题目：欧拉积分

作者：数学强基 2301 刘欣楠

关键词：无穷乘积、反常积分、含参积分

目　录

1 第一型欧拉积分

定义 1.1. 我们称 $\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\ (a,b>0)$ 为第一型欧拉积分.

下面我们给出几个它的简单性质.

性质 1.1. 作变量替换 $x=1-t$ 易知 $\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a)$ 也就是说第一型欧拉积分具有对称性.

性质 1.2. 当 $b>1$ 时，由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(a,b)&=\int_0^1(1-x)^{b-1}\mathrm{d}\frac{x^a}{a}\\
&=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\bigg|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b).
\end{aligned}$$

其中第三个等号用到了 $x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$.
由此 $\mathrm{B}(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1)$.
那么由对称性, 我们也能得到 $\mathrm{B}(a,b)=\dfrac{a-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a-1,b)\quad(a>1)$.
而当 a,b 均为正整数时, 我们有

$$\mathrm{B}(n,m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

性质 1.3. 我们作变量替换 $x=\dfrac{y}{1+y}$ 可将 $\mathrm{B}(a,b)$ 转化为无穷积分, 这种形式也有很好的性质.

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\mathrm{d}y$$

而如果令 $b=1-a\ (0<a<1)$ 我们就得到

$$\mathrm{B}(a,1-a)=\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{1+y}\mathrm{d}y$$

而这个积分的值是可以计算的，就是

$$\mathrm{B}(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

2 第二型欧拉积分

2.1 定义

定义 2.1. 我们称

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x \ (a > 0)$$

为第二型欧拉积分.

其实这个 $\Gamma(a)$ 函数在我们之前的课程中也定义过, 不过当时我们是用阶乘函数, 用无穷乘积的形式来定义的.

$$\Gamma(x) = \Pi(x-1) = x^{-1}\Pi(x),$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})(1+\frac{1}{n})^{-x}.$$

下面我们先来探究这两个证明是否等价.

证明. 当 $s > 0$ 时有

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{s} \\ &= \frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{s}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{s} \\ &= \frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^{s}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}.\end{aligned}$$

注意到极限中的内容和我们之前推导的 B 函数的递推式相似, 不难发现, 当我们取 $a = N+1, b = s$ 时, 我们有

$$\mathrm{B}(s, N+1) = \frac{N}{s+N}\mathrm{B}(s, N) = \cdots = B(s,1)\frac{N!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}$$

又由 $\mathrm{B}(s,1) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^0\mathrm{d}x = \dfrac{1}{s}$

我们可以得到

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{1}{s}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^s}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\mathrm{B}(s,1)\frac{N!\cdot N^s}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\mathrm{B}(s,N+1)N^s \\ &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^N\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接着我们做变量替换 $x\to\frac{x}{N}$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^N\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to\infty}N^s\int_0^N\left(\frac{x}{N}\right)^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}\frac{x}{N} \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面我们考虑证明

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x\right)=0.$$

由伯努利不等式 $x>-1$ 时, 有 $(1+x)^N\geqslant 1+Nx$.

和不等式 $e^t\geqslant 1+t$, 把 $t=\frac{x}{N}$ 带入得到 $e^{\frac{x}{N}}\geqslant 1+\frac{x}{N}$ 即 $e^x\geqslant(1+\frac{x}{N})^N$.

我们可以得到

$$0\leqslant e^{-x}-(1-\frac{x}{N})^N=e^{-x}\left[1-e^x(1-\frac{x}{N})^N\right]\leqslant e^{-x}\left[1-(1-\frac{x^2}{N^2})^N\right]\leqslant\frac{e^{-x}x^2}{N}.$$

进而有

$$\left|\int_0^N e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x-\int_0^N\left(1-\frac{x}{N}\right)^N x^{s-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^N\frac{e^{-x}x^{s+1}}{N}\mathrm{d}x<\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x.$$

易知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x$ 收敛, 故当 $N\to\infty$ 时, $\displaystyle\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1}\mathrm{d}x\to 0$.

进而可知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x\right)=0.$$

即 $\displaystyle\int_0^N x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^N x^{s-1}(1-\frac{x}{N})^N\mathrm{d}x,\quad N\to\infty.$

故这两种定义方式等价. □

除此之外, Γ 函数, 还有两种定义方式.

第一种是上述证明过程中出现过的极限定义, 也称欧拉-高斯公式.

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!\cdot N^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}.$$

第二种则引入了欧拉常数 γ.

设 $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, 则称 $\gamma = \lim_{n\to\infty} H_n - \ln n$.

那么我们就有 Γ 函数的 Weierstrass 积形式.

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}.$$

2.2 性质

从我们证明两种定义方式等价的过程中, 不难发现这两类欧拉积分并不是孤立的, 下面我们就来探究这两类欧拉积分的关系.

接下来, 我们证明

性质 2.1.

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \forall p>0, q>0.$$

证明. 对 $\mathrm{B}(p,q)$ 用 $x=\sin^2\theta$ 换元得到

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta \mathrm{d}\theta.$$

对 $\Gamma(p)$ 用 $x=s^2$ 换元得到

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} s^{2p-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s.$$

我们考虑

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty} s^{2p-1}e^{-s^2}\mathrm{d}s \int_0^{\infty} t^{2q-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

下面我们进行极坐标变换, 令 $s=r\sin\theta, t=r\cos\theta$ 则有 $r^2=s^2+t^2, \mathrm{d}s\mathrm{d}t = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. 又由 Γ 函数的连续性, 我们可以对积分符号进行交换, 进而得到.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\infty} r^{2p+2q-2}e^{-r^2}r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_0^{\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\infty} r^{(p+q)-1}e^{-r}\mathrm{d}r\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q).
\end{aligned}$$

进而得到

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

性质 2.2 (余元公式)**.**

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

为了证明这个事情, 我们先证明一个引理.

引理 2.1.

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

证明. 通过二倍角公式, 我们可以将 $\sin(2n+1)x$ 不断升幂, 可以将其表示为形如 $\sin x\cdot P(\sin^2 x)$ 的式子, 其中 $P(x)$ 表示关于 x 的 n 次多项式.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(2n+1)x\sin(x)=2n+1$, 所以 $P(x)$ 的常数项为 $2n+1$.

同时我们有, $\sin(2n+1)x$ 的根为 $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k\in\mathbb{Z}$, 所以 $\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k=1,2,\dots,n$ 恰为 $P(x)$ 的 n 个根.

所以

$$P(x)=(2n+1)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right)$$

即

$$P(x)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

故我们有

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=P(\sin^2 x)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

带入 $x\to\frac{x}{2n+1}$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{1}{2n+1}x}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$\forall 1\leqslant m<n$ 有

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{1}{2n+1}x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)}=\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时, 左边为

$$\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2})}$$

对于右边, 我们考虑下列不等式, 当 n 充分大时.

(1) $\frac{2}{\pi}<\sin x<x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$

(2) $\sin^2\dfrac{1}{2n+1}x<\dfrac{x^2}{(2n+1)^2}$

(3) $\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}>\dfrac{4k^2}{(2n+1)^2}$

(4) $\dfrac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}<\dfrac{x^2}{4k^2}$

其中由 (1) 可得 (2), (3), 进而可知 (4).
于是我们有

$$1>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2n+1}x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)>\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

所以 $n\to\infty$ 时,

$$1>\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2})}>\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

由 $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$ 收敛,
可知 $m\to\infty$ 时

$$\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)=1$$

所以由夹逼定理, 我们可以得到

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

□

下面由 Γ 函数的极限定义来证明余元公式

证明.

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^p\cdot N!\cdot N^{1-p}}{p(p+1)\cdots(p+N)(1-p)(1-p+1)\cdots(1-p+N)}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N\cdot N!\cdot N!}{p(1-p^2)(2^2-p^2)\cdots(N^2-p^2)(1+N-p)}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N}{1-p+N}\cdot\frac{1}{p\prod\limits_{k=1}^{N}(1-\frac{p^2}{k^2})}\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知

$$\sin p\pi = p\pi\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)$$

故

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = 1\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

□

性质 2.3 (倍元公式, 也称勒让德公式)**.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

在之前的作业中, 我们已经用无穷乘积的定义方式证明过该公式, 下面我们用另一种方式再次证明这个问题.

证明. 由前面给出的性质

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} = \frac{\mathrm{B}(x,\frac{1}{2})}{\Gamma(x)},\quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\mathrm{B}(x,x)}{\Gamma(x)}.$$

带入之后, 我们只需证明

$$\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\mathrm{B}(x,x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = 2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

接下来通过若干次变量替换可得

$$\begin{aligned}
2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t &= \int_0^1 (2t)^{x-1}(2-2t)^{x-1}\mathrm{d}(2t) \\
&= \int_0^2 t^{x-1}(2-t)^{x-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 (1+t)^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{x-1}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 (1-t^2)^{x-1}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{d}\sqrt{t} \\
&= 2\int_0^1 (1-t)^{x-1}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

这样我们就证明了

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = 2^{2x-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

□

2.3 应用

在之前的作业中, 我们已经证明过了斯特林 (Stirling) 公式. 下面我们用另外的两种方式进行证明.

引理 2.2. 对于任意给定的 a 有,

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a} + O\left(x^{-a-1}\right)$$

证明. 先假定 $a>1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} &= \mathrm{B}(x,a) \\
&= \int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{x-1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty (1-e^{-t})^{a-1} e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} (1-e^{-t})^{a-1} e^{-xt} \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^\infty (1-e^{-t})^{a-1} e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&\triangleq I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

下面我们分别对 I_1 和 I_2 进行估计.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} (1-e^{-t})^{a-1} e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(t + O\left(t^2\right)\right)^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} (1+O\left(t\right))^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

当 x 充分大时, t 在 0 附近, 我们有, $(1+O\left(t\right))^{a-1} \sim 1 + (a-1)O\left(t\right) \sim 1 + O\left(t\right)$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} (1+O\left(t\right))^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} (1+O\left(t\right)) \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} O\left(t\right) \cdot t^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t + O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot t^{a} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t\right)
\end{aligned}
$$

作换元 $t = xt$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} t^{a-1} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t + O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot t^{a} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t\right) \\
&= x^{-a} \int_0^{\sqrt{x}} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t + O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot t^{a} \cdot e^{-xt} \mathrm{d}t\right) \\
&= x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t + O\left(x^{-a} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t\right) + O\left(x^{-a-1} \int_0^{\sqrt{x}} \cdot t^{a} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t\right)
\end{aligned}
$$

由 Γ 函数收敛, $\int_0^{\sqrt{x}} \cdot t^a \cdot e^{-t} \mathrm{d}t \sim O\left(1\right)$.
而 $\int_{\sqrt{x}}^\infty t^{a-1} \cdot e^{-t} \mathrm{d}t = O\left(\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

故

$$I_1 = x^{-a}\Gamma(a) + O\left(x^{-a-1}\right)$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} (1-e^{-t})^{a-1} \cdot e^{-xt}\mathrm{d}t = O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{xe^{\sqrt{x}}}\right) = O\left(x^{-a-1}\right).$$

因此

$$I_1 + I_2 = x^{-a}\Gamma(a) + O(x^{-a-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a} + O(x^{-a-1})$$

对于 $0 < a < 1$ 的情况, 我们取 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 使得 $a + k > 1$
可以得到

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a+k)} = x^{-a-k} + O(x^{-a-k-1})$$

进而通过 Γ 函数的递推公式可以得到相应的结论. □

定理 2.3 (斯特林公式)**.**

$$\log\Gamma(s) = (s - \frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

证明. 我们先对 x 为正整数的情形进行估计

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(n) = \log[(n-1)!] &= \sum_{k=1}^{n-1}\log k = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log k\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log k - \log t\mathrm{d}t + \int_k^{k+1}\log t\mathrm{d}t \\
&= \int_1^n \log t\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log\frac{t}{k}\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \log\frac{t+k}{k}\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \log(1+\frac{t}{k})\mathrm{d}t \\
&= n\log n - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + C + O(\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

下面我们将这个结论推广到任意实数上, 令 $x = n + a, 0 < a < 1$

由引理可知

$$
\begin{aligned}
\log\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)} &= \log(n^{-a} + O(n^{-a-1})) \\
&= \log n^{-a} + \log\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -a\log n + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= \log\Gamma(n) + a\log n + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (n - \frac{1}{2})\log n - n + C + a\log n + O\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= (x - a - \frac{1}{2})\log(x-a) - x + a + C + a\log(x-a) + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x - \frac{1}{2})[\log x + \log(1 - \frac{a}{x})] - x + a + C + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x - \frac{1}{2})\log x - x + C + (x - \frac{1}{2})\left(-\frac{a}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + a + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x - \frac{1}{2})\log x - x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

下面我们来确定常数 C 的值.
考虑倍元公式

$$\Gamma(2x)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

对两边取对数得

$$\log\Gamma(2x) + \log\Gamma(\frac{1}{2}) = (2x-1)\log 2 + \log\Gamma(x) + \log\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

再带入我们得到的估计式, 并整理可得

$$x\log(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + C + O\left(\frac{1}{x}\right) = \log\Gamma(\frac{1}{2})$$

当 $x \to +\infty$ 时, $x\log(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2} = x\cdot\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} = 0$
故

$$C = \log\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\log 2, \qquad x \to +\infty$$

下面我们来求 $\Gamma(\frac{1}{2})$
由余元公式 $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$
我们取 $p = \dfrac{1}{2}$, 则有 $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
故 $C = \log\sqrt{\pi} + \dfrac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2\pi}$
综上, 我们就得到了斯特林公式

$$\log\Gamma(s) = (s-\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

$\square$