MULTIPLE INTEGRAL

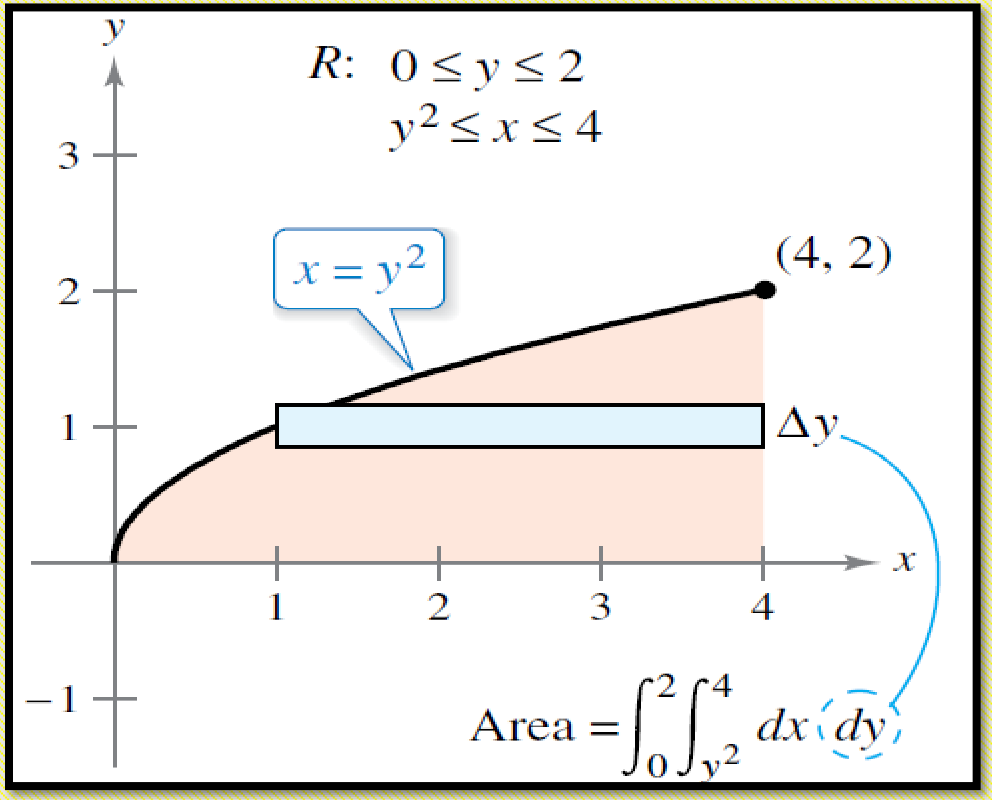
MATERI TAMBAHAN

LUAS DAERAH YANG DIBATASI DUA KURVA

Contoh 1 : hitung luas daerah yang dibatasi kurva $x = y^2$, $y = 0$, dan $x = 4$.

Luas daerah yang dimaksud

$$\iint_A dA$$



Akan dihitung integralnya dengan urutan dx dan dy.

- Terhadap variabel x, kurva atasnya $x = 4$ dan kurva bawahnya $x = y^2$
- Terhadap variabel y, kurva bagian atasnya $y = 2$ dan kurva bawahnya $y = 0$

Sehingga luasnya

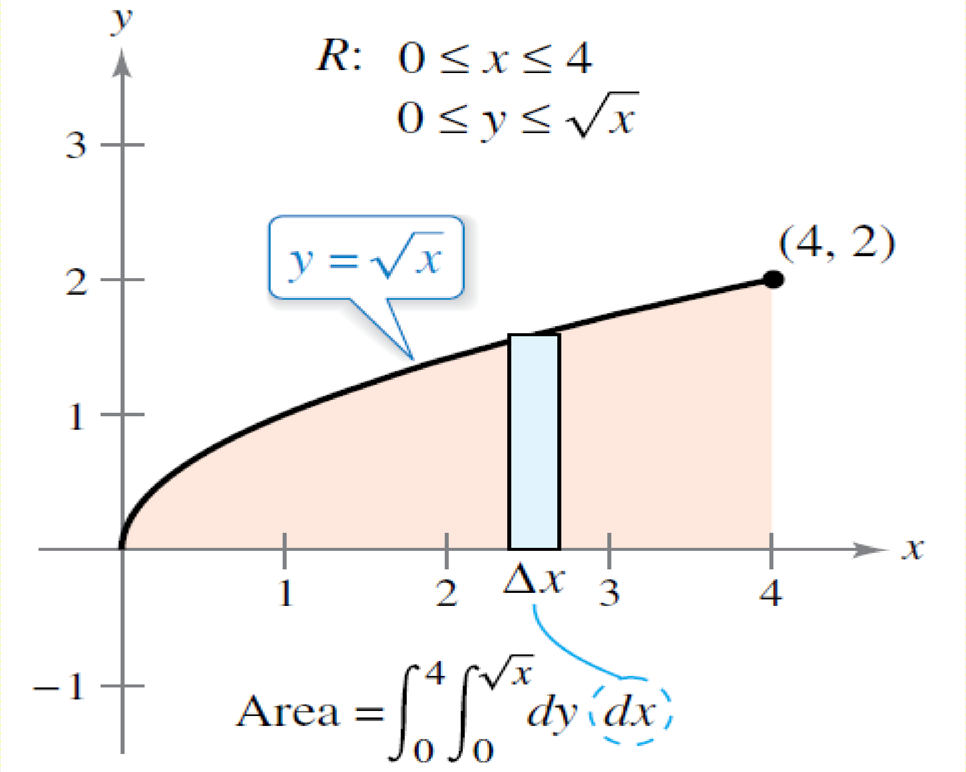
$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\,dy$$

LUAS DAERAH YANG DIBATASI DUA KURVA

Contoh 1 : hitung luas daerah yang dibatasi kurva $x = y^2$, $y = 0$, dan $x = 4$.

Luas daerah yang dimaksud

$$\iint_A dA$$



Akan dihitung integralnya dengan urutan dy dan dx.

- Terhadap variabel y, kurva atasnya $y = \sqrt{x}$ dan kurva bawahnya $y = 0$
- Terhadap variabel x, kurva bagian atasnya $x = 4$ dan kurva bawahnya $x = 0$

Sehingga luasnya

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx$$

LUAS DAERAH YANG DIBATASI DUA KURVA

Contoh 1 : hitung luas daerah yang dibatasi kurva $x = y^2$, $y = 0$, dan $x = 4$.

Luas daerah yang dimaksud

$$\iint_A dA$$

Untuk perhitungan integralnya dapat dilakukan

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy = \int_0^2 (4 - y^2)\, dy = \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg]_{y=0}^2 = \frac{16}{3}$$

atau

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}\ x^{3/2}\Bigg|_{x=0}^4 = \frac{16}{3}$$

INTEGRAL PADA KOORDINAT POLAR

Misalkan $x = r\cos(\theta)$ dan $y = r\sin(\theta)$. Diketahui R luas daerah yang dibatasi

$$0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \text{ untuk } \alpha \leq \theta \leq \beta$$
$$0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$$

Jika f kontinu pada R dan $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ keduanya kontinu pada $[\alpha, \beta]$ maka

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$

Contoh 2 : Koordinat Polar

Diketahui R daerah yang dibatasi kurva :

$$x^2 + y^2 = 5, x^2 + y^2 = 1$$

Hitung

$$\iint_R (x^2 + y)\, dxdy$$

Daerah R dalam koor Polar

$$1 \leq r \leq \sqrt{5}$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

dan $x^2 + y$

$$= r(r\, cos^2(\theta) + \sin(\theta))$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2\theta + r \sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2\theta + r^2 \sin\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta\right)\Big]_1^{\sqrt{5}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\sin\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\sin\theta\right) d\theta$$

$$= \left(3\theta + \frac{3\sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\cos\theta\right)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi.$$

URUTAN INTEGRASI : TRIPLE INTEGRAL

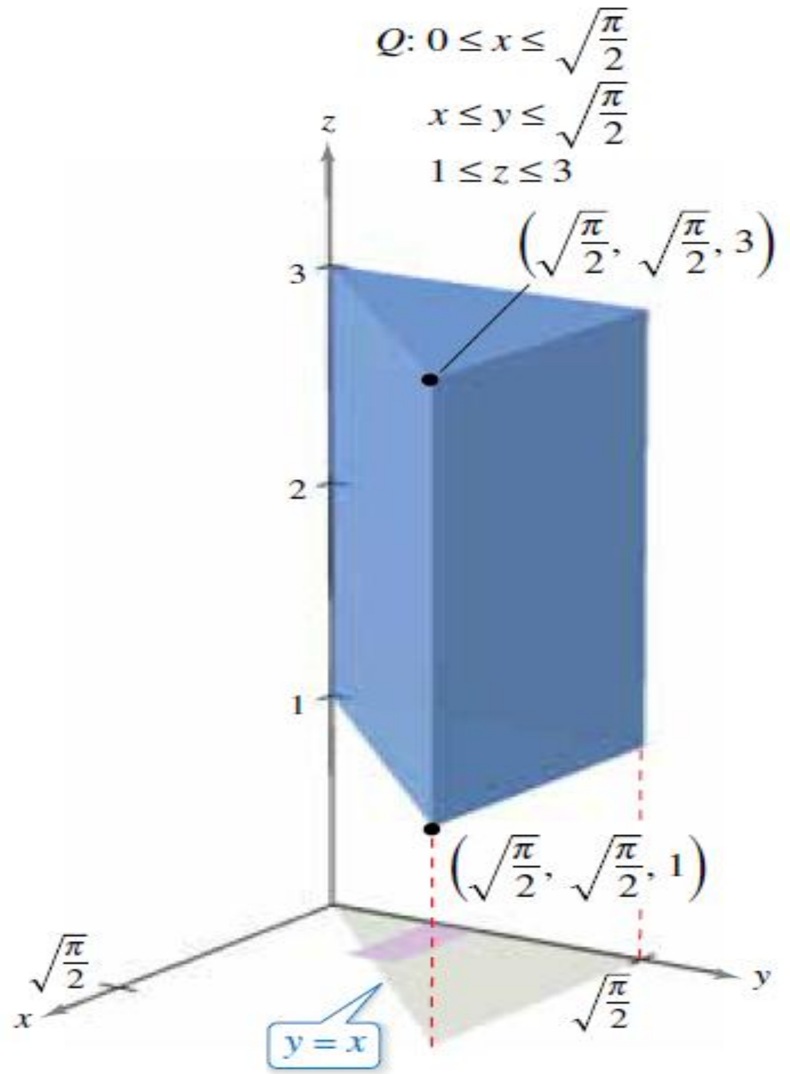
Contoh 3 : Hitung

$$\int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} \int_{x}^{\sqrt{\pi/2}} \int_{1}^{3} \sin(y^2)\, dz\, dy\, dx$$

Jika proses penghitungan integral dimulai dari dz, dy, dan dx akan mengalami kesulitan dalam penghitungan

$$\mathbf{2 \int \sin(y^2)\, dy}.$$

Salah satu cara mengatasinya adalah mengubah urutan integrasi dengan memperhatikan luas daerah yang dimaksud



URUTAN INTEGRASI : TRIPLE INTEGRAL

Daerah semula Q :

$$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 1 \le z \le 3$$

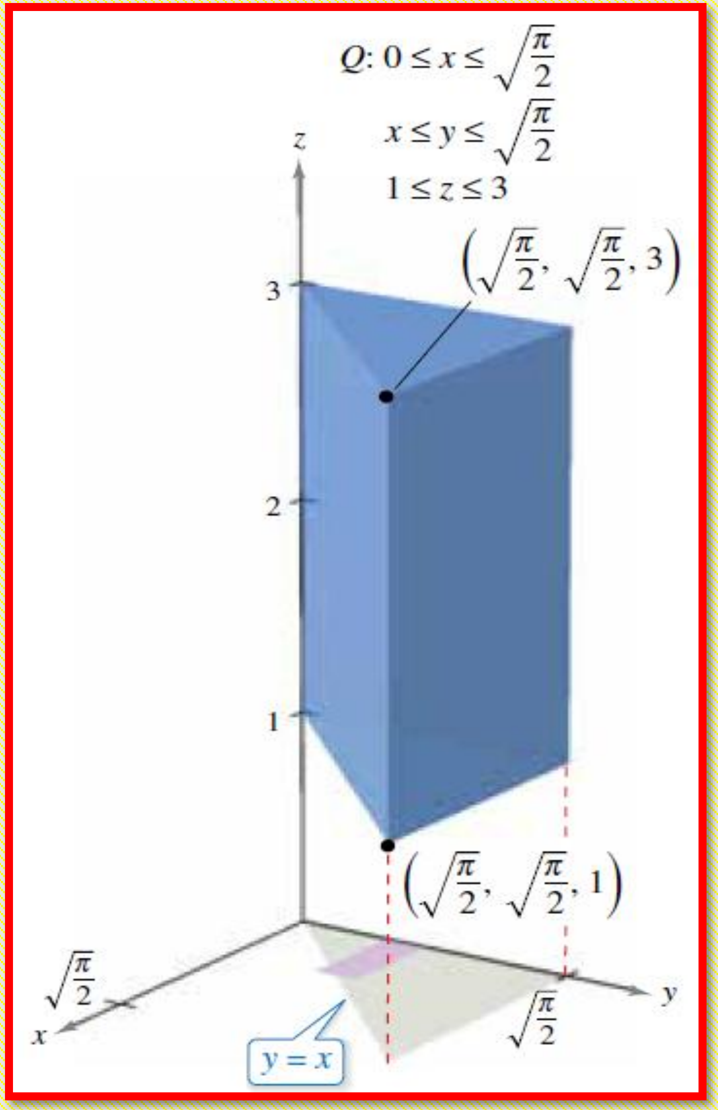
Proyeksi Q pada bidang xy adalah

$$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0 \le x \le y$$

Sehingga

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \sin(y^2)\, \boldsymbol{dz}\, \boldsymbol{dy}\, \boldsymbol{dx}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{y} \int_1^3 \sin(y^2)\, \boldsymbol{dz}\, \boldsymbol{dx}\, \boldsymbol{dy}$$



URUTAN INTEGRASI : TRIPLE INTEGRAL

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y\int_1^3 \sin(y^2)\,dz\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y z\sin(y^2)\Big]_1^3\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin(y^2)\Big]_0^y\,dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y\sin(y^2)\,dy$$

$$= -\cos(y^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}}$$

$$= 1.$$