Inleiding programmeren

1^e jaar wis-, natuur- en sterrenkunde

Universiteit van Amsterdam

september 2014

Opgaves bij college 2

basis-wiskunde en getaltheorie

1. priemgetallen

opgave 1: schrijf een programma '`primes.py`' dat het duizendste priemgetal berekent en print. Print ook de lijst van alle 1000 priemgetallen.

computing hints:

- een manier om te testen of een getal a een veelvoud is van een getal b (b deelt a met rest 0) is het gebruik van de **%**-operator. In python code geeft **a%b** de rest (8%3 is 2). Check de werking op de command-line.
- Gebruik `list` om reeksen getallen te bewaren. Check de documentatie.

Hoewel een computer je in staat stelt om snel te rekenen is het toch belangrijk om voor elk probleem de optimale strategie te bepalen. Hier bijvoorbeeld:

strategie hints:

- Behalve 2 zijn even getallen nooit een priemgetal
- Verzin hoe je per priem-kandidaat bijhoudt of het wel/niet priem is als je over de mogelijke delers heenloopt. Bedenk van tevoren hoe je de lijst met gevonden priemgetallen gaat opslaan.
- Wanneer kan je stoppen ? Als je wilt bepalen of 37 een priemgetal, welke kandidaat delers bekijk je voordat je zeker weet dat het een priemgetal is ?
- Print voor elke kandidaat informatie zodat je weet waar je bent in de berekening en je ziet of de computer ook echt jouw strategie volgt.
- Zorg dat het programma stopt bij het 1000ste priemgetal. Bedenk dat je programma waarschijnlijk niet het eerste priemgetal heeft gegenereerd (2).

Als je wilt controleren of je programma goed werkt kan je je gevonden lijst priemgetallen hier matchen met een lijst bekende priemgetallen:
`http://primes.utm.edu/lists/small/1000.txt`

opgave 2: Welke getallen (onder n=10000) vormen de langste reeks aaneengesloten niet-priemgetallen ? Start met de code uit vraag 1.

hacker: maak bij het testen van getal n gebruik van de kennis over de priem-priemgetallen onder de n. Tot welk priemgetal kom je in 1 minuut ?

2. Getaltheorie

a) Vermoeden van Goldbach: Het vermoeden van Goldbach is een van de oudste onopgeloste problemen is in de wiskunde. Goldbach postuleerde dat:

Elk even getal groter dan 2 kan geschreven worden als de som van 2 priemgetallen

Een priemgetal mag hierbij twee keer gebruikt worden. Hoewel dit inderdaad klopt voor alle getallen tot $4 \cdot 10^{18}$ is er nog geen bewijs. We gaan ons steentje bijdragen.

opgave 3:	Laat zien dat alle even getallen tot 1000 inderdaad te schrijven zijn als de som van 2 priemgetallen

Let op: je mag in deze opgave niet de directe Python constructie gebruiken die kijkt of een element wel of niet in een in een lijst voorkomt. Je moet expliciet over alle elementen in de lijst *loopen*. Nergens mag dus de volgende constructie voorkomen: `if getal in mijnpriemlijst:`.

b) Bevriende getallen: Twee getallen A en B zijn *bevriende* getallen als de som van de delers van A (niet A zelf, maar inclusief 1) B oplevert. Tegelijkertijd moet de som van de delers van B A opleveren. Het eerste paar bevriende getallen is al lang bekend (220,284). Er geldt immers:

som delers 220 = 1+ 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
som delers 284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

opgave 4: vind het volgende paar bevriende getallen en beschrijf je strategie

4. Hacker: Diophantische McNuggets

In de wiskunde bestaat er een klasse vergelijkingen die bekend zijn onder **diophantische vergelijkingen**. Het zijn vergelijkingen waar de variabelen alleen geheeltallig kunnen zijn. De bekendste diophantische vergelijking is:

$$x^n + y^n = z^n$$

Voor n=2 zijn er oneindig veel oplossingen (x,y,z allen geheeltallig): Pythagoras. De beroemde stelling van Fermat zegt dat voor waarden groter dan 2 er geen geheeltallige oplossing is. Ook McDonalds gebruikt diophantische vergelijkingen. Ze verkopen namelijk McNuggests in verpakkingen van 6, 9 of 20 McNuggets waardoor het *wel* mogelijk is om exact 15 McNuggets te kopen (1x6+1x9), maar *onmogelijk* om er 16 McNuggets te kopen. We gaan in deze opgave berekenen wat het grootste aantal McNuggets is dat je kan bestellen dat niet precies 'past'. Om te kijken of je precies n McNuggets kan kopen moet je een diophantische vergelijking oplossen, nl.: vind positieve gehele getallen a, b en c zodanig dat:

$$6a + 9b + 20c = n$$

Voor we in opgave 5 gaan bepalen wat het grootste aantal McNuggets is dat *niet* precies besteld kan worden proberen we 2 strategie-hints uit te werken.

opgave 7: Laat zien dat het mogelijk is om precies 50, 51, 52, 53, 54 en 55 McNuggets te bestellen (met pen en papier of eigen programma). Laat steeds zien hoeveel doosjes van 6,9 en 20 McNuggets je krijgt.

Theorema: Als het mogelijk is exact x, x+1, ... en x+5 McNuggets te bestellen dan betekent dat dat je *elk* aantal McNuggets $\geq$ x kan bestellen als de McNuggets komen in doosjes van 6, 9 en 20.

opgave 8: Beschrijf waarom bovenstaand theorema waar is (in tekst) en overtuig jezelf dat het antwoord uit vraag 3 (50, 51, ..., 55) betekent dat ook (56, 57, ... 61) een oplossing zijn. Sterker: alle aantallen boven de 50.

Dan komen we bij de eigenlijke hoofdvraag:

opgave 9: schrijf een programma dat het grootste aantal McNuggets (N_{max}) bepaalt dat niet precies past in doosjes van 6, 9 en 20.

Youtube filmpje met het goede antwoord: McDonaldsmedewerkertje pesten