题目：数学分析整理

作者：uuku

摘　要

关键词：

目 录

主要符号表

符号 1	解释 1
符号 2	解释 2

1　绪论

1.1　第一个二级标题

1.1.1　三级标题

1)　四级标题

1.2　第二个二级标题

2　定义

2.1　特征函数

设 X 是全集，对 X 的子集 A，我们记

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\backslash A,\end{cases}$$

并称 χ_A 为 A 的特征函数。

2.2　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

3　导数的应用

3.1　微分中值定理

3.1.1　费马定理

4　定积分

4.1　定义

设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 有定义. 若存在实数 I 使得对任意的 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta>0$，其对满足 $\max\limits_i \Delta x_i<\delta$ 的任意分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

及任意的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 均有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$$

那么就称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。

并称 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 为黎曼和。

4.2　定积分存在的条件

4.2.1　达布和

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中插入分点

$$\alpha: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并对 $1\le i\le n$ 记

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

再考虑和式

$$\overline{S}(\alpha)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(\alpha)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i.$$

其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。我们称 $\overline{S}(\alpha)$ 为达布上和，其余同理。

4.2.2　达布上下积分

由 $\underline{S}(\alpha)\le\underline{S}(\alpha\cup\beta)\le\overline{S}(\alpha\cup\beta)\le\overline{S}(\beta)$ 知集合 $\{\overline{S}(\alpha)\}$ 有下界，从而有下确界，我们记

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf_\alpha \overline{S}(\alpha),$$

并称之为达布上积分，同理我们称

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_\alpha \underline{S}(\alpha),$$

为达布下积分。

4.2.3 达布定理

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则对任意的 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta>0$，使得对于满足 $\max\limits_i \Delta x_i<\delta$ 的任意分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

均有 $\left|\overline{S}(\alpha)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \left|\underline{S}(\alpha)-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

并且当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

4.2.4 振幅

$\omega_i=M_i-m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，那么

$$\overline{S}(\alpha)-\underline{S}(\alpha)=\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i$$

4.2.5 黎曼定理

在 $[a,b]$ 上有界的函数 $f(x)$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta>0$ 使得对于满足 $\max\limits_i \Delta x_i<\delta$ 的任意一组分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

均有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

上述定理可以弱化成，黎曼可积的充要条件为，对任意的 $\varepsilon>0$ 存在一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

4.3 勒贝格定理

4.3.1 零测集

设 $A \subset \mathbb{R}$，若对任意的 $\varepsilon > 0$，均存在至多可数个开区间 I_n 使得

$$A \subset \bigcup_n I_n \quad \text{且} \quad \sum_n |I_n| < \varepsilon$$

那么就称 A 是勒贝格零测集，其中 $|I_n|$ 表示区间 I_n 的长度。

4.3.2 定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是 $f(x)$ 在该区间上的全部间断点构成勒贝格零测集。

我们记 D_f 表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全体间断点所成之集。

4.4 性质

4.4.1 微积分学基本定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并对任意的 $x \in [a,b]$ 记

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

那么

(1) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

(2) 设 $x_0 \in [a,b]$ 且 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $F(x)$ 在 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$

4.4.2 积分第一中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得，

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

4.4.3 积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且非负，

(1) 若 $g(x)$ 单调递减，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 若 $g(x)$ 单调递增，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

5 反常积分

5.1 无穷积分

5.1.1 定义

$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\, dx$

5.1.2 柯西收敛准则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $A > 0$，使得对任意的 $A_1, A_2 > A$ 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

.

5.1.3 单调数列

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：任意一个趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 \geq a$ 的单调递增数列 $\{A_n\}$ 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

5.1.4 单调数列

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的非负函数，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：存在一个趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 \geq a$ 的单调递增数列 $\{A_n\}$ 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

5.1.5 无穷积分的 Abel 引理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调。若对任一 $x \in [a, b]$ 都存在 $M > 0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq M$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq M(|g(a)| + 2|g(b)|)$$

5.1.6 阿贝尔判别法

设 $\int_a^{+\infty}$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

5.1.7 狄利克雷判别法

假设函数 $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

5.2 瑕积分

5.2.1 定义

设 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上有定义，a 是 $f(x)$ 唯一的奇点（瑕点）, 且对任意的 $c \in (a,b]$，$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上可积. 若极限

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x) \mathrm{d}x$$

存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

5.3 求和与积分之间的联系

定义 5.3.1. a

设 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个元素族。又设 $a < b$，并对任意的 $t \in [a,b]$ 记 $S(t) = \sum\limits_{a<n\leq t} a_n$，则对任意的 $f \in C'([a,b])$ 有

$$\sum_{a<n\leq b} a_n f(n) = S(b)f(b) - \int_a^b S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

5.3.1 推论 1

假设 $\{a_n\}$ 是一个数列，并记 $S(t) = \sum\limits_{n\leq t} a_n$. 又设 $x \geq 1$，那么对任意的 $f \in C'([0,x])$ 有

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n) = S(x)f(x) - \int_1^x S(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

5.3.2 欧拉求和公式

设 $a < b$，则对任意的 $f \in C'([a,b])$ 有

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t + f(a)\psi(a) - f(b)\psi(b)$$

其中 $\psi(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$，且 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

5.3.3 示例

(1)

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{1}{x})$$

(2) 斯特林（Stirling）公式

$$n! = e^{n\log n - n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

6 多元函数极限

6.1 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

6.1.1 邻域、开集

定义 6.1.1 (ε-邻域、去心邻域). 设 $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$ 是一个正实数, 我们称集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$$

为 $\boldsymbol{a}$ 的 ε-邻域, 记作 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$.

称 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \backslash \{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的去心邻域.

定义 6.1.2 (内点、内部). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{a} \in E$. 若存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \subseteq E$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的内点. E 的全体内点所成之集被称作 E 的内部，记作 E°.

定义 6.1.3 (外点、外部). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\boldsymbol{a}$ 是 E^c 的内点, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的外点. E 的全体外点所成之集被称作 E 的外部.

定义 6.1.4 (边界点、边界). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\boldsymbol{a}$ 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的边界点. E 的全体边界点所成之集被称作 E 的边界, 记作 ∂E.

定义 6.1.5 (开集). 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 G 中每个点均为内点, 则称 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 即 G 是开集, 当且仅当 $G = G^\circ$.

命题 6.1.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E° 是开集.

命题 6.1.2. 我们有

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是开集.

(2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族开集, 则 $\bigcup\limits_{\lambda \in L} G_\lambda$ 也是开集.

(3) 设 $G_1, \cdots, G_m$ 是开集, 则 $\bigcap\limits_{j=1}^{m} G_j$ 也是开集.

定义 6.1.6 (邻域). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若开集 G 满足 $E \subseteq G$, 则称 G 是 E 的一个邻域. 特别的, 当 $E = \{\boldsymbol{a}\}$ 时我们称 G 是 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域.

6.1.2 聚点、闭集

定义 6.1.7 (闭集). 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 F^c 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

命题 6.1.3. 我们有

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是闭集.

(2) 设 $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是一族闭集, 则 $\bigcap\limits_{\lambda\in L} G_\lambda$ 也是闭集.

(3) 设 $G_1,\cdots,G_m$ 是开集, 则 $\bigcup\limits_{j=1}^{m} G_j$ 也是闭集.

定义 6.1.8 (聚点、导集)**.** 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\varepsilon>0$ 均有

$$(B(\boldsymbol{a},\varepsilon)\backslash\{\boldsymbol{a}\})\cap E\neq\varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 称 E 的全体聚点所成之集为 E 的导集, 记作 E'/

定义 6.1.9 (孤立点)**.** 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 如果 $\boldsymbol{a}\in E\backslash E'$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的孤立点.

定义 6.1.10 (闭包)**.** 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 称 $E\cup E'$ 为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$.

命题 6.1.4. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 则 $\overline{E}$ 是闭集.

命题 6.1.5. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 则 E 是闭集当且仅当 $E=\overline{E}$.

命题 6.1.6. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 则 $\overline{E}=E^\circ\cup\partial E$.

定义 6.1.11 (极限、收敛)**.** 设 $\{\boldsymbol{x_m}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, 如果存在 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 均存在正整数 N 满足

$$|\boldsymbol{x_m}-\boldsymbol{a}|<\varepsilon,\qquad\forall m>N.$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\{x_m\}$ 的极限, 并称 $\{x_m\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$.

定义 6.1.12 (柯西列)**.** 若 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_m\}$ 满足: 对任意的 $\varepsilon>0$, 均存在正整数 N 使得

$$|\boldsymbol{x_l}-\boldsymbol{x_m}|<\varepsilon,\qquad\forall l,m>N,$$

则称 $\{x_m\}$ 是柯西列.

定理 6.1.7 (柯西收敛准则)**.** $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_m\}$ 收敛当且仅当它是柯西列.

定理 6.1.8 (压缩映像原理)**.** 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, $f:E\to E$. 如果存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leq\theta|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\qquad\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E,$$

那么存在唯一的 $\boldsymbol{a}\in E$ 使得 $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$. 我们称 $\boldsymbol{a}$ 为 f 的不动点.

定义 6.1.13 (闭矩形)**.** 形如 $[a_1,b_1]\times[a_2,.b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 的集合为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭矩形.

定义 6.1.14 (直径)**.** 对 $\mathbb{R}^n$ 的任意非空子集 E 记

$$\mathrm{diam}(E)=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,$$

并称之为 E 的直径.

定理 6.1.9 (闭矩形套定理). 设闭矩形列 $\{I_m\}$ 满足 $I_{m+1} \subseteq I_m (\forall m \in \mathbb{Z}_{>0})$ 以及 $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam}(I_m) = 0$, 那么存在唯一的 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\boldsymbol{a}\}.$$

定义 6.1.15 (紧集). 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 K 的每个开覆盖均有有限子覆盖, 那么我们称 K 是一个紧集,

命题 6.1.10. $\mathbb{R}^n$ 中的闭矩形是紧集.

定义 6.1.16 (有界). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 均有 $|\boldsymbol{x}| \le M$, 则称 E 是有界的.

定理 6.1.11. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 K 是紧集当且仅当它是有界闭集.

定理 6.1.12. (波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理) $\mathbb{R}^n$ 的任意一个有界无限子集必有聚点.

6.1.3 连通集

定义 6.1.17 (开 (闭) 子集). 设 $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 (相应的, 闭集) S 使得 $A = E \cap S$, 则称 A 是 E 上的开子集 (相应的, 闭子集).

命题 6.1.13. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \subseteq E$, 那么

(1) A 是 E 的开子集当且仅当对任意的 $\boldsymbol{a} \in A$, 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $E \cap U \subseteq A$.

(2) B 是 E 的闭子集当且仅当 $E \backslash B$ 是 E 的开子集.

定义 6.1.18 (连通集). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若不存在 E 的两个非空开子集 A 和 B 使得 $A \cup B = E$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集.

定义 6.1.19 (区域、闭区域). $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集被称作区域. 如果 E 是区域，那么也将 $\overline{E}$ 称作闭区域. 要注意的是, 闭区域不是区域.

命题 6.1.14. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 那么 E 是 $\mathbb{R}$ 中的连通集当且仅当 E 是区间.

命题 6.1.15. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集, 且 $E \subseteq S \subseteq \overline{E}$, 那么 S 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集. 特别的 $\overline{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集.

6.2 多元函数的极限

定义 6.2.1 (极限). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 若存在 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 满足

$$|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in (B(\boldsymbol{a}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{a}\}) \cap E,$$

则称 $\boldsymbol{b}$ 为 f 沿 E 中元素趋于 $\boldsymbol{a}$ 的极限.

命题 6.2.1 (极限的唯一性)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点. 如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是 f 沿 E 中元素趋于 $\boldsymbol{a}$ 的极限, 则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

定理 6.2.2 (海涅归结原理)**.** $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in E}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ 的充要条件是: 对于 E 中满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$ $(\forall k)$ 的任一序列 $\{x_k\}$ 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.

定理 6.2.3 (柯西收敛准则)**.** $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ E}} f(\boldsymbol{x})$ 存在的重要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in (B(\boldsymbol{a}, \delta)\backslash\{\boldsymbol{a}\}) \cap E$ 有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon.$$

定理 6.2.4 (夹逼定理)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点, f, g, h 均是定义在 E 上的函数, 并且存在 $\delta > 0$, 使得存在 $(B(\boldsymbol{a}, \delta)\backslash\{\boldsymbol{a}\}) \cap E$ 内有 $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x}) \le h(\boldsymbol{x})$. 如果

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in E}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in E}} h(\boldsymbol{x}) = A,$$

那么 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in E}} g(\boldsymbol{x}) = A$.

6.3 连续映射

定义 6.3.1 (连续)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$. 又设 $\boldsymbol{a} \in E$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ 均有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon,$$

则称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续. 若 f 在 E 的每一点处均连续, 则称 f 在 E 上连续.

注 6.3.1. 按照上述定义, E 上的任一映射 f 在 E

定理 6.3.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f : E \to \mathbb{R}^m$, 则下列命题等价:

(1) f 在 E 上连续.

(2) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的开集 G, $f^{-1}(G)$ 均是 E 的开子集.

(3) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的闭集 F, $f^{-1}(F)$ 均是 E 的闭子集.

命题 6.3.2. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $f = (f_1, \cdots, f_m)^T : E \to \mathbb{R}^m$, 那么 f 是 E 上的连续函数当且仅当每个 f_j $(1 \le j \le m)$ 均是 E 上的连续函数.

定理 6.3.3. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是连续映射. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $f(K)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集.

定义 6.3.2 (凸集)**.** $\mathbb{R}^n$ 的子集 S 被称为凸集当且仅当对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ 均有

$$\{(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq S.$$

7 多元函数的微分

7.1 微分的定义

定义 7.1.1 (可微)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : E \to \mathbb{R}^m$. 又设 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 若存在线性映射 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = \boldsymbol{0},$$

则称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微. 若 f 在 E 中每个点处均可微, 我们就称 f 在 E 上可微.

7.2 方向导数与偏导数

定义 7.2.1 (方向导数)**.** 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, 且 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 对 $\mathbb{R}^n$ 中给定的非零向量 $\boldsymbol{u}$, 若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

存在, 我们就称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 是可微的, 并将上述极限称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数, 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$.

命题 7.2.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, 且 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的一个内点. 若 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微, 则 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的所有方向导数均存在, 并且对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意非零向量 $\boldsymbol{u}$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

定义 7.2.2 (雅可比矩阵)**.**

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}$$

定义 7.2.3 (中值定理)**.** 1

7.3 有限增量定理与泰勒公式

定义 7.3.1 (范数). 设 $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 定义 L 的范数 $\|L\|$ 为

$$\|L\| = \sup_{|\boldsymbol{h}|=1} |L\boldsymbol{h}|.$$

并且我们有 $|L\boldsymbol{x}| \le \|L\| \cdot |\boldsymbol{x}|, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

定理 7.3.1 (有限增量定理). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸开集, $f : E \to \mathbb{R}^m$ 在 E 上可微, 且存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 均有 $\|f'(\boldsymbol{x})\| \le M$. 那么对任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ 有

$$|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})| \leqslant M|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|.$$

7.4 反函数定理

定理 7.4.1 (反函数定理). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f : E \to \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$. 又设 $\boldsymbol{a} \in E$. 若 $f'(\boldsymbol{a})$ 非奇异, 那么必存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $f|_U : U \to V$ 是双射. 此外, g 表示 $f|_U$ 的逆映射, 则 $g \in C^1(V)$, 并且对任意的 $\boldsymbol{y} \in V$ 有

$$g'(\boldsymbol{y}) = f'(g(\boldsymbol{y}))^{-1}.$$

换种说法, 如果有

- E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.
- $f : E \to \mathbb{R}^n$ 且 $f \in C^1(E)$
- $\boldsymbol{a} \in E$, $f'(\boldsymbol{a})$ 非奇异, 即 $\det f'(\boldsymbol{a}) \neq 0$

那么

- 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U 使得 $V = f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集
- $f|_U : U \to V$ 是双射.
- 若设 $g = f|_U^{-1}$ 则 $g \in C^1(E)$, 并且对任意的 $\boldsymbol{y} \in V$ 有

$$g'(\boldsymbol{y}) = f'(g(\boldsymbol{y}))^{-1}.$$

7.5 隐函数定理

定理 7.5.1 (隐函数定理). 设 E 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的开集, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : E \to \mathbb{R}^m$ 连续可微. 又设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 及 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 使得 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in E$ 且 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$. 现将 f 的雅可比矩阵写成如下分块矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \end{bmatrix}$$

的形式, 其中

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{1\le i,j\le m}.$$

那么当

$$\det \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$$

时, 存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U, $\boldsymbol{b}$ 的邻域 V 以及唯一的连续可微映射 $g: U \to V$, 使得

(1) $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$ 有 $f(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.

(3) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$ 有 $\det \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \neq 0$, 并且

$$g'(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})).$$

定义 7.5.1. 在上述定理中, $y = g(\boldsymbol{x})$

8 结论与展望

致　　谢