KONSEP DASAR RUANG VEKTOR

INFORMATIKA UNDIP
Gasal 2024/2025

Materi Sesudah UTS

Materi 9
- Konsep Dasar Ruang Vektor
- Ruang Vektor
- Sub Ruang / Ruang Vektor Bagian

Materi 10
- Vektor Bebas Linier
- Vektor Bergantung Linier
- Kombinasi Linier

Materi 11
- Basis dan Dimensi Ruang Vektor
- Persamaan Garis dan Bidang secara Vektor

Materi Sesudah UTS

Materi 12
- Inner Product Space
- Himpunan Orthonormal
- Proses Gramm-Schmidt

Materi 13
- Transformasi Linier
- Kelinieran dan Matriks Transformasi
- Kernel dan Jangkauan

Materi 14
- Eigen Value dan Eigen Vector
- Diagonalisasi

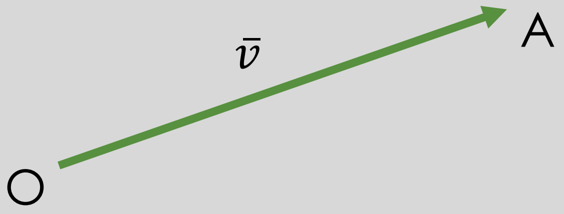
Materi Sesudah UTS

Materi 15
- Sistem Persamaan Differensial Linier Orde 1

UAS
- Ujian Akhir Semester

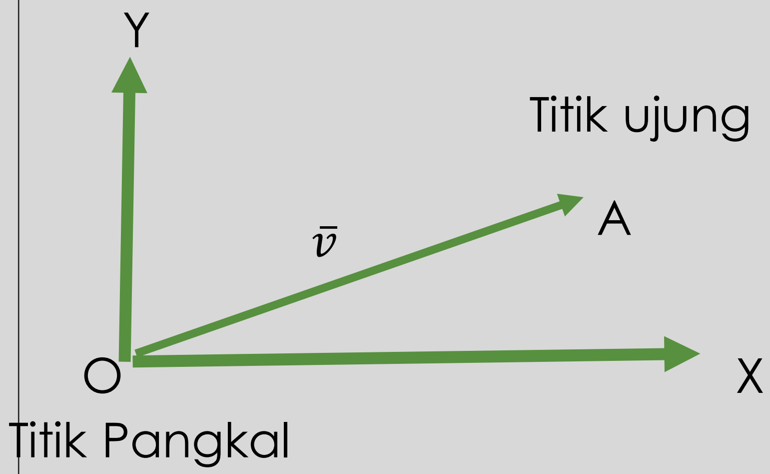
INGAT KEMBALI : Vektor di R^2 dan R^3

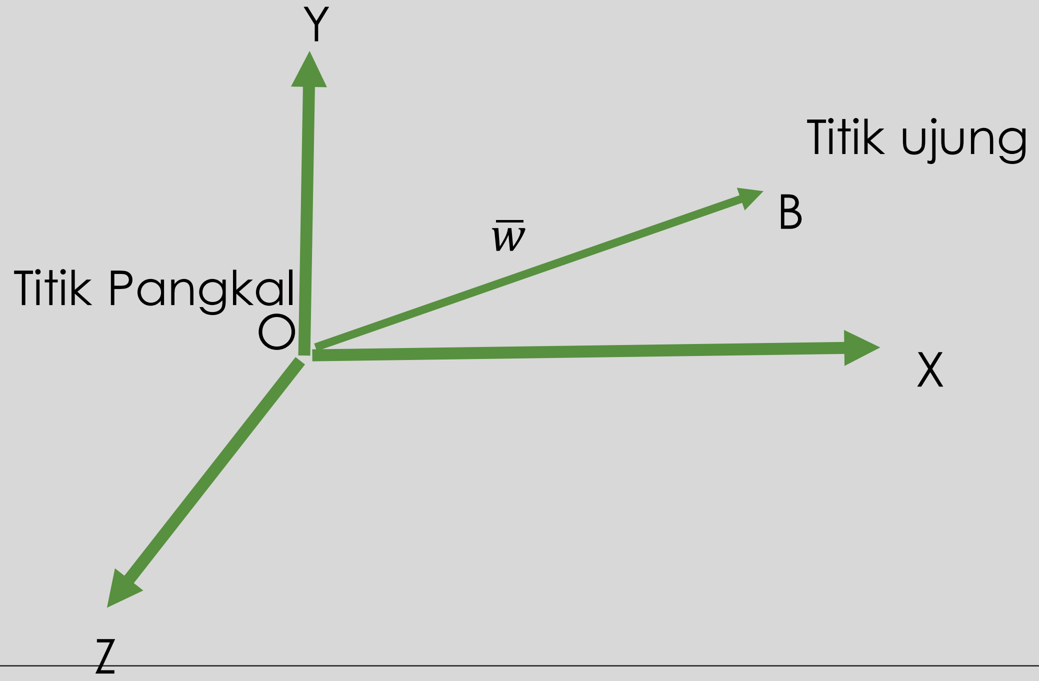
- Secara Geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah.



Titik O disebut sebagai titik pangkal vektor dan titik A disebut titik ujung.

Vektor tersebut dinotasikan dengan $\overline{OA}$ atau dapat dituliskan dengan huruf kecil $\bar{v}$





Pengenalan Ruang Vektor

- Semula hanya dikenal vektor di R^1, R^2 dan R^3. Namun dalam perkembangannya ternyata didapatkan permasalahan yang lebih kompleks, sehingga ada vektor berdimensi 4, 5 atau secara umum vektor di R^n.
- Orang pertama yang mempelajari vektor di R^n adalah Euclidis, sehingga vektor yang berada di R^n dikenal dengan vektor Euclidis. Ruang vektornya dinamakan ruang-n Euclidis.
- Ruang vektor adalah struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor, yaitu objek yang dapat dijumlahkan atau dikalikan dengan sebuah bilangan scalar. Scalar seringnya merupakan bilangan riil.

Operasi Standar pada Ruang-n Euclidis

Diketahui $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah vektor – vektor di ruang –n Euclidis dengan
$\overline{u} = (u_1,u_2,\dots,u_n)$ dan $\overline{v} = (v_1,v_2,\dots,v_n)$

Penjumlahan vektor

$\overline{u} + \overline{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)$

Perkalian titik

$\overline{u} \,.\, \overline{v} = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + \dots + u_n.v_n)$

Perkalian dengan skalar

$k\ \overline{u} = (ku_1, ku_2 , \dots, ku_n)$

Panjang vektor

$$\|\overline{u}\| = (\overline{u}.\overline{u})^{1/2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \dots + {u_n}^2}$$

Jarak antara vektor

$$d\,(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u} - \overline{v} \,.\, \overline{u} - \overline{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh

Diketahui $\bar{a} = (1,1,2,3)$ dan $\bar{b} = (2,2,1,1)$

Tentukan jarak antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Jawab

$\bar{a} - \bar{b} = (-1, -1, 1, 2)$

$d(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{7}$

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (1,\ 1,\ 2,\ 3)$ dan $\bar{v} = (2,\ 2,\ 1,\ 1)$

Tentukan panjang vektornya!

Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Ruang Vektor Umum

Misalkan $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$ dan $k, l \in Riil$

V dinamakan **ruang vektor** jika terpenuhi 10 syarat / aksioma berikut :

1. V tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Untuk setiap $\overline{u}, \overline{v} \in V$ maka $\overline{u} + \overline{v} \in V$

2. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$

3. $\overline{u} + \left(\overline{v} + \overline{w}\right) = \left(\overline{u} + \overline{v}\right) + \overline{w}$

4. Terdapat $\overline{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\overline{u} \in V$

   berlaku $\overline{u} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}$

5. Untuk setiap $\overline{u} \in V$ terdapat $\left(-\overline{u}\right)$ sehingga

   $$\overline{u} + \left(-\overline{u}\right) = \left(-\overline{u}\right) + \overline{u} = \overline{0}$$

6. V tertutup thd operasi perkalian dengan skalar.

untuk setiap $\overline{u} \in V$ dan k sembarang *scalar* $\in$ *Riil* maka $k\overline{u} \in V$

7. $k\left(\overline{u}+\overline{v}\right)=k\overline{u}+k\overline{v}$, k sembarang scalar

8. $\left(k+l\right)\overline{u}=k\overline{u}+l\overline{u}$, k,l sembarang scalar

9. $k\left(l\,\overline{u}\right)=l\left(k\,\overline{u}\right)=\left(kl\right)\overline{u}$

10. $1.\overline{u}=\overline{u}$

Catatan : Jika salah satu syarat tidak terpenuhi, maka V bukan ruang vektor

Contoh :

1. V adalah himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).

   Notasi : R^n (Ruang Euclides orde n)

2. V adalah himpunan matriks berukuran m x n dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),

   Notasi : M_{mxn} (Ruang Matriks mxn)

3. V adalah himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.

   Notasi : P_n (Ruang Polinom orde n)

Lanjutan Contoh

Bentuk umum polinom orde – n

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$q_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$

Operasi standar pada polinom orde – n

$p_n(x) + q_n(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$

$k\, p_n = ka_0 + ka_1 x + \ldots + ka_n x^n$

Contoh Bukan Ruang Vektor

Tunjukkan bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor , ($a,b \in R$) !

Jawab

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi .

Akan ditunjukkan apakah memenuhi syarat yang pertama

Misalkan $A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$, $p,q,r,s \in R$ maka $A,B \in V$

$A + B = \begin{bmatrix} p+r & 2 \\ 2 & q+s \end{bmatrix} \notin V$ $\rightarrow$ syarat 1 tidak dipenuhi

Jadi V bukan merupakan ruang vektor

SUB RUANG /SUBSPACE

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V

W dinamakan **subruang** (*subspace*) V

jika W juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Syarat W disebut subruang dari V adalah :

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\overline{u}, \overline{v} \in W$ maka $\overline{u} + \overline{v} \in W$
4. Jika $\overline{u} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $k\overline{u} \in W$

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

1. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\ \}$

2. Jelas bahwa $W \subset M_{2x2}$

3. Ambil sembarang matriks $A, B \in W$

   Tulis $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks $A \in$ W dan $k \in$ Riil

maka $kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$

Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan Subruang dari M_{2x2}.

Contoh

- Misalkan V adalah ruang vector dimensi tiga (R^3) dan W = {(a,b,c) | a, b, c adalah bilangan riil}. Buktikan himpunan berikut apakah subspace dari R^3?

W = {(a,b,c) | a = 2b}

Jawab :

1) W tidak kosong
   - $W \neq \emptyset$, dengan mengambil $a = b = c = 0$ berlaku $0 = 2.0$, maka $(0,0,0) \in W$.

Lanjutan

2). Jelas bahwa $W \subset R^3$

3) **Tertutup**

- Ambil sembarang $\vec{u}$, $\vec{v} \in W$, sebut $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dan $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2) \in W$, maka $a_1 = 2\,b_1$ dan $a_2 = 2b_2$

$a_1 + a_2 = 2b_1 + 2b_2 = 2(b_1 + b_2)$, maka $(\vec{u} + \vec{v}) \in V\ \forall$ $\vec{u}$, $\vec{v} \in W$.

4) **Perkalian dengan sembarang skalar α terhadap sembarang vektor $\vec{u}$ tertutup**

- Ambil sembarang $\vec{u} \in W$, sebut $\vec{u} = (a, b, c)$, maka berlaku $a = 2b$, maka $\alpha\,\vec{u} = \alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$

$\alpha a = \alpha(2b) = 2\alpha\, b$, maka $\alpha\,\vec{u} \in V$, $\forall\ \vec{u}$, $\alpha \in K$, $\forall\ \vec{u} \in V$

Contoh Bukan Sub Ruang

Periksa apakah himpunan *D* yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol

merupakan subruang dari ruang vektor M_{2x2}

Jawab : Ambil sembarang matriks A, B $\in$ D

Pilih $a \neq b$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (A) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Karena $a \neq b$

Maka $det\,(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan subruang
karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Ada Pertanyaan?

- Kerjakan Latihannya ya…

Latihan

Apakah himpunan berikut ruang vektor? Buktikan!

1. P = {(a,1,1) | a $\in$ R}
2. Q = {(a,b,c) | a = b – c}

Misalkan V adalah ruang vector dimensi tiga (R^3) dan W = {(a,b,c) | a, b, c adalah bilangan riil}. Manakah himpunan berikut apakah subspace dari R^3?

3. W = {(a,b,c) | a = b + c}
4. W = {(a,b,c) | a = c^2}

5. Apakah W=$\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} | a, b \in R\right\}$ adalah subspace dari M_{2x2}?