DERET TAYLOR

A. Definisi

Deret Taylor adalah representasi fungsi dalam bentuk jumlah tak hingga dari suku-suku yang diperoleh dari turunan fungsi tersebut pada suatu titik tertentu. Secara matematis, deret Taylor untuk fungsi f(x)f(x)f(x) yang memiliki turunan hingga semua orde di sekitar titik aaa diberikan oleh:

Untuk setiap fungsi $f(x)$ yang diferensiabel di titik c, maka $f(x)$ dapat diekspansi sebagai berikut:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Atau dalam bentuk umum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

B. Contoh pengerjaan

1. f'(z)=e^z, uraikan dengan deret taylor pada $f^{(n)}(0)=e^0=1$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. f(z)=z^8e^{3z} uraikan dengan deret Taylor pada z = 0

$$e^{3z} = e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^n$$

Jadi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+8}.$$

3. f(x) = sin x, uraikan dengan deret Taylor pada x = (π/4)

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(\pi/4) = ½\sqrt{2}$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad$ $f'(\pi/4) = ½\sqrt{2}$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f''(\pi/4) = -½\sqrt{2}$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad$ $f'''(\pi/4) = -½\sqrt{2}$

$\sin x = f(x - \pi/4)$

$$\sin x = f\frac{\pi}{4} + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \cdots.$$

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 -$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n$$