

MATEMATIKA I

INTEGRAL

Silabus

Pertemuan ke-	Pokok bahasan	Materi
1	Integral tak tentu	a. Definisi integral tak tentu b. Kelinieran integral tak tentu c. Aturan pangkat pada integral tak tentu (teknik pengintegralan substitusi)
2	Integral Beberapa Fungsi Transenden	a. Integral fungsi logaritma b. Integral fungsi eksponen c. Integral fungsi invers trigonometri d. Integral fungsi hiperbolik
3	Teknik pengintegralan	a. Teknik pengintegralan substitusi (pendalaman) b. Teknik pengintegralan parsial
4	Teknik pengintegralan	c. Teknik pengintegralan fungsi pecah rasional
5	Integral tentu	a. Konsep luas daerah b. Teorema dasar kalkulus c. Sifat-sifat integral tentu d. Teorema nilai rata-rata
6	Aplikasi integral tentu	a. Luas daerah
7	Aplikasi integral tentu	b. Volume benda pejal c. Volume benda putar

Referensi

- Purcell, Edwin .J..1997. Kalkulus dan Geometri Analitik (Terjemahan I.N Susilo dkk)Jilid I, Edisi ke-5, Jakarta : Airlangga.
- Stewart, James. 1998. Kalkulus (Terjemahan IN Susilo dkk) Jilid I, Jakarta : Airlangga.
- Anton, Howard. 1984 Calculus with Analytic Geometry. Second Edition. New York : John Wiley & Sons
- Leithold, Louis.1986. Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik. Edisi kelima Jilid 2. (terjemahan oleh Hutahean dkk.) . Jakarta : Airlangga.



Turunan dari



$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 - 1$$

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F'(x) = 2x$$



1.1 Anti turunan (Integral tak tentu)

Diberikan fungsi $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definisi (Anti Turunan). Kita sebut F sebagai anti turunan dari f pada selang I jika $DF = f$ pada I . Dengan kata lain,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Catatan: Jika x adalah titik ujung dari I , maka $F'(x)$ cukup berupa turunan satu sisi.

Notasi anti turunan (integral tak tentu) :

$$\int f(x)dx = F(x)$$

1.1 Anti turunan (Integral tak tentu)

Contoh 1. Carilah anti turunan dari $f(x) = 4x^3$ pada $(-\infty, \infty)$.

Dengan menggunakan aturan turunan, kita tahu bahwa

$$F(x) = x^4 \rightarrow F'(x) = 4x^3,$$

$$F(x) = x^4 + 2 \rightarrow F'(x) = 4x^3,$$

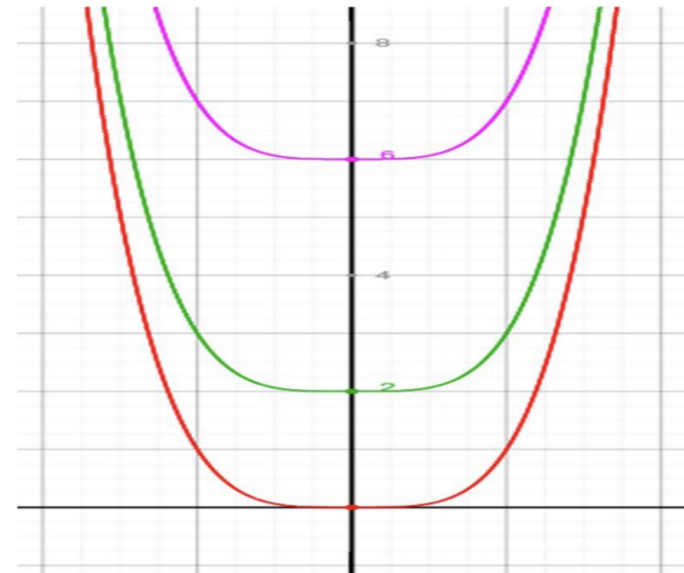
$$F(x) = x^4 + 4 \rightarrow F'(x) = 4x^3.$$

Sehingga didapat anti turunan dari

$f(x) = 4x^3$ adalah

$F(x) = x^4 + C$, dengan C sebarang konstanta,

atau dapat ditulis : $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.



1.1 Anti turunan (Integral tak tentu)

Teorema A (Aturan pangkat). *Jika r adalah bilangan rasional kecuali -1 , maka*

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C .$$

Bukti : Sebagai Latihan!

Teorema B (Integral sinus dan cosinus).

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Bukti : Sebagai Latihan!



1.1 Anti turunan (Integral tak tentu)

Contoh 2.

$$1. \int x^2 dx =$$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$3. \int \sqrt{x} dx =$$

$$4. \int \sin \theta d\theta =$$

1.1 Anti turunan (Integral tak tentu)

Latihan Soal. Selesaikan!

1. $\int 1 dx = \dots$

2. $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \dots$

3. $\int \sqrt{x^5} dx = \dots$

4. $\int \sqrt[5]{x} dx = \dots$

5. $\int \sqrt{x^7} dx = \dots$

6. $\int x^{-2} dx = \dots$

7. $\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \dots$

8. $\int x^{-\frac{5}{4}} dx = \dots$

9. $\int \sqrt[3]{x^{-2}} dx = \dots$

10. $\int \sqrt{x^{-\frac{1}{2}}} dx = \dots$

11. $\int \cos t \, dt = \dots$

1.2 Sifat Kelinearan Integral

Teorema C (Kelinearan Integral). *Andaikan f dan g mempunyai anti turunan (integral tak tentu) dan andaikan k suatu konstanta, maka :*

$$(i) \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$(ii) \quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bukti : Sebagai Latihan!

1.2 Sifat Kelinieran Integral

Latihan Soal. Selesaikan!

1. $\int (x^2 + 2x - 1)dx = \dots$

2. $\int (x^3 - x)(x - 1)dx = \dots$

3. $\int t^2(t - 1)dt = \dots$

4. $\int (u - 1)(u^2 - u + 2)du = \dots$

5. $\int (x - 2)^2 dx = \dots$

6. $\int (x - 3)^3 dx = \dots$

7. $\int (x^2 - 1)^5 dx = \dots$

8. $\int \frac{x^2 - 2x}{x} dx = \dots$

9. $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x}} dx = \dots$

10. $\int \frac{x^6 - x^2 + 1}{x^4} dx = \dots$

1.2 Sifat Kelinearan Integral

$$11. \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx = \dots$$

$$12. \int \frac{\sqrt{x^3} - x^3}{\sqrt{x} - x} dx = \dots$$

$$13. \int (2 \cos \theta - 1) d\theta = \dots$$

$$14. \int (2 \sin \theta - 6 \cos \theta) d\theta = \dots$$

$$15. \int (2 \sin \theta - 6 \cos \theta) d\theta = \dots$$

$$16. \int (t^2 - 2 + 4 \sin t) dt = \dots$$

$$17. \int (\cos x - x^3 - 2x + 1 - \sin x) dx = \dots$$

1.3 Aturan Pangkat (Teknik Pengintegralan Substitusi)

Teorema D (Aturan Pangkat). *Andaikan g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu bilangan rasional bukan*

$$-1, \text{ maka : } \int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1} [g(x)]^{r+1} + C.$$

Bukti : Sebagai Latihan!

Contoh 3.

$$1. \int [x^2 - 1]^5 [2x] dx = \frac{1}{5+1} (x^2 - 1)^{5+1} + C = \frac{1}{6} (x^2 - 1)^6$$

$$2. \int [\sin x]^{10} [\cos x] dx = \frac{1}{10+1} \sin^{10+1} x + C = \frac{1}{11} \sin^{11} x + C$$



1.3 Aturan Pangkat (Teknik Pengintegralan Substitusi)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

1. $\int (\sqrt{2}x + 1)^3 \sqrt{2} dx$

Penyelesaian

Misal $u = \sqrt{2}x + 1 \implies du = \sqrt{2} dx$

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{2}x + 1)^3 \sqrt{2} dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4} u^4 + C \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{2}x + 1)^4 + C\end{aligned}$$

1.3 Aturan Pangkat (Teknik Pengintegralan Substitusi)

Latihan Soal. Selesaikan!

1. $\int (x^2 - 1)^2 x dx = \dots$

2. $\int (x^3 - x)^3 (3x^2 - 1) dx = \dots$

3. $\int t^2 \sqrt{4t^3 - 2} dt = \dots$

4. $\int (u - 1)(u^2 - 2u + 1)^{10} du$

5. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^5}{\sqrt{x}} dx = \dots$

6. $\int \frac{3t}{\sqrt{t^2 - 5}} dt = \dots$

7. $\int (4t - 2) \sqrt[3]{t^2 - t - 1} dx = \dots$

8. $\int \sin(2x + 1) 2 dx = \dots$

9. $\int \cos(x^3 + 1) x^2 dx = \dots$

10. $\int \sin^4 x \cos x dx = \dots$

11. $\int 2 \cos^6 x \sin x dx = \dots$

12. $\int 2 \sin x \cos x dx = \dots$