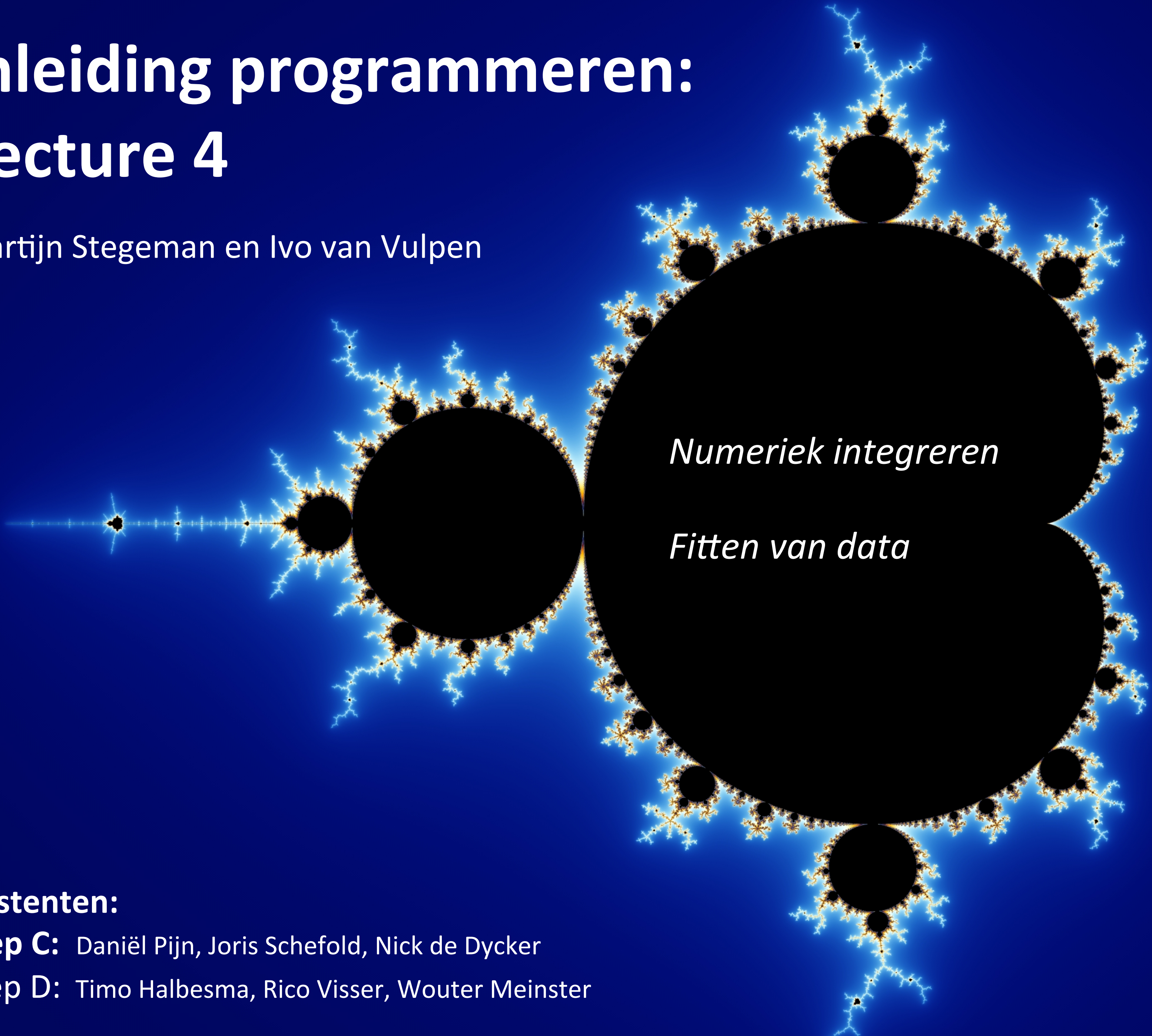
Inleiding programmeren: Lecture 4

Martijn Stegeman en Ivo van Vulpen



Numeriek integreren

Fitten van data

Assistenten:

groep C: Daniël Pijn, Joris Schefold, Nick de Dycker

groep D: Timo Halbesma, Rico Visser, Wouter Meinster

Week 2

- *Basis wiskunde*
- *Vergelijkingen*

Week 4

- *Numeriek integreren*
- *Fitten van data*

Week 6

- *Simulaties*

Week 7

- *Data-analyse*

Algemeen: Python syntax

Importeren van bibliotheken (libraries)

Voorbeelden bibliotheken:

math, random, time, matplotlib, ...

Voorbeeld: sinus functie (zit in de math bibliotheek)

```
>>> a = 1.00
>>> print sin(a)

Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell#4>", line 1, in <module>
    print sin(a)
NameError: name 'sin' is not defined
>>> |
```

Option 1: Import only sin function

```
import math
a = 1.00
print math.sin(a)
```

Een andere library kan ook een sin() functie hebben nl

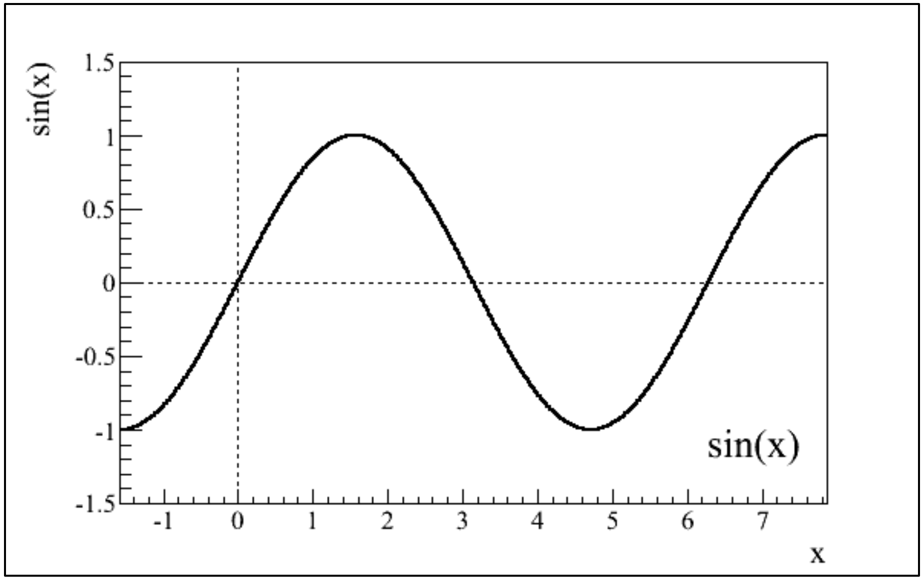
Option 2: Import full library

```
from math import *
a = 1.00
print sin(a)
```

Deel 1: numeriek integreren

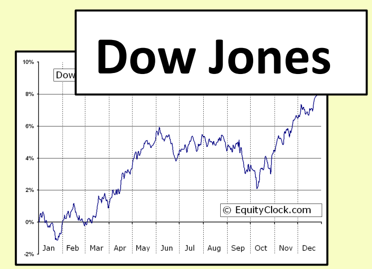
a) Riemann-som

b) Monte-Carlo techniek



$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

Probleem: 1) niet altijd exacte parametrisatie: **beurskoers**



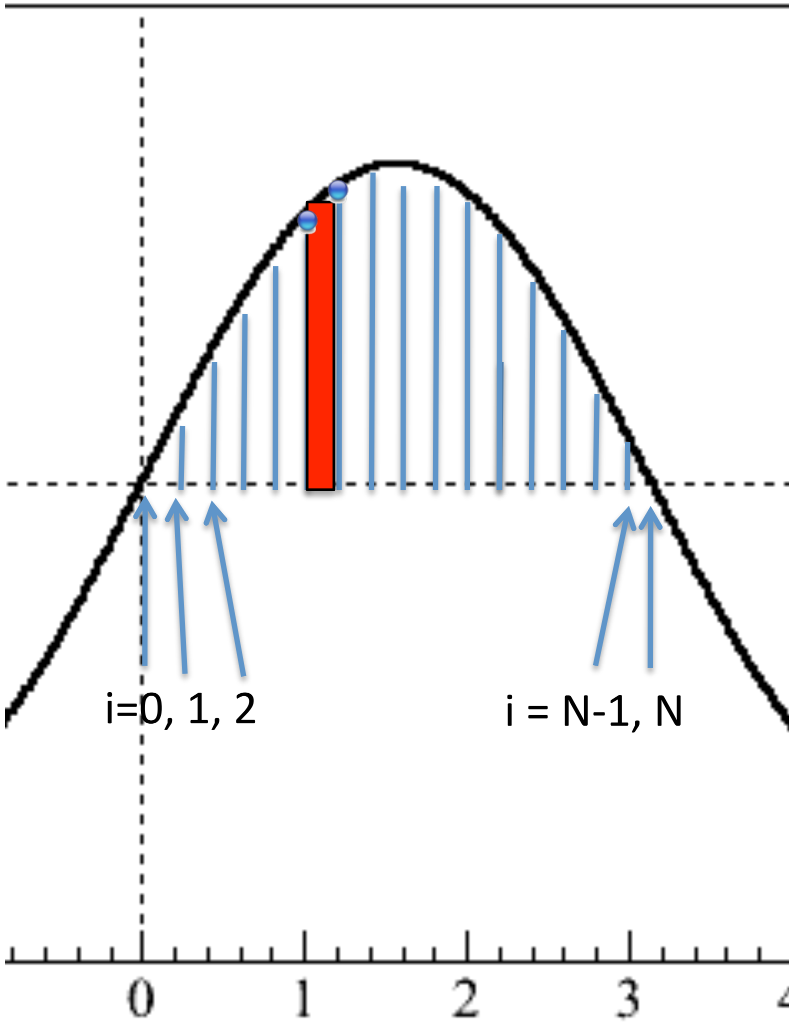
2) niet altijd een primitieve: **$f(x) = x^x$ of $e^{-\alpha x^2}$**

3) hoe doet Wolfram Alpha dat ?

http://www.wolframalpha.com/

Strategie 1: de Riemannsom

Strategie 1: Riemannsom

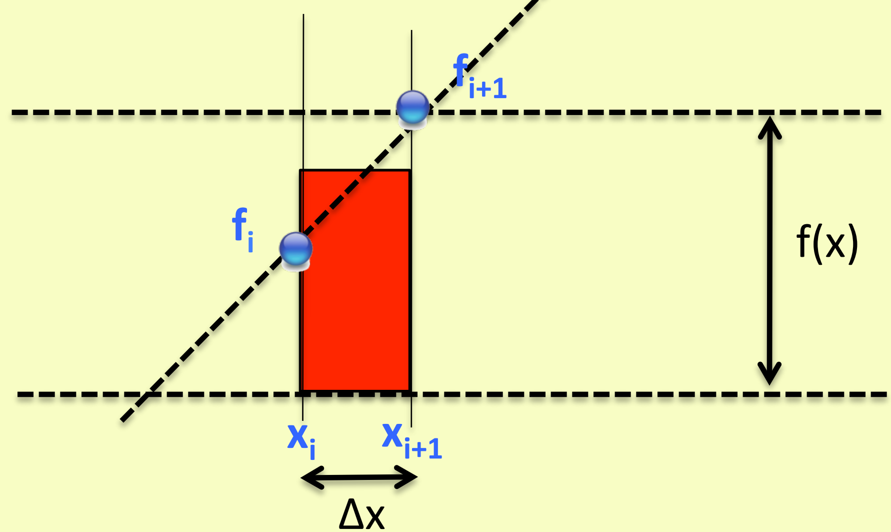


Let op: je hoeft dus alleen de y-waardes te bepalen op een vast aantal punten. Doe de afleiding van 3) zelf!

1) Verdeel x-as in N intervallen (x_0 t/m x_N) en bereken de y-waarden: $y_i = f(x_i)$

2) Benader f(x) voor elke bin: lineair

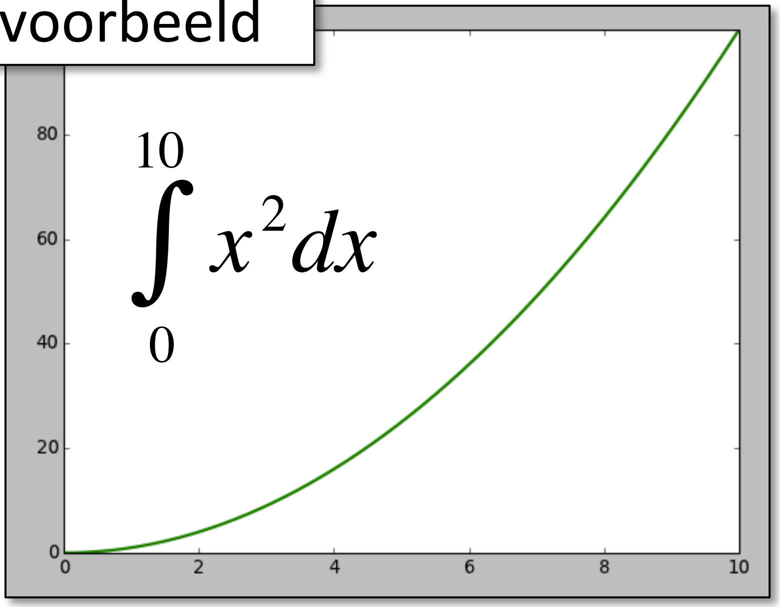
$$f(x) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$



3) Reken sommatie uit (doe dit zelf)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N)$$

voorbeeld



Algemene tip:

start simpel om je code te testen

Algemeen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N\right)$$

In 10 stappen (Δx=1):

(dus 11 punten)

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{\Delta x}{2}(f_0 + f_{10}) + \Delta x(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9)$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 100) + (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81)$$

$$= 335$$

In 10000 stappen (Δx=0.01): integraal = ?

Strategie 2: Monte Carlo methode

Random getallen in python

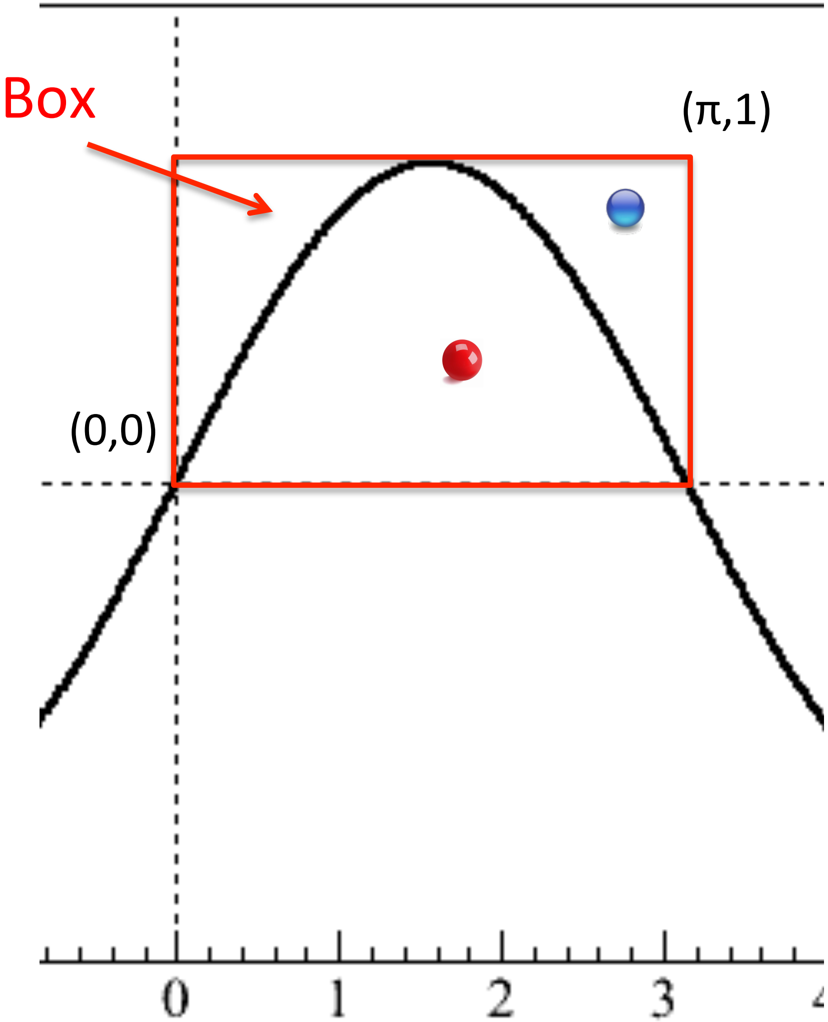
```
from random import *

x = random()
print x
```

random getal tussen 0 en 1

Hoe krijg je nou een:

- random getal tussen 0 en 2 ?
- random getal tussen -1 en 1
- random getal tussen a en b

Strategie 2: Monte-Carlo



1) Zet een box om de integratieregio heen
2) Gooi random punt (x_i, y_i) in de box

   goed: binnen functie

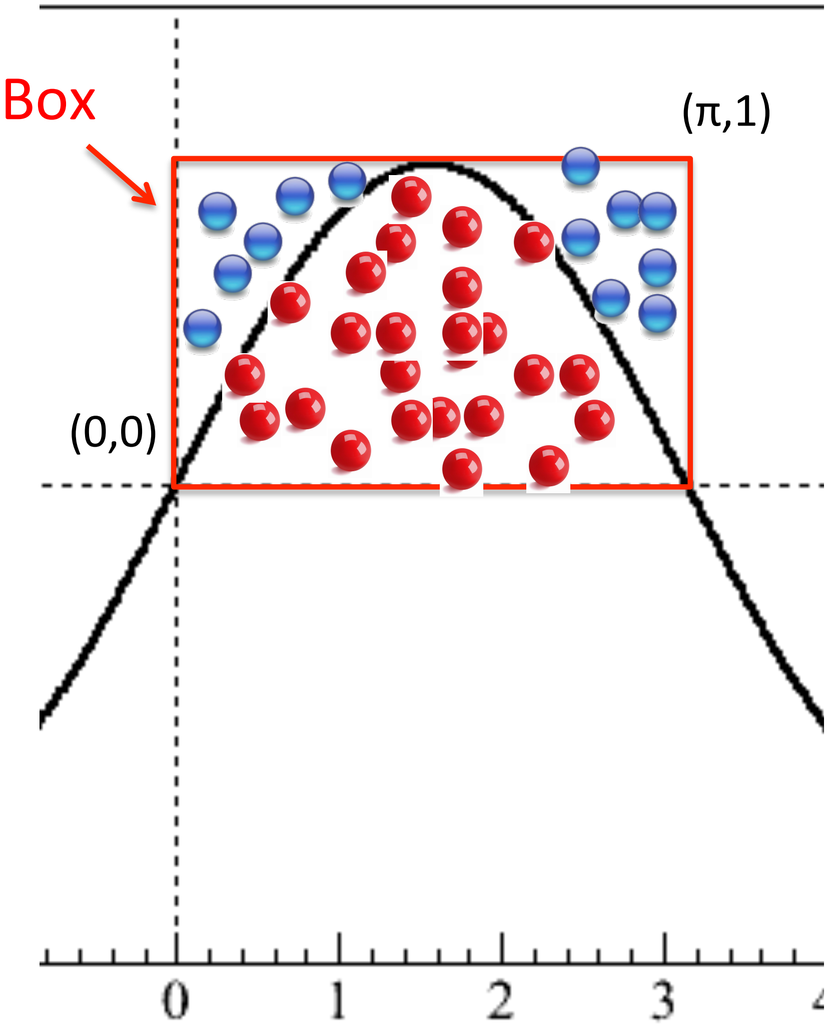
   fout: buiten functie

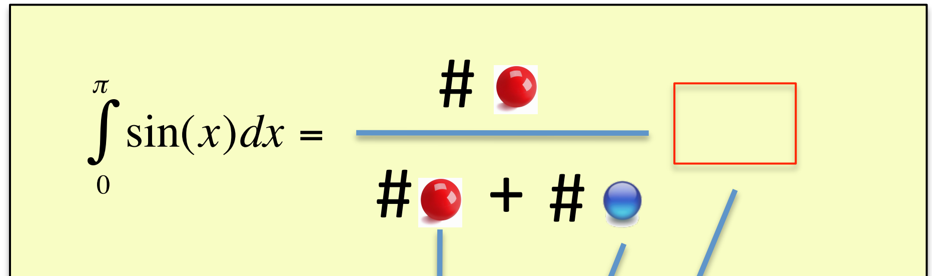
3) Integraal is dan fractie van 'goede' punten maal de oppervlakte van de box

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{\#}{\# + \#}\ \boxed{} \nearrow \pi$$

Handig: dit kan elke (ook een niet-analytische) functie zijn

Strategie 2: Monte-Carlo





$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \frac{25}{25+13} \times \pi = 2.066$$

Opgaves numeriek integreren

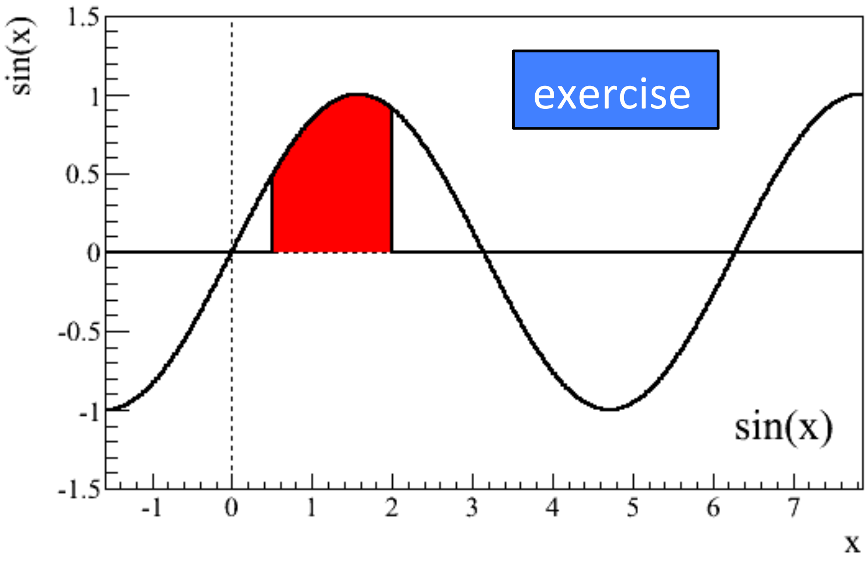
Opgaven 1 voor deze week:

$$\int_0^1 x^x dx$$

$$\int_{0.1}^{2.0} \sin(x)\ dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x^2)\ dx$$

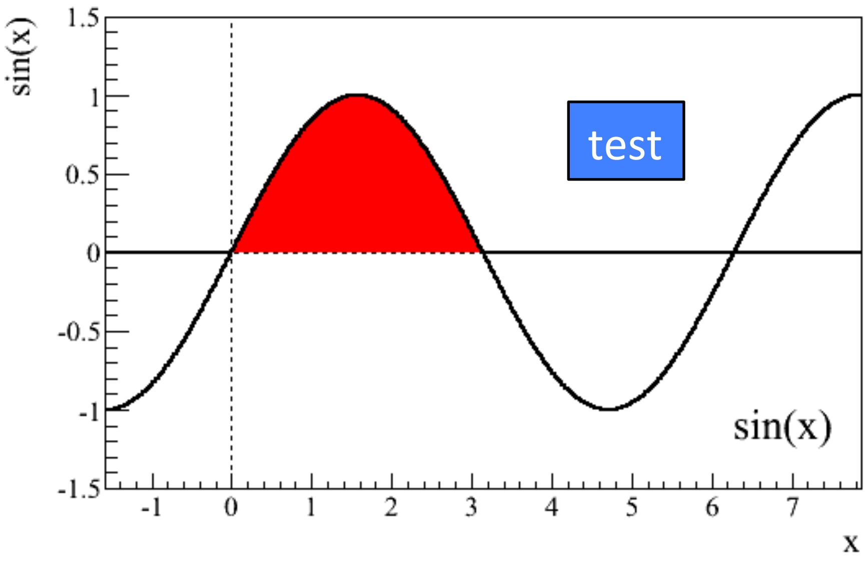
Maak altijd een grafiek en check je code door een vergelijkbare en bekende integraal te evalueren



Numerical Integration

$$\int_{0.1}^{2.0} \sin(x)dx$$

Use both sum and Monte-Carlo



Check: known integral

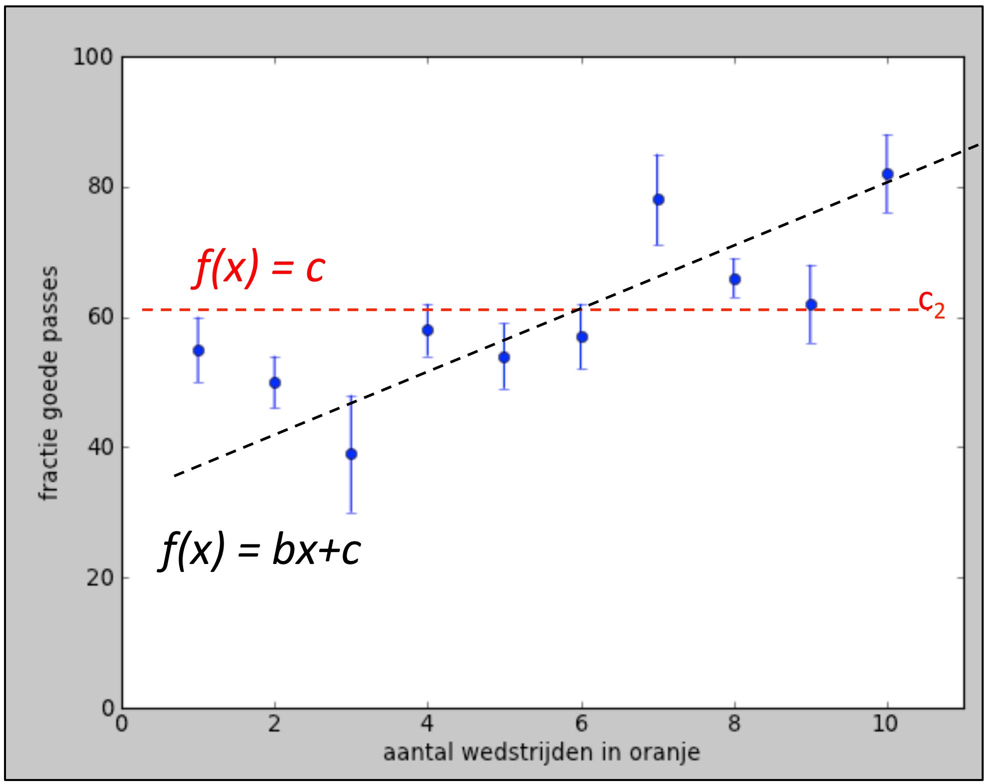
$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)dx$$

TIP: always make a plot on the screen.
Also with Monte-Carlo.

Deel 2: modellen (data fitten)

Data set

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	55	50	39	58	54	57	78	66	62	82
σ_y	5	4	9	4	5	5	7	3	6	6



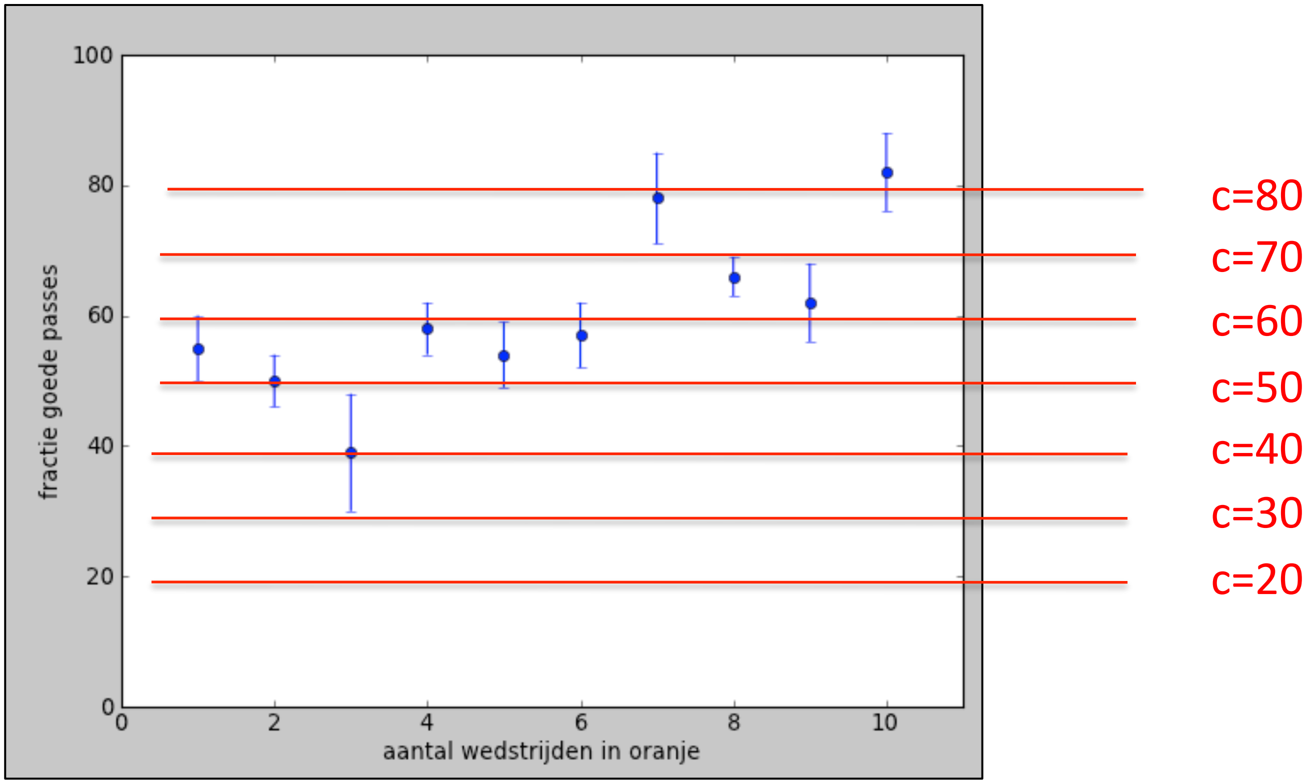
Beste beschrijving van de data ?

Opgaves:

$f(x) = c$: vind c en Δc

$f(x) = bx+c$: vind b en c

Welke waarde van c past het best ?



Maat van ‘compatibiliteit’: de χ^2 maat

Voor elke waarde van c (f(x)) kan je de χ^2 uitrekenen

() = de afstand tussen de voorspelling en het data-punt
uitgedrukt in het aantal keer de onzekerheid op de meting

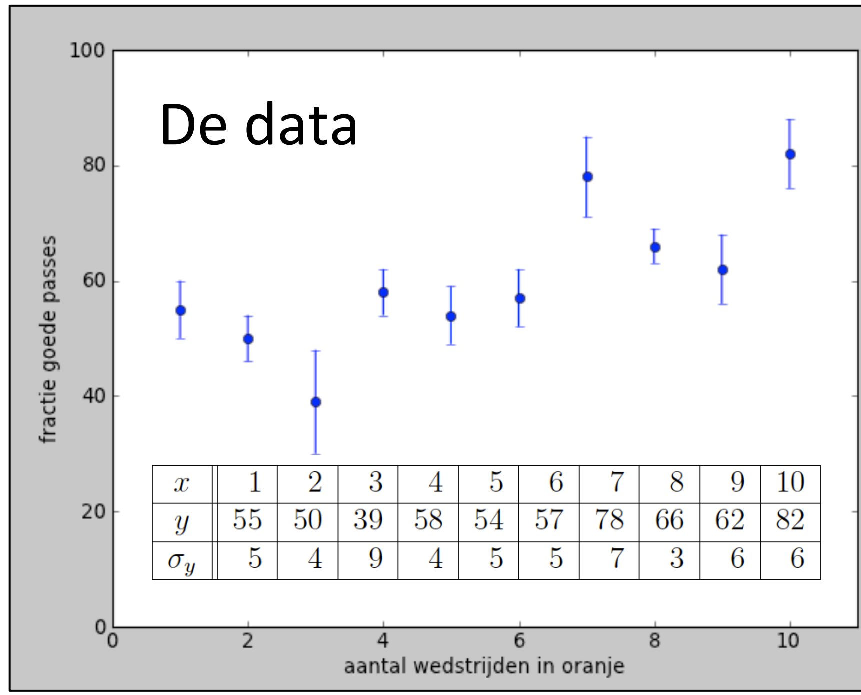
$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{(y_i - f(x_i \mid \vec{\alpha}))}{\sigma(y_i)} \right)^2$$

Som over alle data-punten

De y-waarde van het data-punt

De onzekerheid op de y-waarde

De voorspelling: in ons geval *c*



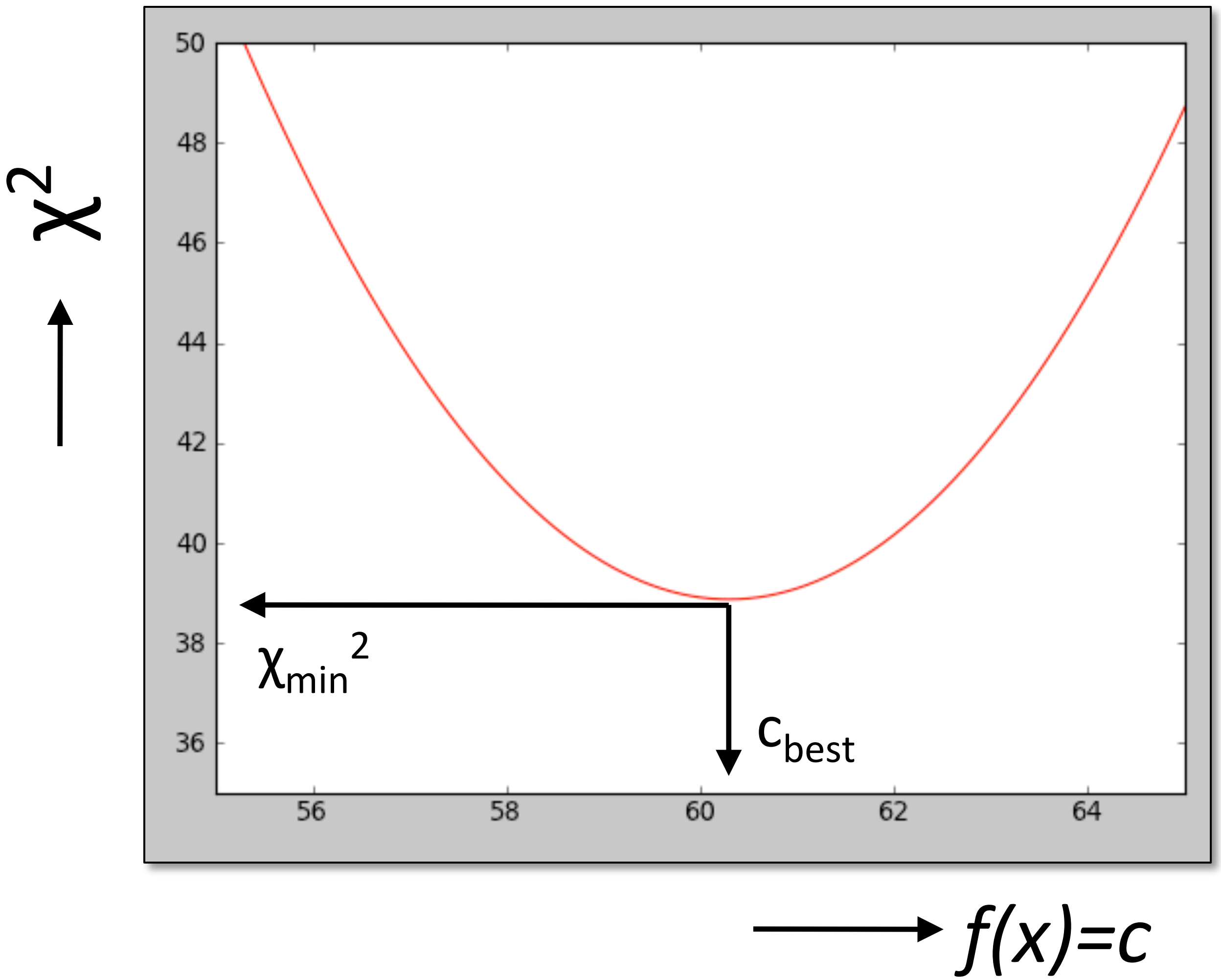
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	55	50	39	58	54	57	78	66	62	82
σ_y	5	4	9	4	5	5	7	3	6	6

Voorbeeld: f(x) = c = 50:

$$\chi^2 = \left(\frac{55-50}{5}\right)^2 + \left(\frac{50-50}{4}\right)^2 + \left(\frac{39-50}{9}\right)^2 + \left(\frac{58-50}{4}\right)^2 + \left(\frac{54-50}{5}\right)^2 + \left(\frac{57-50}{5}\right)^2 + \left(\frac{78-50}{7}\right)^2 + \left(\frac{66-50}{3}\right)^2 + \left(\frac{62-50}{6}\right)^2 + \left(\frac{82-50}{6}\right)^2$$

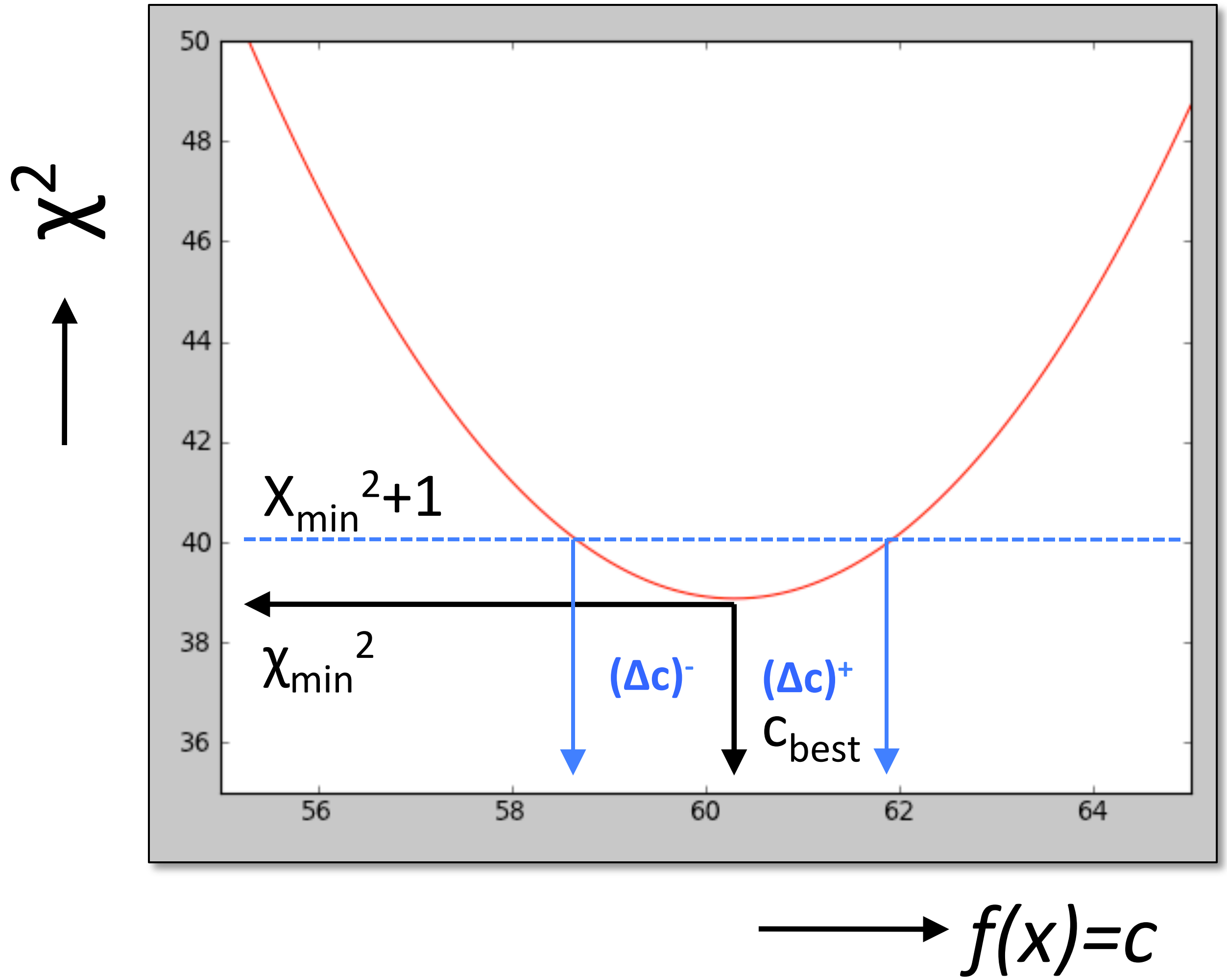
= 85.98

Issue 1: wat is de optimale waarde van de parameters in f(x): c_{best} ?



De beste waarde van c is de waarde waarbij de χ^2 minimaal is (χ_{min}^2)

Issue 2: wat is de onzekerheid op c_{best} : $(\Delta c)^+$ en $(\Delta c)^-$?



De fout is gegeven door de 2 waardes waarvoor geldt: $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 1$

succes