right)+\frac{2}{s-1}e^{-\frac{s-1}{2}}\\ &=\exp\left(-\frac{s\delta^2}{2}+O(s\delta^3)\right)+\frac{2}{s-1}e^{-\frac{s-1}{2}}\\ &\ll e^{-\frac{1}{2}s^{0.2}}+e^{-\frac{s-1}{2}}\ll\frac{1}{s\sqrt{s}}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

所以有

$$\int_{-1}^{-\delta}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{+\infty}((1+x)e^{-x})^{s-1}\mathrm{d}x \ll \frac{1}{s\sqrt{s}}.$$

□

19. 对 $s\geqslant 2$ 证明斯特林公式

$$\log\Gamma(s)=(s-\frac{1}{2})\log s-s+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{s}\right).$$

证明. 有了前几题的铺垫, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(s) &= s\log(s-1)+1-s+\log\left(\sqrt{\frac{2\pi}{s}}+O\left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right)\right)\\
&= s\log(s-1)+1-s+\log\left(\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\right)\\
&= s\log(s-1)+1-s+\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log s+O\left(\frac{1}{s}\right)\\
&= (s-\frac{1}{2})\log s-s+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{s}\right)+s\left(\log\left(1-\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{s}\right)\\
&= (s-\frac{1}{2})\log s-s+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

□

至此, 我们已经重新证明了斯特林公式. 但在此之中我们取 $\delta = s^{-0.4}$ 这个值并不是唯一的, 下面我们在来观察一下 δ 的取值. 我们设 $\delta = s^{-\alpha}$.

首先我们先关注所有用到 δ 取值的等式,(3.1),(3.2)(3.3).

其中 (3.1) 最后一步要成立就得满足 $\alpha < \frac{1}{2}$

(3.2) 最后一步要满足 $3\alpha > 1 \wedge 2\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha < \frac{1}{2}$

(3.3) 要求与 (3.2) 相同

综上 α 的取值范围为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

第四章　重积分

§ 4.1　若尔当测度

4.1.1　简单集合的测度

定义 1.1

设 $I_j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界区间, 我们称 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的矩形. 若 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 E 可表为有限多个矩形的并, 则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单集合. 特别的, 空集也是简单集合.

命题 1.1. 设 E, F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单集合, 则 $E \cup F$, $E \cap F$, $E \backslash F$, $E \Delta F$ 也均是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单集合. 此外, 对任意的 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $E + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} : \boldsymbol{x} \in E\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单集合.

定义 1.2

我们用 $|I|$ 来表示 $\mathbb{R}$ 中有界区间 I 的长度, 由此我们定义 $\mathbb{R}^n$ 中矩形 $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 的体积 $|Q|$ 为

$$|Q| = \prod_{j=1}^{n} |I_j|$$

根据这个定义知, $|Q| = |\overline{Q}|$.

命题 1.2. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个简单集合, 那么

(1) E 可表为有限多个两两不相交的矩形的并, 并称之为 E 的划分.

(2) 若 E 可用如下两种方式写成互不相交的矩形的并

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i = \bigcup_{j=1}^{k} Q'_j,$$

则

$$\sum_{i=1}^{m} |Q_i| = \sum_{j=1}^{j} |Q'_j|.$$

定义 1.3

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个简单集合, $E = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ 是 E 的一个划分, 则记

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} |Q_i|$$

并称之为的测度.

命题 1.3. 设 E, F 均是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单集合, 则

(1) (有限可加性) 若 $E \cap F = \varnothing$, 则 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;

§ 4.2　闭矩形上的积分

§ 4.3　有界集上的积分

§ 4.4　富比尼定理

§ 4.5　变量替换

§ 4.6　反常重积分

定义 6.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果若尔当可测集列 $\{E_m\}$ 满足

$$E_m \subseteq E_{m+1}\ (\forall\, m \geqslant 1) \qquad \text{以及} \qquad \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = E,$$

则称 $\{E_m\}$ 是 E 的一个**穷竭**. 注: 该名称并不是通用的, 仅在陆亚明《数学分析入门》中使用.

定义 6.2

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. 如果对 E 的使得 f 在每个 E_m 上均可积的任意穷竭 $\{E_m\}$, 极限

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f$$

都存在且相等, 那么我们就称 f 在 E 上**可积**, 并将上述极限值记作

$$\int_E f,$$

此时也称积分 $\displaystyle\int_E f$ **收敛**. 否则就称 $\displaystyle\int_E f$ **发散**, 或称 f 在 E 上**不可积**.

引理 6.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, f 是定义在 E 上的函数. 若存在 E 的一个穷竭 $\{E_m\}$, 使得 f 在每个 E_m 上均可积, 那么对于 E 的任一穷竭 $\{F_k\}$, 只要 f 在每个 F_k 上有界, 它就在每个 F_k 上可积.

证明. 考虑 $\{E_m \cap F_k : m \geqslant 1\}$ 是 F_k 的穷竭. 考虑 F_k 的不连续点由 $E_m \cap F_k$ 的内部的不连续点和 $\partial(E_m \cap F_k)$ 中的不连续点构成. 又 E_m 可积, $E_m \cap F_k$ 若当可测. 那么就有上述两部分的点均为勒贝格零测集. 由此 f 在 F_k 上可积. $\square$

命题 6.2. 设 E 若尔当可测且 f 在 E 上可积, $\{E_m\}$ 是 E 的一个穷竭, 那么 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m) = \mu(E)$ 并且

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f = \int_E f.$$

命题 6.3. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个非负函数, 那么 $\displaystyle\int_E f$ 收敛的充要条件是: 存在 E 的穷竭 $\{E_m\}$ 使得 f 在每个 E_m 上均可积, 并且极限

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f$$

存在.

命题 6.4. (比较判别法) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, f 与 g 均是定义在 E 上的非负函数并且

$$f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in E.$$

又设存在 E 的穷竭 $\{E_m\}$ 使得 f 与 g 均在每个 E_m 上可积. 如果 $\displaystyle\int_E g$ 收敛, 那么 $\displaystyle\int_E f$ 也收敛.

命题 6.5. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个无界子集, f 是定义在 E 上的非负函数. 又设对任意的 $m \geqslant 1$, $B(\mathbf{0}, m) \cap E$ 均是若尔当可测集且 f 在其上可积. 此外, 还设存在常数 $p > n$, 使得 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^p}$ 在 $(E \cap B(\mathbf{0}, m)) \backslash B(\mathbf{0}, 1)$ $(m \geqslant 1)$ 上可积, 并且当 $|\boldsymbol{x}|$ 充分大时有

$$f(\boldsymbol{x}) << \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^p},$$

那么 $\displaystyle\int_E f$ 收敛.

命题 6.6. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, f 是定义在 E 上的非负函数, 且 $\boldsymbol{x}_0 \in \partial E$ 是 f 的唯一奇点. 又设对任意的 $m \geqslant 1$, $E\backslash B(\boldsymbol{x}_0, \frac{1}{m})$ 均是若尔当可测集且 f 在其上可积, 此外, 还假设存在常数 $p < n$, 使得函数 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^p}$ 在 $E\backslash B(\boldsymbol{x}_0, \frac{1}{m})$ $(m \geqslant 1)$ 上可积, 并且当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ $(\boldsymbol{x} \in E)$ 时有

$$f(\boldsymbol{x}) << \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^p},$$

那么 $\displaystyle\int_E f$ 收敛.

引理 6.7

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, f 与 g 是定义在 E 上的非负函数. 如果 $\displaystyle\int_E f$ 与 $\displaystyle\int_E g$ 均收敛, 那么 $\displaystyle\int_E f+g$ 也收敛且

$$\int_E f+g = \int_E f + \int_E g.$$

命题 6.8. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. 如果 $\displaystyle\int_E f$ 收敛, 那么 $\displaystyle\int_E |f|$ 也收敛.

命题 6.9. 设 $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 f 在 $E \cup F$ 上有定义, g 在 E 上有定义.

(1) 若 $\displaystyle\int_E f$ 收敛, 则对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_E af$ 收敛, 且

$$\int_E af = a\int_E f.$$

(2) 若 $\displaystyle\int_E f$ 和 $\displaystyle\int_g$ 均收敛, 则 $\displaystyle\int_E (f+g)$ 也收敛, 且

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

(3) 若 E 和 F 无公共内点, 且 $\displaystyle\int_E f$ 与 $\displaystyle\int_F f$ 均收敛, 则 $\displaystyle\int_{E\cup F} f$ 收敛, 且

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

定理 6.10

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, 那么 $\displaystyle\int_E f$ 收敛当且仅当 $\displaystyle\int_E |f|$ 收敛.

注 6.11. 此处重积分与一元反常积分略有差异, 在本节定义 6.2 中需针对任意穷竭, 对应到一元中其实就是在考虑黎曼重排, 而一元中仅仅是条件收敛, 即意味着可以黎曼重排使极限为任意值时, 在本节定义 6.2 下是发散的. 而当一元情形是绝对收敛的, 在该定义下才是收敛的, 故在多元中收敛与绝对值收敛等价.

定理 6.12

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $\varphi : E \longrightarrow \varphi(E)$ 是一个连续可微的双射, 并且对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 而言 $\varphi'(\boldsymbol{x})$ 均非奇异. 又设定义在 $\varphi(E)$ 的函数 f 在 $\varphi(E)$ 的任一若尔当可测紧子集上可积. 那么当

$$\int_{\varphi(E)} f \quad \text{与} \quad \int_E (f \circ \varphi)|\det \varphi'|$$

中有一个收敛时, 另一个必收敛, 且有

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi)|\det \varphi'|$$

专题二　双曲几何下的面积

第五章　曲线积分

§ 5.1　曲线的弧长

定义 1.1

对于空间中的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in [a,b] \\ z = z(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

所定义的曲线段 C, 如果对任意的 $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, 当 $t_1 = a$ 与 $t_2 = b$ 不同时成立时有

$$(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2), z(t_2)),$$

则称 C 是**简单曲线**. 更进一步的, 如果有 $(x(a), y(a), z(a)) = (x(b), y(b), z(b))$ 则称 C 为**简单闭曲线**.

定义 1.2

设曲线段 C 由 (5.1) 所定义. 若存在 $s \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$ 而言, 存在 $\delta > 0$, 对由区间 $[a,b]$ 的任意一组满足 $\max\limits_i \Delta t_i < \delta$ 的分点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

所定义的曲线上的点 $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ 均有

$$\left| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{M_{i-1}M_i} - s \right| < \varepsilon,$$

那么就称曲线段 C 是**可求长的**, 并称 s 是 C 的**弧长**.

类似也可以给出由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{5.2}$$

所定义的平面上的曲线段及其弧长定义.

命题 1.1. 设 C 是由 (5.1) 给出的可求长的曲线段, $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ 是严格单调的满

射, 并记

$$C_1:\begin{cases} x=x(\varphi(u)),\\ y=y(\varphi(u)),\qquad u\in[c,d]\\ z=z(\varphi(u)),\end{cases}$$

那么 C_1 也是可求长的曲线, 且其弧长等于 C 的弧长. 简而言之, 曲线的弧长与参数方程的选取无关.

命题 1.2. 如果 $x(t),y(t),z(t)$ 均在区间 $[a,b]$ 上连续可导, 则由 (5.1) 所定义的曲线段 C 是可求长的, 且弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

命题 1.3. 如果 $x(t),y(t)$ 均在区间 $[a,b]$ 上连续可导, 那么平面上由 (5.2) 所定义的曲线段 C 是可求长的, 且弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

推论 1.4

对于定义在平面上的极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\theta\in[\alpha,\beta])$ 可以将其视作由参数方程

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}\qquad \theta\in[\alpha,\beta] \tag{5.3}$$

那么此时就有

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

例 1.5. 设 $a>0$. 对于**星形线 (astroid)** $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$ 而言, 其弧长为

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t \\ =\ & 3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ =\ & 3a\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\mathrm{d}t=6a. \end{aligned}$$

例 1.6.

命题 1.7. 简单曲线 C 的弧长在正交变换下保持不变.

§ 5.2　第一型曲线积分

定义 2.1

设 C 是一条可求长的曲线, 其两端点是 A 和 B (若是闭曲线则 A 和 B 是一个点), f 是定义在 C 上的一个函数. 如果存在实数 I, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 当我们依次取分点

$$A=M_0,M_1,\dots,M_n=B$$

时, 只要 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i<\delta$ (其中 Δs_i 表示曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长), 就对任意的 $\boldsymbol{\xi}_i\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i-I\right|<\varepsilon,$$

那么就称 I 为 f 在 C 上的**第一型曲线积分 (line integral of the first kind)**, 记作

$$I=\int_C f\ \ \mathrm{d}s.$$

特别地, 当 C 是闭曲线时, 我们也采用记号

$$I=\oint_C f\ \ \mathrm{d}s.$$

注 2.1. 当第一型曲线积分存在时, 积分值与曲线的定向无关.

命题 2.2. 设 C 时一条可求长曲线, f 与 g 是定义在 C 上的两个函数,

(1) 如果 f 与 g 在 C 上的第一型曲线积分都存在, 那么对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g$ 在 C 上的第一型曲线积分存在并且,

$$\int_C (\alpha f+\beta g)\ \mathrm{d}s=\alpha\int_C f\ \mathrm{d}s+\beta\int_C g\ \mathrm{d}s.$$

(2) 如果 $C=C_1\cup C_2$, C_1,C_2 均是可求长曲线, 且公共点为端点, 那么当 C_1,C_2 的第一型曲线积分都存在时, f 在 C 上的第一型曲线积分也存在, 且

$$\int_C f\ \mathrm{d}s=\int_{C_1} f\ \mathrm{d}s+\int_{C_2} f\ \mathrm{d}s.$$

定义 2.2

设 C 是 $\mathbb{R}^3$ 中的**光滑曲线段**, 即存在参数方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[a,b] \\ z=z(t), \end{cases}$$

表示 C, 且 $x(t),y(t),z(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续可微.

取分点, 求黎曼和, 用积分第一中值定理及闵可夫斯基不等式进行等价, 可得上述光滑曲线段的第一型曲线积分为

$$\int_C f(x,y,z)\ \mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\ \mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

类似地, 如果是平面上的曲线, 则有

$$\int_C f(x,y)\ \mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\ \mathrm{d}t. \tag{5.5}$$

§ 5.3　第二型曲线积分

定义 3.1

设 C 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条**定向**的可求长的曲线, **起点**为 A, **终点**为 B, 在 C 上定义映射 $f=(P,Q,R)^T:C\longrightarrow\mathbb{R}^3$. 若存在实数 I, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 当我们在 C 上从 A 到 B 依次取分点

$$A=M_0,M_1,\ldots,M_n=B$$

时, 只要 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{M_{i-1}M_i}<\delta$, 就对任意的 $\boldsymbol{\xi}_i\in\widehat{M_{i-1}M_i}$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left\langle f(\boldsymbol{\xi}_i),\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right\rangle-I\right|<\varepsilon,$$

则称 I 为 $f=(P,Q,R)^T$ 沿定向曲线 C 的**第二型曲线积分 (line integral of the second kind)**. 也称作 f 沿道路 $\widehat{AB}$ 的**第二型曲线积分**, 记作

$$I=\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

特别地, 当 C 是闭曲线时, 我们也采用记号

$$I=\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

类似可定义 $\mathbb{R}^2$ 中定向曲线 C 的第二型曲线积分

$$\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$

注 3.1. 在计算第二型曲线积分时, 需注意曲线的定向, 因为对于以 A,B 为端点的曲线

$$\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=-\int_{\widehat{BA}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

命题 3.2. 设 $\widehat{AB}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条可求长的定向曲线, $f=(P_1,Q_1,R_1)^T$ 和 $g=(P_2,Q_2,R_2)^T$ 均是从 $\widehat{AB}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射.

(1) 若 f,g 沿 $\widehat{AB}$ 的第二型曲线积分均存在, 则对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g$ 沿 $\widehat{AB}$ 的第二型曲线积分也存在, 并且等于

$$\alpha\left(\int_{\widehat{AB}}P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z\right)+\beta\left(\int_{\widehat{AB}}P_2\,\mathrm{d}xQ_2\,\mathrm{d}yR_2\,\mathrm{d}z\right).$$

(2) 设 D 是 $\widehat{AB}$ 上一点, 如果 f 沿 $\widehat{AD}$ 和 $\widehat{DB}$ 的第二型曲线积分均存在, 则 f 沿 $\widehat{AB}$ 的第二型曲线积分也存在, 并且等于

$$\int_{\widehat{AD}}P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z+\int_{\widehat{DB}}P_1\,\mathrm{d}x+Q_1\,\mathrm{d}y+R_1\,\mathrm{d}z.$$

设 $\widehat{AB}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的定向光滑曲线段, 再设

$$f(P,Q,R)^T:\widehat{AB}\longrightarrow\mathbb{R}^3.$$

则有

$$\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t$$

§ 5.4　格林公式

定义 4.1

对于 $\mathbb{R}^2$ 平面上的有界闭区域 D, 其边界 ∂D, 是由有限条光滑曲线组成. 当在边界上行走时, 如果与之相邻的区域的内部总是在左侧, 则称这个方向是**正向**

定理 4.1.(格林公式)

设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭区域, ∂S 由有限多条分段光滑曲线组成, 若 $P, Q \in C^1(S)$, 则

$$\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5.6}$$

其中 ∂S 的定向为正向.

在定理 4.1 条件下, 再设 $u(x,y)$ 在 S 上连续可微, 那么将 (5.6) 中的 P 换为 uP, 并取 $Q=0$ 可得

$$\int_{\partial S} uP\,\mathrm{d}x = -\iint\limits_S \frac{\partial(uP)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_S \left(P\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

也即

$$-\iint\limits_S u\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial S} uP\,\mathrm{d}x + \iint\limits_S P\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.7}$$

同理, 将 Q 换为 uQ 可得,

$$\iint\limits_S u\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial S} uQ\,\mathrm{d}y - \iint\limits_S Q\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.8}$$

相加后可得,

$$\iint\limits_S u\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{\partial S} uP\,\mathrm{d}x + uQ\,\mathrm{d}y\right) - \iint\limits_S \left(Q\frac{\partial u}{\partial x} - P\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.9}$$

以上三式均被称作**平面上的分部积分公式**.

定义 4.2

对于 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域 D, 若 D 中任意一条简单闭曲线所围成的区域均包含于 D, 则称 D 是**单连通的 (simply connected)**, 否则称 D 为**多连通的 (multiply connected)** 或者称作**复连通的**.

命题 4.2. 利用格林公式计算闭曲线围成的面积. 设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界闭区域, 且 ∂S 由有限多条光滑曲线组成, 那么由格林公式知

$$\mu(S) = \iint\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial S} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial S} y\,\mathrm{d}x. \tag{5.10}$$

更进一步的, 有

$$\mu(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

虽然看上去 (5.11) 和 (5.10) 没有实质上的差异. 但在实际计算中, 如果曲线有一定的对称性 (5.11) 能带来很大的便利.

定理 4.3

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个单连通区域, $P, Q \in C^1(D)$, 则下列命题等价:

(1) 对 D 中任意两点 A, B 以及 D 中从 A 到 B 的任意两条分段光滑曲线 C_1, C_2 有

$$\int_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{C_2} P\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y.$$

即第二型曲线积分与路径无关.

(2) 对于 D 中由有限多条光滑曲线组成的任一闭曲线 C 有

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$$

(3) 在 D 上有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

§ 5.5 应用: 调和函数

定义 5.1

设 D 是一个平面 (闭) 区域, f 是定义在 D 上的具有二阶偏导数的函数, 若在 D 上有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

则称 f 是 D 上的**调和函数 (harmonic function)**.

通常记

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

并称 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为**拉普拉斯算子 (Laplace operator)**.

性质 5.1. (拉普拉斯算子在正交变换下的不变性) 设 f 是 C^2 类的调和函数,

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一个正交矩阵, $g(x,y)=f(ax+by,cx+dy)$. 则有 $\Delta f=\Delta g$.

证明. 记 $x'=ax+by, y'=cx+dy$, 利用偏导数的链式法则可得

$$\begin{aligned}
\Delta g=&\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\\
=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\\
=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot c\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot b+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot d\right)\\
=&\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot c\right)\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot c\right)\frac{\partial y'}{\partial x}\\
&+\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot b+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot d\right)\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot b+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot d\right)\frac{\partial y'}{\partial y}\\
=&(a^2+b^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}+(c^2+d^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+(ac+ac+bd+bd)\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'}\\
=&\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\Delta f.
\end{aligned}$$

上述最后一行利用了正交矩阵的性质, 任意两行向量点积是 0, 即 $ac+bd=0$.

更进一步的, 如果是 n 元调和函数 $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ 其中, $(x_1',\ldots,x_n')^T=A(x_1,\ldots,x_n)^T$, 且 A 是 n 阶正交矩阵.

那么有 $\dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}=a_{i,j}$.

则

$$\begin{aligned}\Delta g=&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\\=&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x'_j}\cdot\frac{\partial x'_j}{\partial x_i})\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x'_k}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x'_j}\cdot a_{j,i})\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x'_k}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x'_j}\cdot a_{j,i})a_{k,i}\\=&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{k,i}a_{j,i}\frac{\partial^2 f}{\partial x'_k\partial x'_j}\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^f}{\partial x'^2_k}=\Delta f.\end{aligned}$$

利用到了 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{j,i}a_{k,i}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ □

引理 5.2

设 D 是平面上由有限多条光滑曲线所围城的有界闭区域, u 和 v 是定义在 D 上的两个函数, 且 $u\in C^2(D)$, $v\in C^1(D)$, 则

$$\iint\limits_{D} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

第六章　曲面积分

§ 6.1　曲面的面积

定义 1.1

设 Ω 时 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域, $D \subseteq \Omega$, 且 D 是由分段光滑曲线所围成的有界闭区域. 若存在 Ω 上的映射

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega \tag{6.1}$$

满足

(1) $\boldsymbol{r} \in C^1(\Omega)$.

(2) $\boldsymbol{r}$ 在 D° 上是双射, 并且对任意的 $(u,v) \in D^\circ$ 有 $\boldsymbol{r}_u \times r_v \neq \mathbf{0}$, 其中 $\times$ 为向量积且称 $\boldsymbol{r}(D)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个**光滑曲面**.

若 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 由有限多个光滑曲面拼接而成, 则称之为**分片光滑曲面**.

定义 1.2

设 $\Omega, D, \boldsymbol{r}$ 如定义 1.1 中所给出, $S = \boldsymbol{r}(D)$ 是由方程 (6.1) 定义的光滑曲面, 那么 S 的面积为

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \tag{6.2}$$

如果 S 是由若干光滑曲面拼接而成, 且这些光滑曲面至多在边界处有公共点, 那么 S 的面积就定义为 S_i 的面积和.

命题 1.1. 和曲线积分类似, 曲面的面积和参数方程的选取无关.

定义 1.3.(高斯 (Gauss) 系数)

为了方便我们将, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ 记作 x_u. 同理有 y_u, z_u, x_v, y_v, z_v.
我们设

$$\begin{cases} E = |\boldsymbol{r}_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = |\boldsymbol{r}_v|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases} \tag{6.3}$$

我们称 E, F, G 为**高斯 (Gauss) 系数**或**曲面的第一基本量**.

此时, 式 (6.2) 就变为

$$\iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{6.4}$$

§ 6.2 第一型曲面积分

§ 6.3 曲面的侧与定向

§ 6.4 第二型曲面积分

§ 6.5 高斯公式

§ 6.6 斯托克斯公式

第七章　Fourier 分析初步

定义

设 S 是一个非空集合, 我们用 $\mathbb{C}^S$ 表示从 S 到 $\mathbb{C}$ 的全部映射所成之集, 也即定义在 S 上的全体复值函数所成之集.

对任意的 $f, g \in \mathbb{C}^S$ 以及 $\lambda \in \mathbb{C}$, 令

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \end{aligned} \qquad \forall x \in S.$$

则在上述运算下 $\mathbb{C}^S$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 从而 $\mathbb{C}^S$ 有一个基.

§ 7.1　Fourier 级数定义

定义 1.1.(复值函数积分)

对于复值函数 $g(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$. 若 $u(x), v(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可积, 则定义

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x.$$

不难验证, 按上述定义的复值函数积分, 也满足实值函数积分的运算法则, 如分部积分以及微积分学基本定理.

定义 1.2

设 ℓ 是一个正常数, 记 $e(t) := e^{2\pi \mathrm{i}t}$, 我们称形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{\ell}\right) \tag{7.1}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right) \tag{7.2}$$

的关于变量 x 的函数项级数为**三角级数 (trigonometric series)**, 其中 (7.1) 的级数收敛是指极限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right)$$

存在. 我们称以上两个级数的部分和为**三角多项式 (trigonometic ploynomial)**.

利用欧拉公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 我们可以探究 (7.1) 和 (7.2) 之间的关系.

如果记

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{a_0}{2}, \\ c_n=\dfrac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}, \quad c_{-n}=\dfrac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}, \quad \forall n\geqslant 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

那么就可以将 (7.1) 变为 (7.2) 的形式.

注 1.1. $a_n,b_n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow c_n=\overline{c_{-n}}$.

我们把在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 或者在 $[a,b]$ 上有有限多个奇点但积分 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛的全体实值函数所成之集记作 $\mathscr{R}[a,b]$.

定义 1.3

设 ℓ 是一个正实数, $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 ℓ 为周期的函数, 并且 $f\in\mathscr{R}[0,\ell]$.

我们记

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad \forall n\geqslant 0. \tag{7.4}$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad \forall n\geqslant 0. \tag{7.5}$$

$$c_n=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)e\left(-\frac{nx}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n\geqslant 0. \tag{7.6}$$

由上三式定义的三角级数称作 $f(x)$ 的 **Fourier 级数 (Fourier series)** 或 **Fourier 展开式 (Fourier expansion)**, 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\right)$$

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne\left(\frac{nx}{\ell}\right)$$

称 a_n,b_n,c_n 为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数**. 通常将 c_n 记作 $\hat{f}(n)$.

注 1.2. 上述定义中采用 $\sim$ 的记号是因为目前我们并不知道 $f(x)$ 的 Fourier 级数是否收敛于 $f(x)$.

定义 1.4

设 f 是定义在 $(0,\ell)$ 上的函数, 如果以 2ℓ 为周期的函数 g 满足

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell) \\ f(-x), & x\in(-\ell,0). \end{cases}$$

则称 g 为 f 的**偶性延拓**, 此时 g 是 $(-\ell,\ell)\backslash\{0\}$ 上的偶函数.

如果以 2ℓ 为周期的函数 h 满足

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell) \\ -f(-x), & x\in(-\ell,0). \end{cases}$$

则称 g 为 f 的**奇性延拓**, 此时 h 是 $(-\ell,\ell)\backslash\{0\}$ 上的奇函数.

为了方便, 我们将 f 作偶性延拓/奇性延拓得到的函数仍记作 f.

定义 1.5

如果对 f 做偶性延拓, 那么它的 Fourier 级数中只含有余弦项, 称为 $f(x)$ 的**余弦级数**, 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell},$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x. \tag{7.7}$$

如果对 f 做奇性延拓, 那么它的 Fourier 级数中只含有正弦项, 称为 $f(x)$ 的**正弦级数**, 记作

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell},$$

其中

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\mathrm{d}x. \tag{7.8}$$

§ 7.2　局部化原理

引理 2.1.(黎曼-勒贝格引理)

设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$(这里 a 可以是 $+\infty$, b 可以是 $+\infty$), 那么

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)e(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

特别地, $\lim\limits_{|n|\to\hat{f}(n)} = 0.$

注 2.2. 由引理 2.1 以及

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{,} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{.}$$

我们可以推出

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0.$$

进而可以得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

下面研究 $f(x) \in \mathscr{R}[0,1]$ 的 Fourier 级数的收敛性问题. 而对于周期是一般的正实数的情形, 可以通过伸缩变换或者类似的讨论研究.

此时 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e(nx),$$

其中

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e(-nt)\,\mathrm{d}t. \tag{7.9}$$

用

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e(nx)$$

表示该 Fourier 级数的部分和, 那么将 (7.9) 代入可得

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e(nx)\int_0^1 f(t)e(-nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\sum_{n=-N}^{N} e(n(x-t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7.10}$$

定义 2.1.(狄利克雷核)

上式中 $D_N(y) := \sum\limits_{n=-N}^{N} e(ny)$ 称为**狄利克雷核 (Dirichlet kernel)**.

首先, $D_N(y)$ 是以 1 为周期的偶函数.
$y=0$ 时, 有 $D_N(0)=2N+1$.
$y\in(0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \frac{e(-Ny)(e((2N+1)y)-1)}{e(y)-1} = \frac{e\left(\frac{2N+1}{2}y\right)-e\left(-\frac{2N+1}{2}y\right)}{e\left(\frac{y}{2}\right)-e\left(-\frac{y}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi y}{\sin\pi y}. \end{aligned}$$

那么在 (7.10) 中作变量替换 $t\mapsto x-t$ 可得

$$S_N(x)\int_{x-1}^{x} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

又被积函数的周期是 1. 所以

$$S_N(x) = \int_0^{\frac12} (f(x+t)+f(x-t))D_N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.11}$$

此外, $D_N(t)$ 是偶函数.

$$\int_0^{\frac12} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac12\int_{-\frac12}^{\frac12} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac12\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\frac12}^{\frac12} e(nt)\,\mathrm{d}t = \frac12. \tag{7.12}$$

上述求和考虑交换积分求和号后用等比数列求和公式.

定理 2.3.(黎曼局部化原理)

假设 f 是以 1 为周期的函数并且 $f\in\mathscr{R}[0,1]$, 那么对给定的 x, f 的 Fourier 级数在点 x 处收敛于 s 当且仅当存在 $\delta>0$ 使得

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t)-2s)\frac{\sin(2N+1)\pi t}{t}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{7.13}$$

定理 2.4.(迪尼判别法)

设 f 是以 1 为周期的函数并且 $f \in \mathscr{R}[0,1]$, 如果对给定的 x 及 s, 存在 $\delta \in (0,1)$ 使得 $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}$ 是关于变量 t 的属于 $\mathscr{R}[0,\delta]$ 的函数 (单独定义该函数在 0 处的值), 那么 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 s.

定义 2.2

设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (事实上, 只要求去心邻域内) 内有定义, 若存在常数 $L>0$ 及 $\alpha>0$ 使得对任意的 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 有

$$|f(x)-f(x_0-0)| \leqslant L|x-x_0|^{\alpha},$$

且对任意的 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 有

$$|f(x)-f(x_0+0)| \leqslant L|x-x_0|^{\alpha}.$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 α **阶利普希茨条件**

注. 上述定理中 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 分别表示 $f(x)$ 在 x_0 处的左/右极限.

注 2.5. 一般而言, 我们不会去研究 $\alpha>1$ 时的情况, 因为当 $\alpha>1$ 时, 考虑

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant Lx^{\alpha-1},$$

当 $x \to x_0$ 时, 右侧为 0 即 $f'(x)=0$, $f(x)$ 是常值函数.

推论 2.6

设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathscr{R}[0,1], \alpha \in (0,1]$. 如果 f 在 x 的附近满足 α 阶利普希茨条件, 那么 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. 特别地, 若 x 是 f 的连续点, 则 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $f(x)$.

证明. 考虑证明 $s=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 满足定理 2.4 的条件. □

Part III　常微分方程

常微分方程定义及主要定理

Bernoulli 方程

Riccati 方程

平衡点

第一章　一阶微分方程

定理 0.1.(解的存在唯一性)

§ 1.1　线性方程

(1) 线性齐次方程: 形如 $y'+p(x)y=0$. 考虑积分因子 $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

其解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(2) 线性非齐次方程: 形如 $y'+p(x)y=g(x)$. 考虑如上积分因子.

其解为 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C+\int g(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$.

(3) Bernoulli 方程: 形如 $y'+p(x)y=g(x)y^{\alpha}$.

当 $a\neq 0,1$ 时, 两边同乘 y^{-a} 得

$$y^{-a}y'+p(x)y^{1-a}=g(x)$$

引入新变量 $z=y^{1-a}$ 可得 $z'+(1-a)p(x)z=(1-a)g(x)$.

之后用线性方程求解即可.

§ 1.2　变量可分离方程

(1) 变量可分离: 形如 $y'=f(x)g(y)$.

当 $g(y)\neq 0$ 时, 可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

那么就可以对两边同时积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C.$$

注: 该方法当 $g(y)=0$ 时一般会存在特解.

(2) 齐次方程: 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(\dfrac{y}{x})$.

引入新变量 $y=xz$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

可将方程变为

$$z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=F(z)$$

整理后即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{F(z) - z}{x}.$$

这样就转化为了变量可分离方程.

(3) 线性分式方程: 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}.$$

当

$$\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

即 $\exists\, x_0, y_0,\ s.t. a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \wedge a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$

那么就可以做变量替换 $x = u + x_0, y = v + y_0$.

整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

再上下同时除以 u, 就可以得到转化为齐次方程.

§ 1.3 全微分方程

定义 3.1

设 $u = F(x, y)$ 是一个连续可微得二元函数, 则它的全微分为

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}F(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

定义 3.2

若有函数 $F(x, y)$, 使得

$$\mathrm{d}F(x, y) = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y,$$

则称

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

为**全微分方程**, 此时解就为 $F(x, y) = C$.

定理 3.1

设函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在一个矩形区域 R 中连续且有连续得一阶偏导数, 则

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为全微分方程得充要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

当我们在 R 中任取一点 $P(x_0,y_0)$ 就可以得到一个解

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}N(x_0,s)\mathrm{d}s.$$

1.3.1　积分因子

定义 3.3

如果有函数 $\mu(x,y)$ 使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$ 是**积分因子**.

定理 3.2

微分方程有一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

仅与 x 有关. 且积分因子 $\mu(x,y)=\exp\left(\displaystyle\int\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\mathrm{d}x\right)$.

同理, 有一个仅依赖于 y 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$$

仅与 y 有关.

常见积分因子:

$$
\begin{aligned}
&x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x = 0, && \frac{1}{xy}\\
&x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0, && \frac{1}{x^2}\\
&x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0, && \frac{1}{y^2}\\
&x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\mathrm{d}y = 0, && \frac{1}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

§ 1.4 变量替换法

(1) 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)$

引入变量 $z = ax+by+c$ 得到 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

可将方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + bf(z).$$

就变为了变量可分离方程, 其通解为

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} = x + C.$$

(2) 形如 $yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$

引入变量 $z = xy$, 则 $\mathrm{d}y = \dfrac{x\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x}{x^2}$

原方程可化为

$$\frac{z}{x}(f(z)-g(z))\mathrm{d}x + g(z)\mathrm{d}z = 0.$$

这是个变量可分离方程.

(3) Riccati 方程. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + f(x).$$

§ 1.5 一阶隐式微分方程

(1) Clairaut 方程.

第二章　二阶及高阶微分方程

n 阶方程的一般形式

$$F(t,x,x',\dots,x(n))=0. \tag{2.1}$$

当 $n\geqslant 2$ 时, 统称为高阶微分方程. 一般的 n 阶微分方程的通解含有 n 个独立的任意常数.

§ 2.1　可降阶的高阶方程

2.1.1　不显含未知函数 x 的方程

定义 1.1

更一般的, 设未知函数 x 及其直到 $k-1$ 阶导数均不显含, 即形如

$$F(t,x^{(k),x^{(k+1)},\dots,x^{(n)}})=0. \tag{2.2}$$

考虑令 $x^{(k)}=y$, 就可把上述方程化为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t,y,y',\dots,y^{(n-k)})=0. \tag{2.3}$$

如果能求得 $y=\varphi(t,c_1,c_2,\dots,c_{n-k})$. 则对 y 进行 k 次积分即可得到 x.

2.1.2　不显含自变量 t 的方程

定义 1.2

一般形式为

$$F(x,x',\dots,x^{(n)})=0. \tag{2.4}$$

考虑用 $y=x'$ 作为新的未知函数, 而把 x 作为新的自变量, 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

$$\dots\dots$$

通过此方法可以将方程降低一阶.

2.1.3 全微分方程和积分因子

定义 1.3

若高阶微分方程可看作

$$F(t,x,x',\dots,x^{(n)})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}).$$

则称原方程是**全微分方程**. 并且 $\phi(t,x,x',\dots,x^{(n-1)})=c_1$ 的通解也是原方程的通解.

类似的, 我们也可以选择适当的**积分因子**使原方程乘上积分因子后是全微分方程.

例 1.1. 设 $y=a\mathrm{ch}\frac{x}{a}=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ 表示的曲线叫做**悬链线**.

§ 2.2 线性微分方程的基本理论

2.2.1 线性微分方程的有关概念

定义 2.1

将未知函数 x 及其各阶导数均为一次的 n 阶方程称为 n **阶线性微分方程**. 它的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t), \tag{2.5}$$

定理 2.1

如果方程 (2.5) 的系数 $a_i(t)$ 及右端函数 $f(t)$ 在区间 $a<t<b$ 上连续, 则对任一 $t_0\in(a,b)$ 及任意 $x_0,x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n-1)}$, 方程 (2.5) 存在唯一的解 $x=\varphi(t)$, 满足下列初始条件:

$$\varphi(t_0)=x_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=x_0^{(1)}\cdots.$$

为了方便描述, 引入下述记号:

$$L[x]=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x, \tag{2.6}$$

并把 L 称为**线性微分算子**.

性质 2.2. $L[cx]=cL[x]$, 其中 c 是常数.

性质 2.3. $L[x_1+x_2]=L[x_1]+L[x_2]$.

2.2.2　齐次线性方程解的性质和结构

设齐次线性方程

$$L[x]=0 \tag{2.7}$$

定理 2.4.(叠加原理)

如果 $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_k(t)$ 是方程 (2.7) 的 k 个解, 则它们的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{k}c_ix_i(t)$ 也是该方程的解.

§ 2.3　线性齐次常系数方程

对于常系数微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0. \tag{2.8}$$

称

$$F(\lambda):=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{2.9}$$

为 (2.8) 的特征方程.

§ 2.4　微分方程组

第三章　非线性微分方程组

§ 3.1　自治微分方程与非自治微分方程、动力系统

对于一般的 n 阶非线性微分方程

$$y^{(n)} = G(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.1}$$

可通过变换 $x_y, x'_y, \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ 化为如下一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2, \cdots, \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t} = x_n, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = G(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

所以我们接下来研究更一般的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{3.2}$$

我们将上述方程组简记为向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.3}$$

其中,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

如果上述方程组有初值

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})^T. \tag{3.4}$$

则该初始值问题也存在类似定理 0.1 的解的存在唯一性定理.

定义 1.1

微分方程组 (3.2) 在 $n+1$ 维空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{t, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 中确定了一个向量场, 而初始值问题 (3.3),(3.4) 的解 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 就是向量场中的一条**积分曲线**. 当 (3.3) 中函数 $\boldsymbol{F}$ 满足解的唯一存在性条件时, 向量场中任一点有且仅有一条积分曲线经过.

定义 1.2

如果把 t 理解为时间参数, 只考虑 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 构成的空间 $\mathbb{R}^n$, 我们将这个空间称为方程组 (3.3) 的**相空间**, 积分曲线在相空间的投影曲线称为方程组的**轨线**.

定义 1.3

当方程组 (3.3) 中的函数 $\boldsymbol{F}$ 显含 t 时, 称该方程组为**非自治微分方程组**.

如果函数 $\boldsymbol{F}$ 中不显含 t, 即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \tag{3.5}$$

则称为**自治微分方程组**.

定义 1.4

系统 (3.3) 的常数解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 称为系统的**平衡点** (**奇点**或**驻点**)

定义 1.5

系统 (3.3) 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, 若存在常数 $T > 0$ 满足 $\forall t \in \mathbb{R}, s.t.\ \boldsymbol{x}(t+T) = \boldsymbol{x}(t)$. 则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 是一个**周期解**.

定义 1.6

设 (3.3) 的右端函数 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 对于 $x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ 连续, 关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件且有一个解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)$.

现给定 $t_0 \in \mathbb{R}$ 并设 $\boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{\Phi}(t_0)$. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在至多依赖 ε, t_0 的 $\delta > 0$, 使得对于 (3.3) 的任意满足 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$, 只要

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\Phi}_0\| < \delta \tag{3.6}$$

就有

$$\|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\Phi}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.7}$$

就称解 $x = \boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 Lyapunov 意义下稳定的, 简称**稳定的**, 否则称**不稳定的**.

特别的, 如果 δ 至多依赖 ε 而与 t_0 的取值无关, 那么称该解是 Lyapunov 一致稳定的.

定义 1.7

如果 (3.3) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是稳定的, 且存在一个常数 $\delta_0>0$, 使得对一切满足

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\Phi}_0\|<\delta_0 \tag{3.8}$$

的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 都有

$$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\Phi}(t)\|=0. \tag{3.9}$$

则称该解是**渐进稳定的**.

定义 1.8

如果 (3.3) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是渐进稳定的且存在区域 D_0, 只要 $\boldsymbol{x}_0\in D_0$ 就有

$$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\Phi}(t)\|=0.$$

则称 D_0 为该解的**吸引域**.

特别的, 如果某个解的吸引域是全空间, 则称此解是**全局渐进稳定的**.

注 1.1. 在研究某个解的稳定性时, 总可以用变换

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{3.10}$$

从而将 (3.3) 化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}), \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\Phi})-\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\Phi})$. 且显然有 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{0})=0$. 即该特解对应着新方程的零解, 所以我们接下来主要研究零解.

习题　3.1

1. 试给出一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(t)x$$

的零解稳定或渐进稳定的充要条件.

解. 该方程的解为 $x(t)=x(0)e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$.
根据稳定性定义, 取 $t_0=0$, 则要求 $|x_0|<\delta$ 时 $|x(t)|<\varepsilon$
那么则需要 $e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ 有界.
渐近稳定, 又需满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$.

那么还需要条件 $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\int_0^t a(s)\ \mathrm{d}s} = 0.$ □

2. 给定极坐标系下的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} r^2 \sin\dfrac{1}{r}, & r > 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

(1) 证明平衡点 $(0,0)$ 是稳定的, 但不是渐近稳定的.

(2) 试作出 $(0,0)$ 邻域的相图.

(1) **证明.** 当 $r \in (\dfrac{1}{2k\pi+\pi}, \dfrac{1}{2k\pi})$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} > 0$, 那么当 r_0 在这个区间内时, 根据 r 的连续性且 $r = \dfrac{1}{2k\pi}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$, 可推出 $r(t) \leqslant \dfrac{1}{2k\pi}$.

类似的可以证明 $r(t) \geqslant \dfrac{1}{2k\pi+\pi}$.

那么只需取最大的 k 满足 $\dfrac{1}{2k\pi} < \sqrt{\varepsilon}$, 那么当 $r_0^2 < \delta = \dfrac{1}{2k\pi}$ 时就有 $r(t)^2 < \varepsilon$. 进而说明 $(0,0)$ 是稳定的.

同时在上述过程中我们也说明了 $r(t)$ 在 $t \to +\infty$ 时不是 0. □

§ 3.2 自治微分方程组解的性质

习题 3.2

1.

解. 解空间: $x(t) = x_0 \cos t, y(t) = x_0 \sin t$.
轨线: $x^2 + y^2 = x_0^2$. □

2.

解. □

参考文献

[1] 陆亚明. 数学分析入门 [M]. [S.l.] : 高等教育出版社, 2023.

[2] 丘维声. 近世代数 [M]. [S.l.] : 北京大学出版社, 2015.

致　　谢