

题目：数学分析整理

作者：uuku

摘 要

关键词：

目 录

主要符号表	IV
1 绪论	1
1.1 第一个二级标题	1
1.1.1 三级标题	1
1.2 第二个二级标题	1
2 定义	2
2.1 特征函数	2
2.2 狄利克雷函数	2
3 导数的应用	3
3.1 微分中值定理	3
3.1.1 费马定理	3
4 定积分	4
4.1 定义	4
4.2 定积分存在的条件	4
4.2.1 达布和	4
4.2.2 达布上下积分	4
4.2.3 达布定理	5
4.2.4 振幅	5
4.2.5 黎曼定理	5
4.3 勒贝格定理	6
4.3.1 零测集	6
4.3.2 定理	6
4.4 性质	6
4.4.1 微积分学基本定理	6
4.4.2 积分第一中值定理	6
4.4.3 积分第二中值定理	6
5 反常积分	8
5.1 无穷积分	8
5.1.1 定义	8
5.1.2 柯西收敛准则	8
5.1.3 单调数列	8
5.1.4 单调数列	8

5.1.5	无穷积分的 Abel 引理.....	8
5.1.6	阿贝尔判别法.....	8
5.1.7	狄利克雷判别法.....	8
5.2	瑕积分.....	9
5.2.1	定义.....	9
5.3	求和与积分之间的联系.....	9
5.3.1	推论 1.....	9
5.3.2	欧拉求和公式.....	9
5.3.3	示例.....	9
6	多元函数极限.....	11
6.1	\mathbb{R}^n 中的点集.....	11
6.1.1	邻域、开集.....	11
6.1.2	聚点、闭集.....	11
6.1.3	连通集.....	13
6.2	多元函数的极限.....	13
6.3	连续映射.....	14
7	多元函数的微分.....	15
7.1	微分的定义.....	15
7.2	方向导数与偏导数.....	15
7.3	有限增量定理与泰勒公式.....	16
7.4	反函数定理.....	16
7.5	隐函数定理.....	16
8	结论与展望.....	18
	参考文献.....	19
	致谢.....	19

主要符号表

符号 1	解释 1
符号 2	解释 2

1 绪论

1.1 第一个二级标题

1.1.1 三级标题

1) 四级标题

1.2 第二个二级标题

2 定义

2.1 特征函数

设 X 是全集，对 X 的子集 A ，我们记

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

并称 χ_A 为 A 的特征函数。

2.2 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

3 导数的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 费马定理

4 定积分

4.1 定义

设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 有定义. 若存在实数 I 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 其对满足 $\max_i \Delta x_i < \delta$ 的任意分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

及任意的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 均有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

那么就称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积。

并称 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 为黎曼和。

4.2 定积分存在的条件

4.2.1 达布和

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中插入分点

$$\alpha : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并对 $1 \leq i \leq n$ 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

再考虑和式

$$\overline{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。我们称 $\overline{S}(\alpha)$ 为达布上和, 其余同理。

4.2.2 达布上下积分

由 $\underline{S}(\alpha) \leq \underline{S}(\alpha \cup \beta) \leq \overline{S}(\alpha \cup \beta) \leq \overline{S}(\beta)$ 知集合 $\{\overline{S}(\alpha)\}$ 有下界, 从而有下确界, 我们记

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\alpha} \overline{S}(\alpha),$$

并称之为达布上积分，同理我们称

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \sup_{\alpha} \underline{S}(\alpha),$$

为达布下积分。

4.2.3 达布定理

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，则对任意的 $\varepsilon > 0$ ，均存在 $\delta > 0$ ，使得对于满足 $\max_i \Delta x_i < \delta$ 的任意分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\text{均有 } \left| \overline{S}(\alpha) - \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \left| \underline{S}(\alpha) - \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积的充要条件是

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

并且当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积时有

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

4.2.4 振幅

$\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅，那么

$$\overline{S}(\alpha) - \underline{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

4.2.5 黎曼定理

在 $[a, b]$ 上有界的函数 $f(x)$ 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$ ，均存在 $\delta > 0$ 使得对于满足 $\max_i \Delta x_i < \delta$ 的任意一组分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

均有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

上述定理可以弱化成，黎曼可积的充要条件为，对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一组分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

4.3 勒贝格定理

4.3.1 零测集

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在至多可数个开区间 I_n 使得

$$A \subset \bigcup_n I_n \quad \text{且} \quad \sum_n |I_n| < \varepsilon$$

那么就称 A 是勒贝格零测集, 其中 $|I_n|$ 表示区间 I_n 的长度。

4.3.2 定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积的充要条件是 $f(x)$ 在该区间上的全部间断点构成勒贝格零测集。

我们记 D_f 表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体间断点所成之集。

4.4 性质

4.4.1 微积分学基本定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并对任意的 $x \in [a, b]$ 记

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

那么

(1) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

(2) 设 $x_0 \in [a, b]$ 且 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $F(x)$ 在 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$

4.4.2 积分第一中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

4.4.3 积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调且非负,

(1) 若 $g(x)$ 单调递减, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$$

(2) 若 $g(x)$ 单调递增, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

5 反常积分

5.1 无穷积分

5.1.1 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

5.1.2 柯西收敛准则

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $A > 0$, 使得对任意的 $A_1, A_2 > A$ 有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

5.1.3 单调数列

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是：任意一个趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 \geq a$ 的单调递增数列 $\{A_n\}$ 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) dx$ 收敛

5.1.4 单调数列

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的非负函数, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是：存在一个趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 \geq a$ 的单调递增数列 $\{A_n\}$ 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) dx$ 收敛

5.1.5 无穷积分的 Abel 引理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调。若对任一 $x \in [a, b]$ 都存在 $M > 0$ 使得

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M$$

则

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq M(|g(a)| + 2|g(b)|)$$

5.1.6 阿贝尔判别法

设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ 收敛。

5.1.7 狄利克雷判别法

假设函数 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ 收敛。

5.2 瑕积分

5.2.1 定义

设 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上有定义, a 是 $f(x)$ 唯一的奇点 (瑕点), 且对任意的 $c \in (a, b]$, $f(x)$ 在 $[c, b]$ 上可积. 若极限

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

5.3 求和与积分之间的联系

定义 5.3.1. a

设 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 \mathbb{R} 的一个元素族. 又设 $a < b$, 并对任意的 $t \in [a, b]$ 记 $S(t) = \sum_{a < n \leq t} a_n$, 则对任意的 $f \in C'([a, b])$ 有

$$\sum_{a < n \leq b} a_n f(n) = S(b)f(b) - \int_a^b S(t)f'(t) dt$$

5.3.1 推论 1

假设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 并记 $S(t) = \sum_{n \leq t} a_n$. 又设 $x \geq 1$, 那么对任意的 $f \in C'([0, x])$ 有

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = S(x)f(x) - \int_1^x S(t)f'(t) dt$$

5.3.2 欧拉求和公式

设 $a < b$, 则对任意的 $f \in C'([a, b])$ 有

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b f'(t)\psi(t) dt + f(a)\psi(a) - f(b)\psi(b)$$

其中 $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, 且 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

5.3.3 示例

(1)

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^2} dt,$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) 斯特林 (Stirling) 公式

$$n! = e^{n \log n - n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

6 多元函数极限

6.1 \mathbb{R}^n 中的点集

6.1.1 邻域、开集

定义 6.1.1 (ε -邻域、去心邻域). 设 $a \in \mathbb{R}^n$, ε 是一个正实数, 我们称集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}$$

为 a 的 ε -邻域, 记作 $B(a, \varepsilon)$.

称 $B(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ 为 a 的去心邻域.

定义 6.1.2 (内点、内部). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $a \in E$. 若存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(a, \varepsilon) \subseteq E$, 则称 a 是 E 的内点. E 的全体内点所成之集被称作 E 的内部, 记作 E° .

定义 6.1.3 (外点、外部). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 a 是 E^c 的内点, 则称 a 为 E 的外点. E 的全体外点所成之集被称作 E 的外部.

定义 6.1.4 (边界点、边界). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 a 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 a 为 E 的边界点. E 的全体边界点所成之集被称作 E 的边界, 记作 ∂E .

定义 6.1.5 (开集). 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 G 中每个点均为内点, 则称 G 是 \mathbb{R}^n 中的开集. 即 G 是开集, 当且仅当 $G = G^\circ$.

命题 6.1.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E° 是开集.

命题 6.1.2. 我们有

- (1) \emptyset 和 \mathbb{R}^n 都是开集.
- (2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族开集, 则 $\bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$ 也是开集.
- (3) 设 G_1, \dots, G_m 是开集, 则 $\bigcap_{j=1}^m G_j$ 也是开集.

定义 6.1.6 (邻域). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若开集 G 满足 $E \subseteq G$, 则称 G 是 E 的一个邻域. 特别的, 当 $E = \{a\}$ 时我们称 G 是 a 的一个邻域.

6.1.2 聚点、闭集

定义 6.1.7 (闭集). 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 F^c 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 则称 F 是 \mathbb{R}^n 中的闭集.

命题 6.1.3. 我们有

- (1) \emptyset 和 \mathbb{R}^n 都是闭集.

(2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族闭集, 则 $\bigcap_{\lambda \in L} G_\lambda$ 也是闭集.

(3) 设 G_1, \dots, G_m 是开集, 则 $\bigcup_{j=1}^m G_j$ 也是闭集.

定义 6.1.8 (聚点、导集). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 均有

$$(B(\mathbf{a}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap E \neq \emptyset,$$

则称 \mathbf{a} 是 E 的聚点. 称 E 的全体聚点所成之集为 E 的导集, 记作 E' .

定义 6.1.9 (孤立点). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 $\mathbf{a} \in E \setminus E'$, 则称 \mathbf{a} 是 E 的孤立点.

定义 6.1.10 (闭包). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 称 $E \cup E'$ 为 E 的闭包, 记作 \bar{E} .

命题 6.1.4. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 \bar{E} 是闭集.

命题 6.1.5. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E 是闭集当且仅当 $E = \bar{E}$.

命题 6.1.6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$.

定义 6.1.11 (极限、收敛). 设 $\{\mathbf{x}_m\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个点列, 如果存在 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在正整数 N 满足

$$|\mathbf{x}_m - \mathbf{a}| < \varepsilon, \quad \forall m > N.$$

则称 \mathbf{a} 为 $\{\mathbf{x}_m\}$ 的极限, 并称 $\{\mathbf{x}_m\}$ 收敛于 \mathbf{a} .

定义 6.1.12 (柯西列). 若 \mathbb{R}^n 中的点列 $\{\mathbf{x}_m\}$ 满足: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在正整数 N 使得

$$|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m| < \varepsilon, \quad \forall l, m > N,$$

则称 $\{\mathbf{x}_m\}$ 是柯西列.

定理 6.1.7 (柯西收敛准则). \mathbb{R}^n 中的点列 $\{\mathbf{x}_m\}$ 收敛当且仅当它是柯西列.

定理 6.1.8 (压缩映像原理). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的闭集, $f: E \rightarrow E$. 如果存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \theta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E,$$

那么存在唯一的 $\mathbf{a} \in E$ 使得 $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. 我们称 \mathbf{a} 为 f 的不动点.

定义 6.1.13 (闭矩形). 形如 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ 的集合为 \mathbb{R}^n 中的闭矩形.

定义 6.1.14 (直径). 对 \mathbb{R}^n 的任意非空子集 E 记

$$\text{diam}(E) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

并称之为 E 的直径.

定理 6.1.9 (闭矩形套定理). 设闭矩形列 $\{I_m\}$ 满足 $I_{m+1} \subseteq I_m (\forall m \in \mathbb{Z}_{>0})$ 以及 $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam}(I_m) = 0$, 那么存在唯一的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\mathbf{a}\}.$$

定义 6.1.15 (紧集). 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 K 的每个开覆盖均有有限子覆盖, 那么我们称 K 是一个紧集,

命题 6.1.10. \mathbb{R}^n 中的闭矩形是紧集.

定义 6.1.16 (有界). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $\mathbf{x} \in E$ 均有 $|\mathbf{x}| \leq M$, 则称 E 是有界的.

定理 6.1.11. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 K 是紧集当且仅当它是有界闭集.

定理 6.1.12. (波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理) \mathbb{R}^n 的任意一个有界无限子集必有聚点.

6.1.3 连通集

定义 6.1.17 (开 (闭) 子集). 设 $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 \mathbb{R}^n 中的开集 (相应的, 闭集) S 使得 $A = E \cap S$, 则称 A 是 E 上的开子集 (相应的, 闭子集).

命题 6.1.13. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \subseteq E$, 那么

- (1) A 是 E 的开子集当且仅当对任意的 $\mathbf{a} \in A$, 存在 \mathbf{a} 的邻域 U 使得 $E \cap U \subseteq A$.
- (2) B 是 E 的闭子集当且仅当 $E \setminus B$ 是 E 的开子集.

定义 6.1.18 (连通集). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若不存在 E 的两个非空开子集 A 和 B 使得 $A \cup B = E$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称 E 是 \mathbb{R}^n 中的连通集.

定义 6.1.19 (区域、闭区域). \mathbb{R}^n 中的连通开集被称作区域. 如果 E 是区域, 那么也将 \bar{E} 称作闭区域. 要注意的是, 闭区域不是区域.

命题 6.1.14. 设 E 是 \mathbb{R} 的非空子集, 那么 E 是 \mathbb{R} 中的连通集当且仅当 E 是区间.

命题 6.1.15. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的连通集, 且 $E \subseteq S \subseteq \bar{E}$, 那么 S 也是 \mathbb{R}^n 中的连通集. 特别的 \bar{E} 是 \mathbb{R}^n 中的连通集.

6.2 多元函数的极限

定义 6.2.1 (极限). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathbf{a} 是 E 的聚点. 若存在 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 满足

$$|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in (B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap E,$$

则称 \mathbf{b} 为 f 沿 E 中元素趋于 \mathbf{a} 的极限.

命题 6.2.1 (极限的唯一性). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathbf{a} 是 E 的聚点. 如果 \mathbf{b} 与 \mathbf{c} 是 f 沿 E 中元素趋于 \mathbf{a} 的极限, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

定理 6.2.2 (海涅归结原理). $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ 的充要条件是: 对于 E 中满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ 且 $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ ($\forall k$) 的任一序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 均有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}$.

定理 6.2.3 (柯西收敛准则). $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x})$ 存在的重要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap E$ 有

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

定理 6.2.4 (夹逼定理). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, \mathbf{a} 是 E 的聚点, f, g, h 均是定义在 E 上的函数, 并且存在 $\delta > 0$, 使得存在 $(B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap E$ 内有 $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$. 如果

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} h(\mathbf{x}) = A,$$

那么 $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} g(\mathbf{x}) = A$.

6.3 连续映射

定义 6.3.1 (连续). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$. 又设 $\mathbf{a} \in E$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\mathbf{x} \in E \cap B(\mathbf{a}, \delta)$ 均有

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon,$$

则称 f 在 \mathbf{a} 处连续. 若 f 在 E 的每一点处均连续, 则称 f 在 E 上连续.

注 6.3.1. 按照上述定义, E 上的任一映射 f 在 E

定理 6.3.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, 则下列命题等价:

- (1) f 在 E 上连续.
- (2) 对 \mathbb{R}^m 中任意的开集 G , $f^{-1}(G)$ 均是 E 的开子集.
- (3) 对 \mathbb{R}^m 中任意的闭集 F , $f^{-1}(F)$ 均是 E 的闭子集.

命题 6.3.2. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f = (f_1, \dots, f_m)^T: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, 那么 f 是 E 上的连续函数当且仅当每个 f_j ($1 \leq j \leq m$) 均是 E 上的连续函数.

定理 6.3.3. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续映射. 若 K 是 \mathbb{R}^n 中的紧集, 则 $f(K)$ 是 \mathbb{R}^m 中的紧集.

定义 6.3.2 (凸集). \mathbb{R}^n 的子集 S 被称为凸集当且仅当对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ 均有

$$\{(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq S.$$

7 多元函数的微分

7.1 微分的定义

定义 7.1.1 (可微). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$. 又设 \mathbf{a} 是 E 的一个内点. 若存在线性映射 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0},$$

则称 f 在 \mathbf{a} 处可微. 若 f 在 E 中每个点处均可微, 我们就称 f 在 E 上可微.

7.2 方向导数与偏导数

定义 7.2.1 (方向导数). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, 且 \mathbf{a} 是 E 的一个内点. 对 \mathbb{R}^n 中给定的非零向量 \mathbf{u} , 若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

存在, 我们就称 f 在 \mathbf{a} 处沿方向 \mathbf{u} 是可微的, 并将上述极限称为 f 在 \mathbf{a} 处沿方向 \mathbf{u} 的方向导数, 记作 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$.

命题 7.2.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$, 且 \mathbf{a} 是 E 的一个内点. 若 f 在 \mathbf{a} 处可微, 则 f 在 \mathbf{a} 处的所有方向导数均存在, 并且对于 \mathbb{R}^n 中的任意非零向量 \mathbf{u} 有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})\mathbf{u}.$$

定义 7.2.2 (雅可比矩阵).

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

定义 7.2.3 (中值定理). 1

7.3 有限增量定理与泰勒公式

定义 7.3.1 (范数). 设 $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 定义 L 的范数 $\|L\|$ 为

$$\|L\| = \sup_{|\mathbf{h}|=1} |L\mathbf{h}|.$$

并且我们有 $|L\mathbf{x}| \leq \|L\| \cdot |\mathbf{x}|$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

定理 7.3.1 (有限增量定理). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的凸开集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 E 上可微, 且存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in E$ 均有 $\|f'(\mathbf{x})\| \leq M$. 那么对任意的 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ 有

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leq M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

7.4 反函数定理

定理 7.4.1 (反函数定理). 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$. 又设 $\mathbf{a} \in E$. 若 $f'(\mathbf{a})$ 非奇异, 那么必存在 \mathbf{a} 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 且 $f|_U: U \rightarrow V$ 是双射. 此外, g 表示 $f|_U$ 的逆映射, 则 $g \in C^1(V)$, 并且对任意的 $\mathbf{y} \in V$ 有

$$g'(\mathbf{y}) = f'(g(\mathbf{y}))^{-1}.$$

换种说法, 如果有

- E 是 \mathbb{R}^n 中的开集.
- $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$
- $\mathbf{a} \in E$, $f'(\mathbf{a})$ 非奇异, 即 $\det f'(\mathbf{a}) \neq 0$

那么

- 存在 \mathbf{a} 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集
- $f|_U: U \rightarrow V$ 是双射.
- 若设 $g = f|_U^{-1}$ 则 $g \in C^1(E)$, 并且对任意的 $\mathbf{y} \in V$ 有

$$g'(\mathbf{y}) = f'(g(\mathbf{y}))^{-1}.$$

7.5 隐函数定理

定理 7.5.1 (隐函数定理). 设 E 是 \mathbb{R}^{n+m} 中的开集, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微. 又设 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ 且 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. 现将 f 的雅可比矩阵写成如下分块矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

的形式, 其中

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}} \right)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

那么当

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$$

时, 存在 \mathbf{a} 的邻域 U , \mathbf{b} 的邻域 V 以及唯一的连续可微映射 $g: U \rightarrow V$, 使得

- (1) $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.
- (2) 对任意的 $\mathbf{x} \in U$ 有 $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$.
- (3) 对任意的 $\mathbf{x} \in U$ 有 $\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \neq 0$, 并且

$$g'(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

定义 7.5.1. 在上述定理中, $y = g(\mathbf{x})$

8 结论与展望

致 谢