Jawaban Soal UAS Matematika 1 Tahun 2023

Muhammad Izzat Fauzan Putra Arya/24060124130096

November 2024

1 Soal Nomor 1

Selesaikan soal berikut dengan ketentuan nilai "n" sesuai dengan NIM dua digit terakhir (misal NIM: 24060124130096, maka nilai n = 96) dan nilai "m" sesuai dengan NIM satu digit terakhir (misal NIM: 24060124130096, maka nilai m = 6)

$$\int \frac{e^x + e^{mx} - e^{5x} - n}{e^{2x}}\, dx$$

Jawab:
dengan menggunakan NIM saya maka integral di atas dapat dituliskan lagi menjadi

$$\int \frac{e^x + e^{6x} - e^{5x} - 96}{e^{2x}}\, dx$$

maka integral di atas dapat diselesaikan dengan cara

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x + e^{6x} - e^{5x} - 96}{e^{2x}}\, dx &= \int e^{-2x}(e^x + e^{6x} - e^{5x} - 96)\, dx \\
&= \int e^{-x} + e^{4x} - e^{3x} - 96e^{-2x}\, dx \\
&= \int e^{-x}\, dx + \int e^{4x}\, dx - \int e^{3x}\, dx - 96 \int e^{-2x}\, dx \\
&= -e^{-x} + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{3x} - 96\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C \\
&= -\frac{1}{e^x} + \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + 48e^{-2x} + C \\
&= \boxed{-\frac{1}{e^x} + \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + \frac{48}{e^{2x}} + C}
\end{aligned}$$

untuk bentuk $\int e^{-x}\, dx$, $\int e^{4x}\, dx$, $\int e^{3x}\, dx$, dan $\int e^{-2x}\, dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus integral substitusi

2 Soal Nomor 2

Selesaikan soal berikut.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Jawab:
Untuk menyelesaikan soal di atas dapat menggunakan substitusi trigonometri dengan $x = 3\sin\theta$ sehingga didapatkan $dx = 3\cos\theta\,d\theta$. Maka bentuk $\sqrt{9-x^2}$ dapat diubah menjadi $\sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} = 3\cos\theta$ sehingga bentuk integralnya berubah menjadi

$$\int \frac{(3\sin\theta)^2}{3\cos\theta}(3\cos\theta\,d\theta) = \int 9\sin^2\theta\,d\theta$$

maka bentuk $\sin^2\theta$ dapat diubah menjadi $\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ sehingga integralnya menjadi

$$\begin{aligned}\int 9\sin^2\theta\,d\theta &= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\ &= \frac{9}{2}\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C\\ &= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C\end{aligned}$$

karena $x = 3\sin\theta$ maka $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ sehingga dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C$$

lalu karena $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ maka dengan menggunakan rumus trigonometri bentuk tersebut dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}2\sin\theta\cos\theta &= 2\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= 2\left(\frac{x}{3}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\\ &= 2\left(\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}\\ &= 2\left(\frac{x}{3}\right)\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\\ &= \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan $\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}$ ke dalam $\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C$ maka didapatkan

$$\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}\right) + C = \boxed{\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C}$$

3 Soal Nomor 3

Selesaikan soal berikut dengan mengganti nilai "m" sesuai dengan NIM satu digit terakhir (misal NIM: 24060124130096, maka nilai m = 6)

$$\int \frac{4x - m}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}\, dx$$

Jawab:
dengan menggunakan NIM saya maka integral di atas dapat dituliskan lagi menjadi

$$\int \frac{4x - 6}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}\, dx$$

integral tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan dekomposisi pecahan dengan cara memfaktorkan penyebut menggunakan metode horner sehingga didapatkan $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = (x-4)(x-2)^2$ sehingga bentuk dekomposisinya menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{4x-6}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} &= \frac{4x-6}{(x-4)(x-2)^2} \\
\frac{4x-6}{(x-4)(x-2)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-4} \\
4x-6 &= \frac{A(x-4)(x-2)^2}{x-2} + \frac{B(x-4)(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{C(x-4)(x-2)^2}{x-4} \\
4x-6 &= A(x-4)(x-2) + B(x-4) + C(x-2)^2 \\
4x-6 &= A(x^2 - 6x + 8) + Bx - 4B + C(x^2 - 4x + 4) \\
4x-6 &= Ax^2 - 6Ax + 8A + Bx - 4B + Cx^2 - 4Cx + 4C \\
4x-6 &= Ax^2 + Cx^2 - 6Ax + Bx - 4Cx + 8A - 4B + 4C \\
4x-6 &= (A+C)x^2 + (-6A + B - 4C)x + (8A - 4B + 4C)
\end{aligned}$$

maka dapat ditulis ulang menjadi sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned}
8A - 4B + 4C &= -6 \\
-6A + B - 4C &= 4 \\
A + C &= 0
\end{aligned}$$

didapatkan penyelesaiannnya yaitu $A = -\frac{5}{2}, B = -1, C = \frac{5}{2}$ lalu substitusikan ke $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-4}$ hasilnya yaitu

$$-\frac{5}{2(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{2(x-4)}$$

sehingga bentuk integral $\int \frac{4x-6}{x^3-8x^2+20x-16}$ dapat ditulis ulang dan diselesaikan dengan cara

$$
\begin{aligned}
\int \left(-\frac{5}{2(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{2(x-4)} \right) dx &= -\frac{5}{2} \int \frac{1}{x-2}\, dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-4}\, dx \\
&= -\frac{5}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{2} \ln|x-4| + C \\
&= \boxed{\frac{1}{x-2} + \frac{5}{2} \ln|x-4| - \frac{5}{2} \ln|x-2| + C}
\end{aligned}
$$

4 Soal Nomor 4

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu z antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$
Jawab:
Langkah pertama dalam menyelesaikan soal tersebut adalah mencari faktor-faktor dari $x^3 - 3x^2 - x + 3$ dengan metode horner sehingga didapatkan

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & -1 & 3 \\
1 & & 1 & -2 & -3 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0
\end{array}
$$

sehingga didapatkan faktornya adalah $x - 1$ dan $x^2 - 2x - 3$ sehingga dapat dituliskan ulang menjadi

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x-1)(x^2 - 2x - 3) \\
&= (x-1)(x-3)(x+1)
\end{aligned}
$$

maka didapatkan nilai $x = 1, x = 3$, dan $x = -1$ yang merupakan titik potong terhadap sumbu x dari fungsi $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Lalu, lakukan uji interval pada ketiga titik potong tersebut dengan cara:

Uji interval pada $x = -1$ hingga $x = 1$ (misal $x = 0$)

$$
\begin{aligned}
y &= 0^3 - 3(0)^2 - 0 + 3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Uji interval pada $x = 1$ hingga $x = 3$ (misal $x = 2$)

$$
\begin{aligned}
y &= 2^3 - 3(2)^2 - 2 + 3 \\
&= 8 - 12 - 2 + 3 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bahwa pada interval $x = -1$ hingga $x = 1$ nilai y selalu positif, sedangkan pada interval $x = 1$ hingga $x = 3$ nilai y selalu negatif. Sehingga untuk mencari luas pada interval $x = -1$ hingga $x = 2$, integralnya dapat ditulis menjadi

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx + \left(- \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \right) &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \\
&\quad - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{1}^{2} \\
&= 4 - \left(-\frac{7}{4} \right) \\
&= 4 + \frac{7}{4} \\
&= \boxed{\frac{23}{4} \text{ satuan luas}}
\end{aligned}
$$