

# Inleiding programmeren:

## Lecture 4

Martijn Stegeman en Ivo van Vulpen



*Numeriek integreren*

*Fitten van data*

### **Assistenten:**

Wouter Meinster, Ziggy Pleunis, Wieger Steggerda, Daniël Pijn, Tim Barenbrug, Jacinta Moons, Timo Halbesma, Casper Gyurik, Joris Schefold



## **Week 2**

- *Basis wiskunde*
- *Vergelijkingen*

## **Week 4**

- *Numeriek integreren*
- *Fitten van data*

## **Week 6**

- *Simulaties*

## **Week 7**

- *Data-analyse*

# Algemeen: Python syntax

# Importeren van bibliotheken (libraries)

Voorbeelden bibliotheken:

math, random, time, matplotlib, ...

Voorbeeld: sinus functie (zit in de math bibliotheek)

```
>>> a = 1.00
>>> print sin(a)

Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell#4>", line 1, in <module>
    print sin(a)
NameError: name 'sin' is not defined
>>> |
```

Option 1: Import only sin function

```
from math import sin
a = 1.00
print math.sin(a)
```

Option 2: Import full library

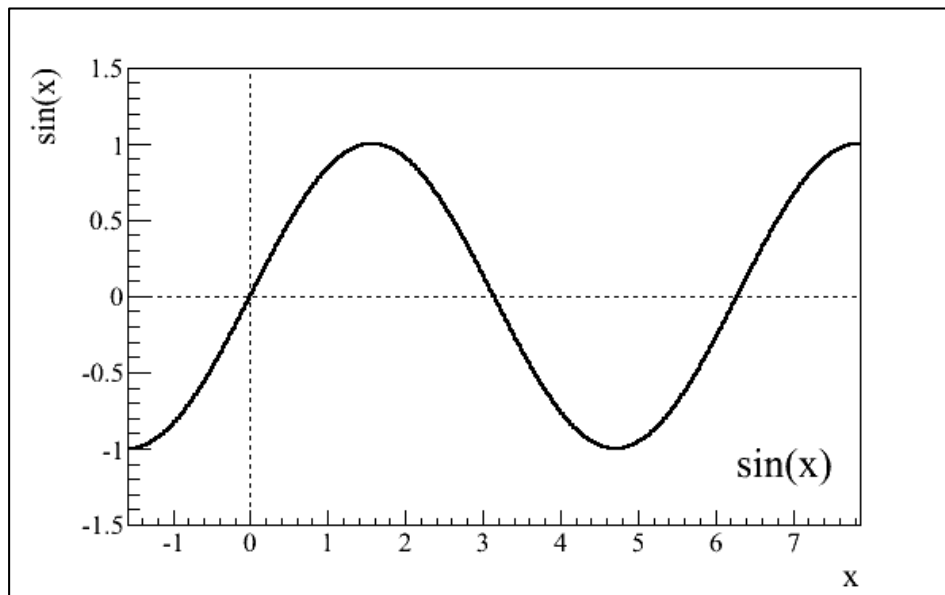
```
from math import *
a = 1.00
print sin(a)
```

# Deel 1: numeriek integreren

a) Riemann-som

b) Monte-Carlo techniek





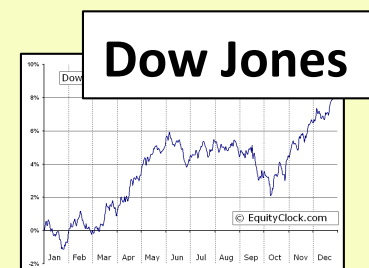
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Probleem: 1) niet altijd exacte parametrisatie: **beurskoers**

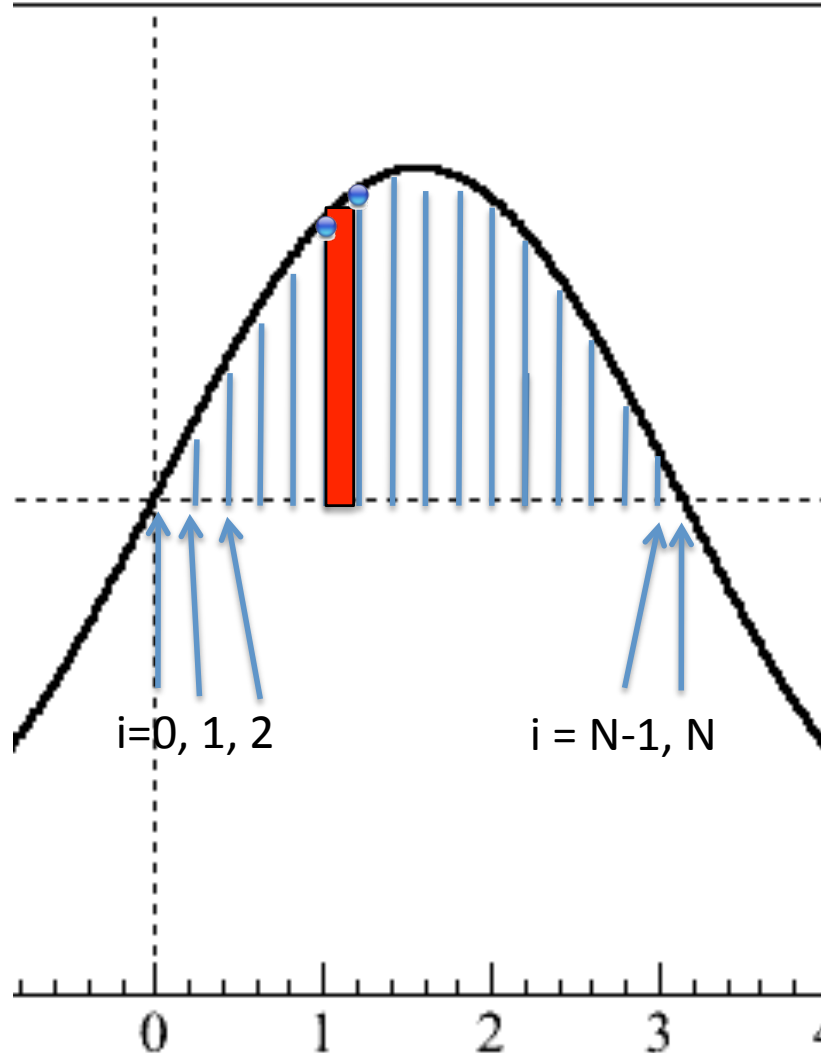
2) niet altijd een primitieve:  **$f(x) = x^x$  of  $e^{-ax^2}$**

3) hoe doet Wolfram Alpha dat ?

<http://www.wolframalpha.com/>



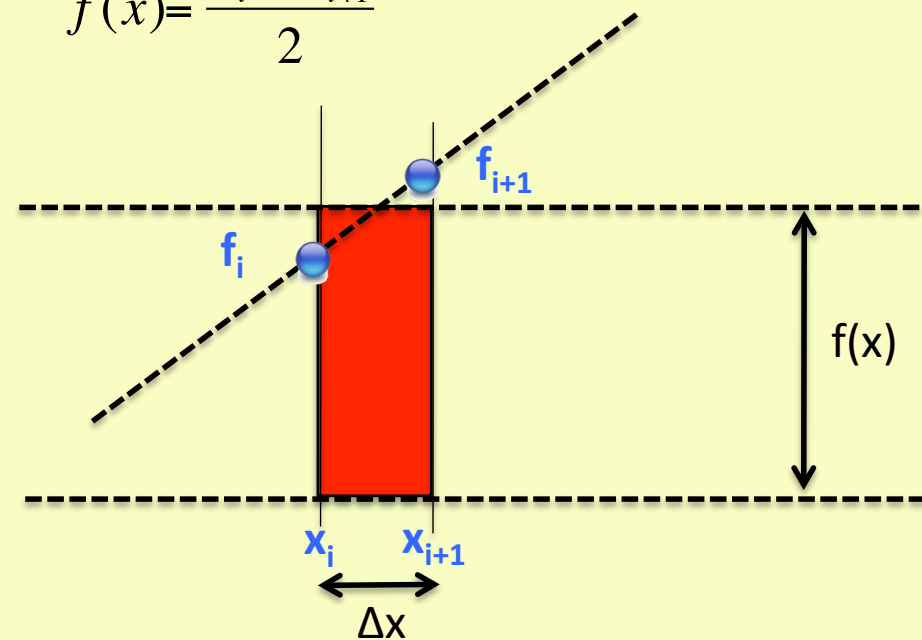
# Strategie 1: Riemannsom



1) Verdeel x-as in N intervallen ( $x_0$  t/m  $x_N$ ) en bereken de y-waarden:  $y_i = f(x_i)$

2) Benader  $f(x)$  voor elke bin: lineair

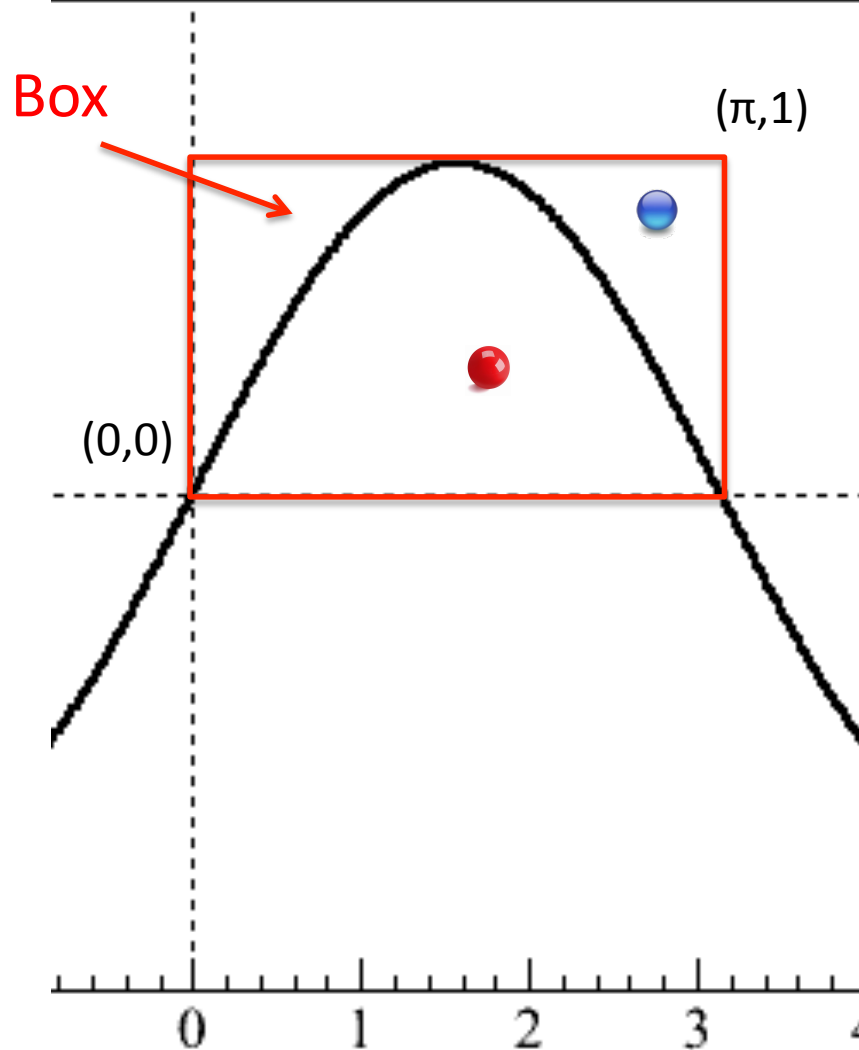
$$f(x) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$








3) Reken sommatie uit (doe dit zelf)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N)$$

## Strategie 2: Monte-Carlo



- 1) Zet een box om de integratieregio heen
- 2) Gooi random punt  $(x_i, y_i)$  in de box  
goed: binnen functie   
fout: buiten functie 
- 3) Integraal is dan fractie van 'goede' punten maal de oppervlakte van de box

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{\# \text{  } }{\# \text{  } + \# \text{  } } \times \text{Box}$$

The 'Box' is represented by a red rectangle with an arrow pointing to it from the symbol  $\pi$ .



# Random getallen in python

```
from random import *
```

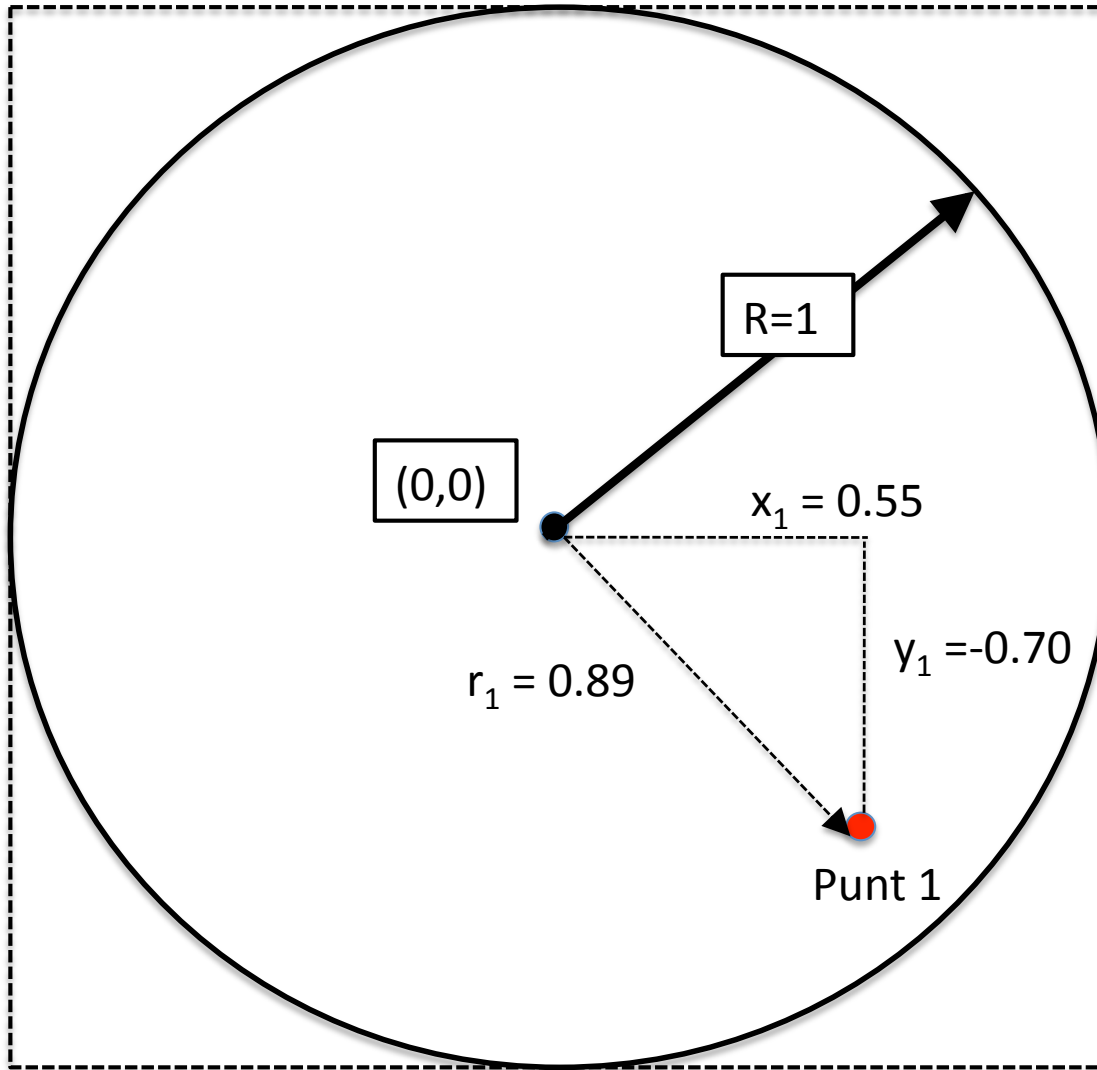
```
x = random()
```

```
print x
```

← random getal tussen 0 en 1

Hoe krijg je nou een:

- random getal tussen 0 en 2 ?
- random getal tussen -1 en 1
- random getal tussen a en b



## Monte-Carlo integration

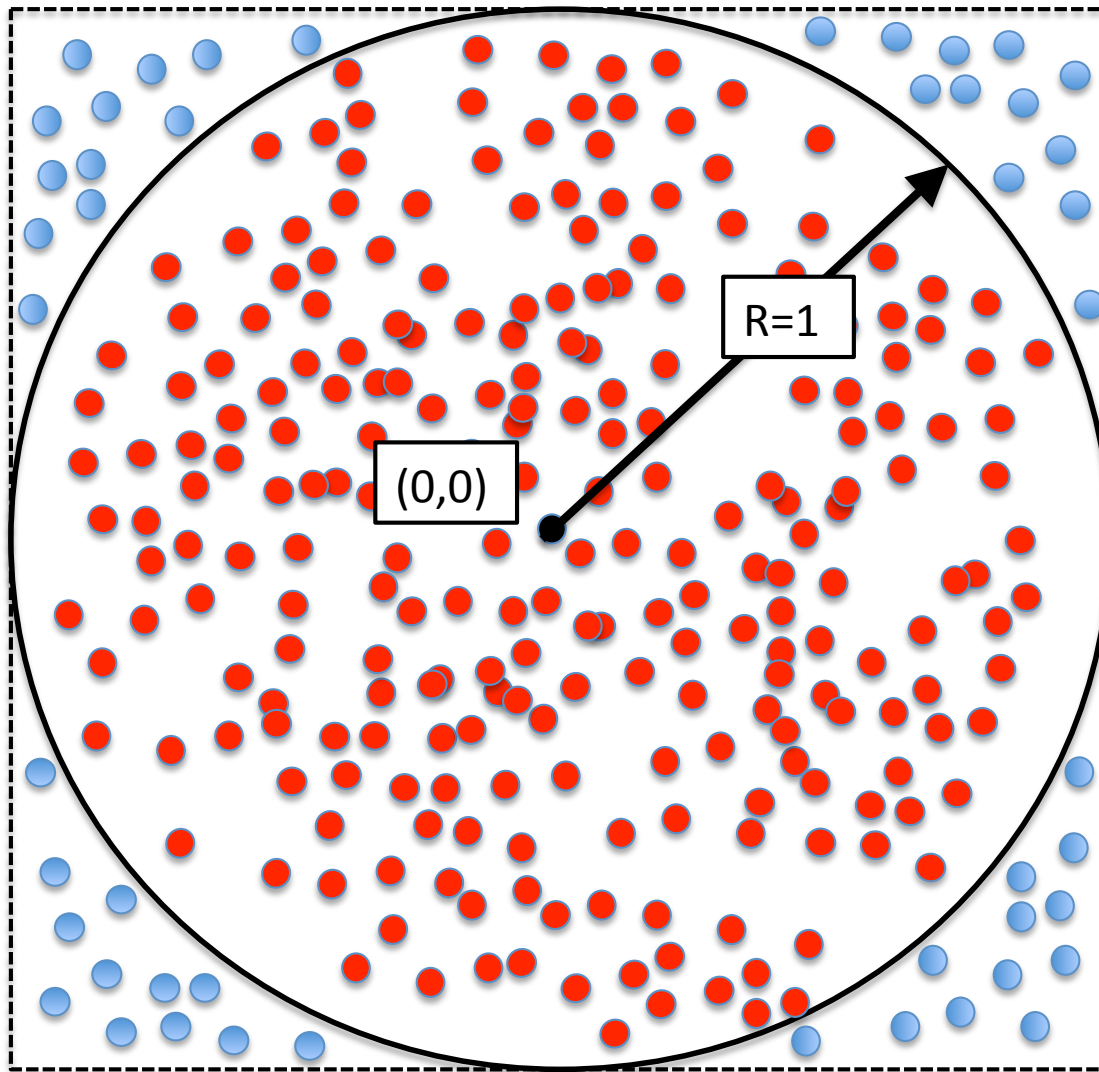
### 1) Gooi random punt:

1,000,000 keer

- Gooi random  $x$ :  $-1 < x < 1$
- Gooi random  $y$ :  $-1 < y < 1$

### 2) Kijk voor elk punt of het binnen de cirkel ligt

Straal cirkel = 1, dus binnen cirkel als  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$



## Monte-Carlo integration

1) Gooi random punt:  
1,000,000 keer ofzo

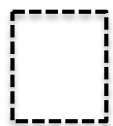
- Gooi random  $x$ :  $-1 < x < 1$
- Gooi random  $y$ :  $-1 < y < 1$

2) Kijk voor elk punt of het  
binnen de cirkel ligt

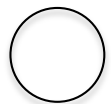
Straal cirkel = 1, dus binnen  
cirkel als  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$

3) Bereken 'fractie' van punten  
dat binnen cirkel valt

→  $f_{\text{inside}}$



$$\text{opp} = 2 \cdot 2 = 4$$



$$\text{Opp} = \pi r^2 = \pi \quad (r = 1)$$

$$\pi = 4 \cdot f_{\text{inside}}$$

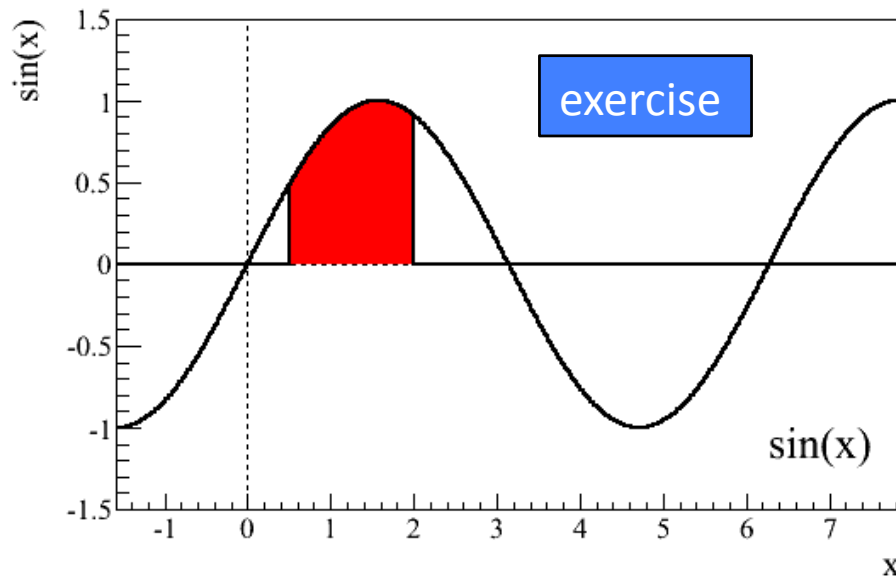
Opgaven 1 voor deze week:

$$\int_0^1 x^x dx$$

$$\int_{0.1}^{2.0} \sin(x) dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x^2) dx$$

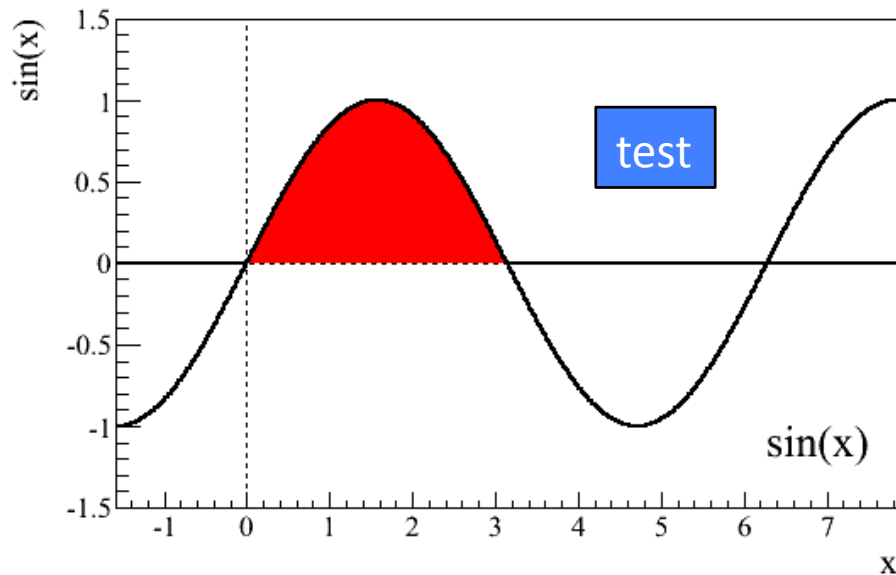
Maak altijd een grafiek en check je code door een vergelijkbare en bekende integraal te evalueren



## Numerical Integration

$$\int_{0.1}^{2.0} \sin(x) dx$$

Use both sum and Monte-Carlo

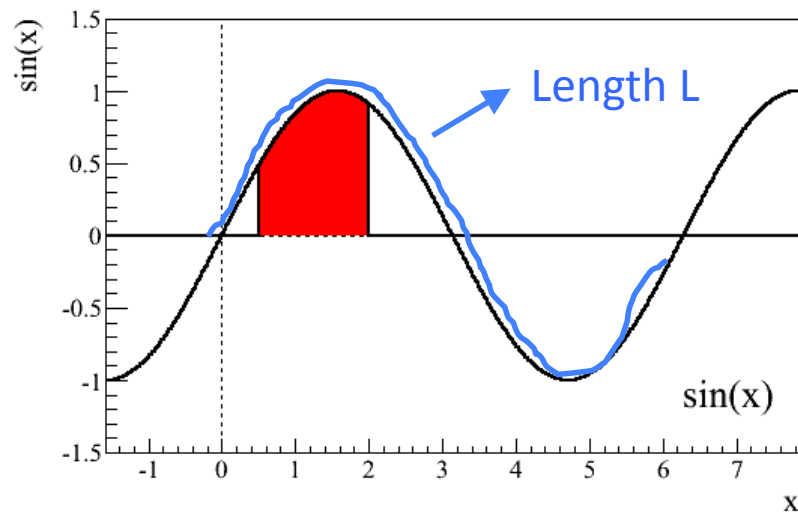


## Check: known integral

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

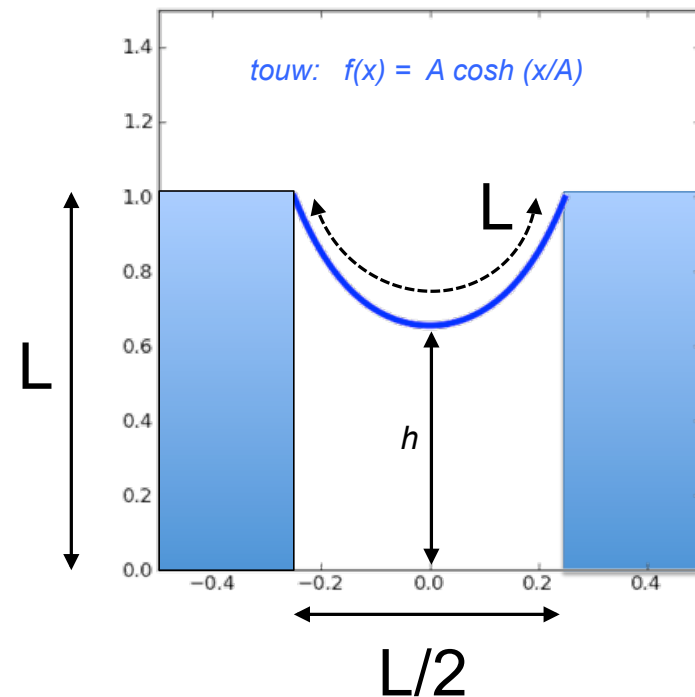
TIP: always make a plot on the screen.  
Also with Monte-Carlo.

## Opgave 2 voor deze week



2a) *Boglengte langs de grafiek*  
 $f(x) = \sin(x)$  van  $x=0$  to  $x=2\pi$

hacker



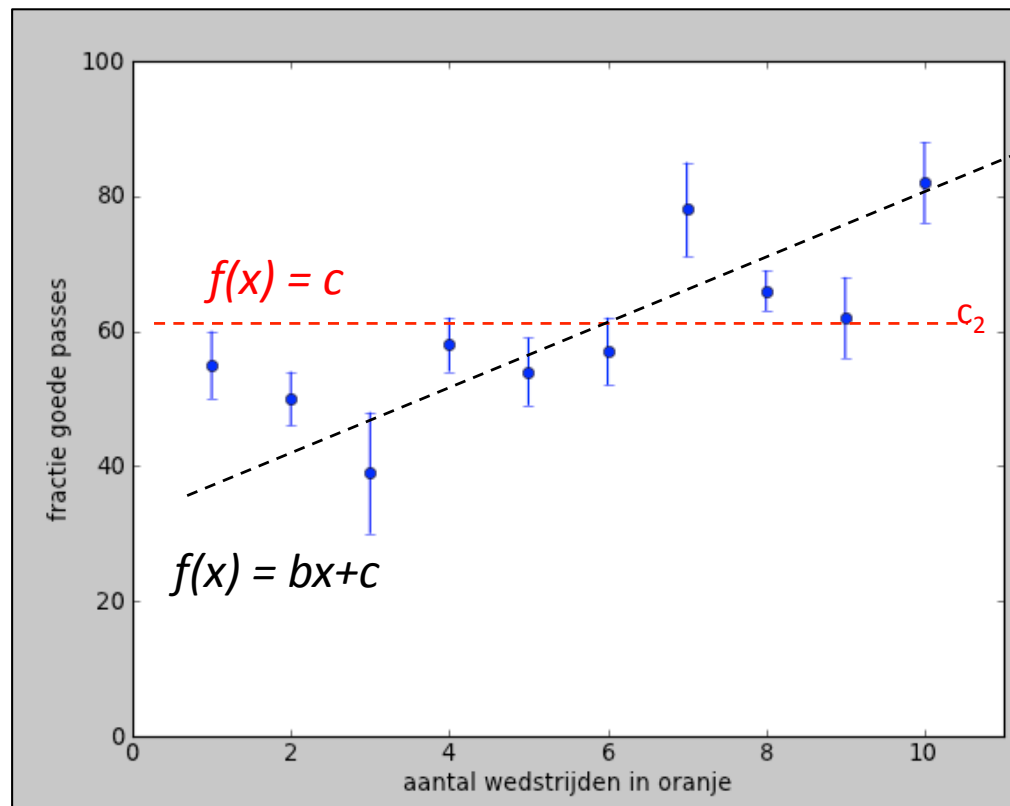
2b) *Hoe hoog hangt het touw*  
*boven de grond (h)*



# Deel 2: modelleren (data fitten)

## Data set

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	55	50	39	58	54	57	78	66	62	82
$\sigma_y$	5	4	9	4	5	5	7	3	6	6



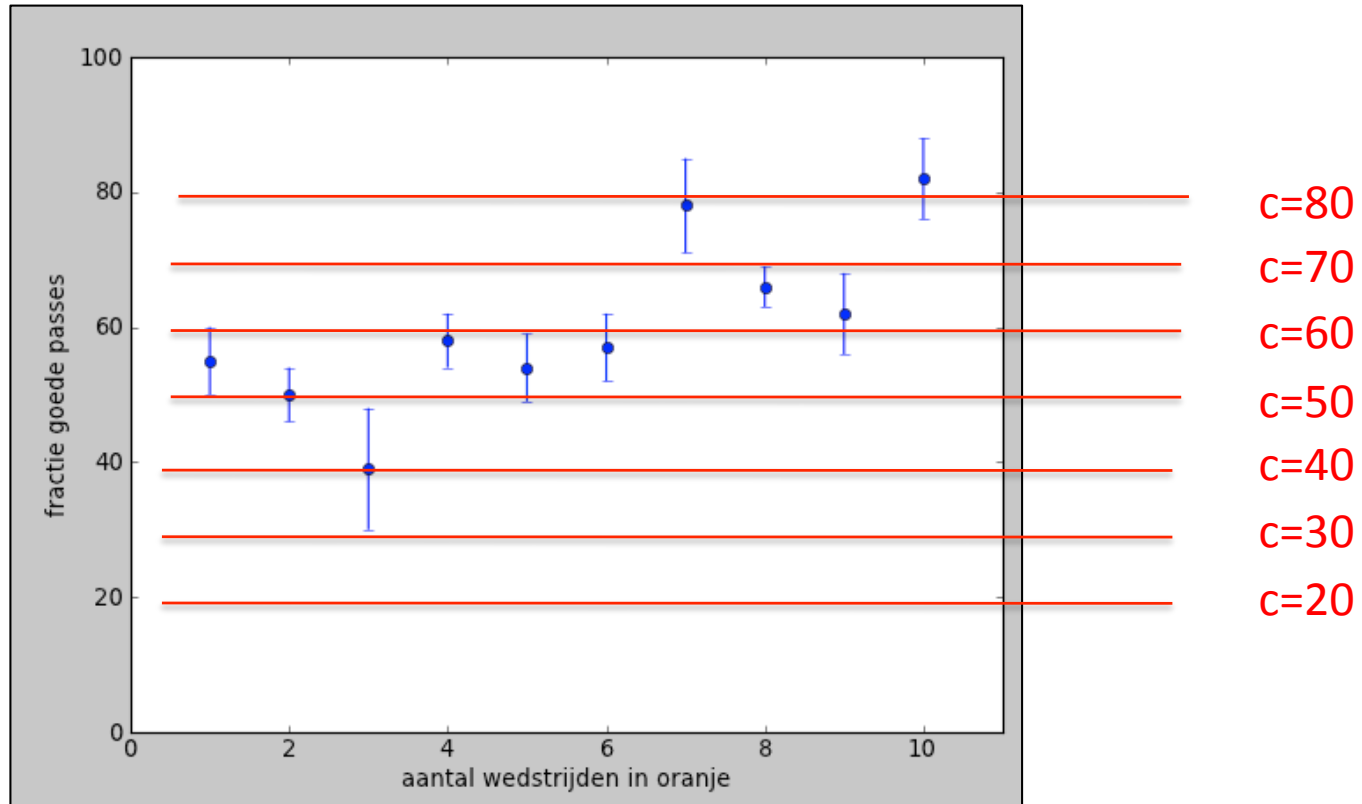
Beste beschrijving van de data ?

Opgaves:

$f(x) = c$ : vind  $c$  en  $\Delta c$

$f(x) = bx + c$ : vind  $b$  en  $c$

Welke waarde van  $c$  past het best ?



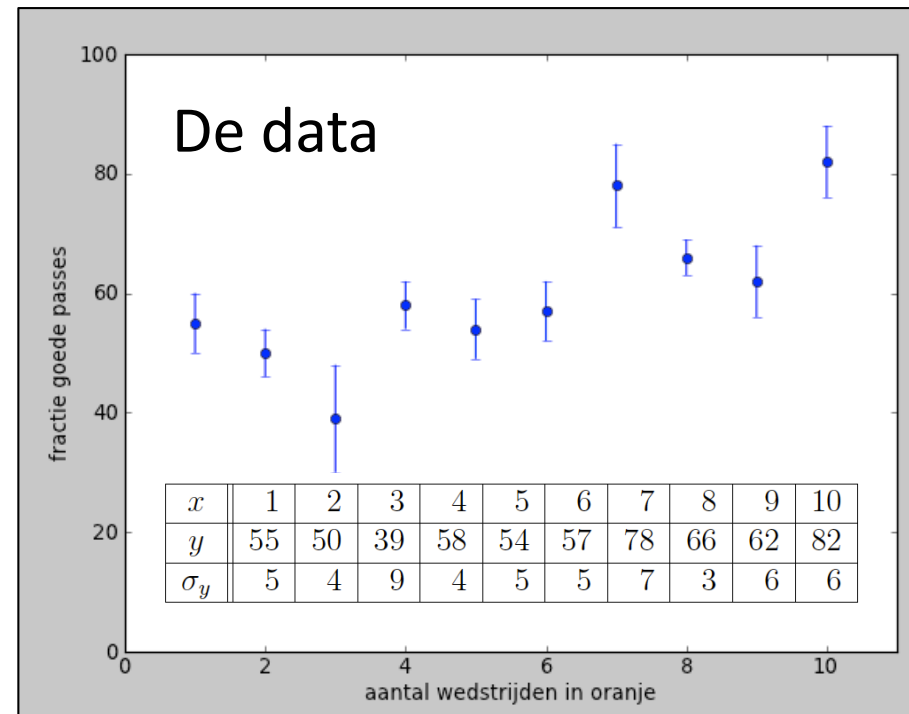
Maat van 'compatibiliteit': de  $\chi^2$  maat

Voor elke waarde van  $c$  ( $f(x)$ ) kan je de  $\chi^2$  uitrekenen

$()$  = de afstand tussen de voorspelling en het data-punt  
uitgedrukt in het aantal keer de onzekerheid op de meting

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{(y_i - f(x_i | \vec{\alpha}))}{\sigma(y_i)} \right)^2$$

$\swarrow$  Som over alle data-punten  
 $\downarrow$  De y-waarde van het data-punt  
 $\searrow$  De voorspelling (in ons geval  $c$ )  
 $\searrow$  De onzekerheid op de y-waarde

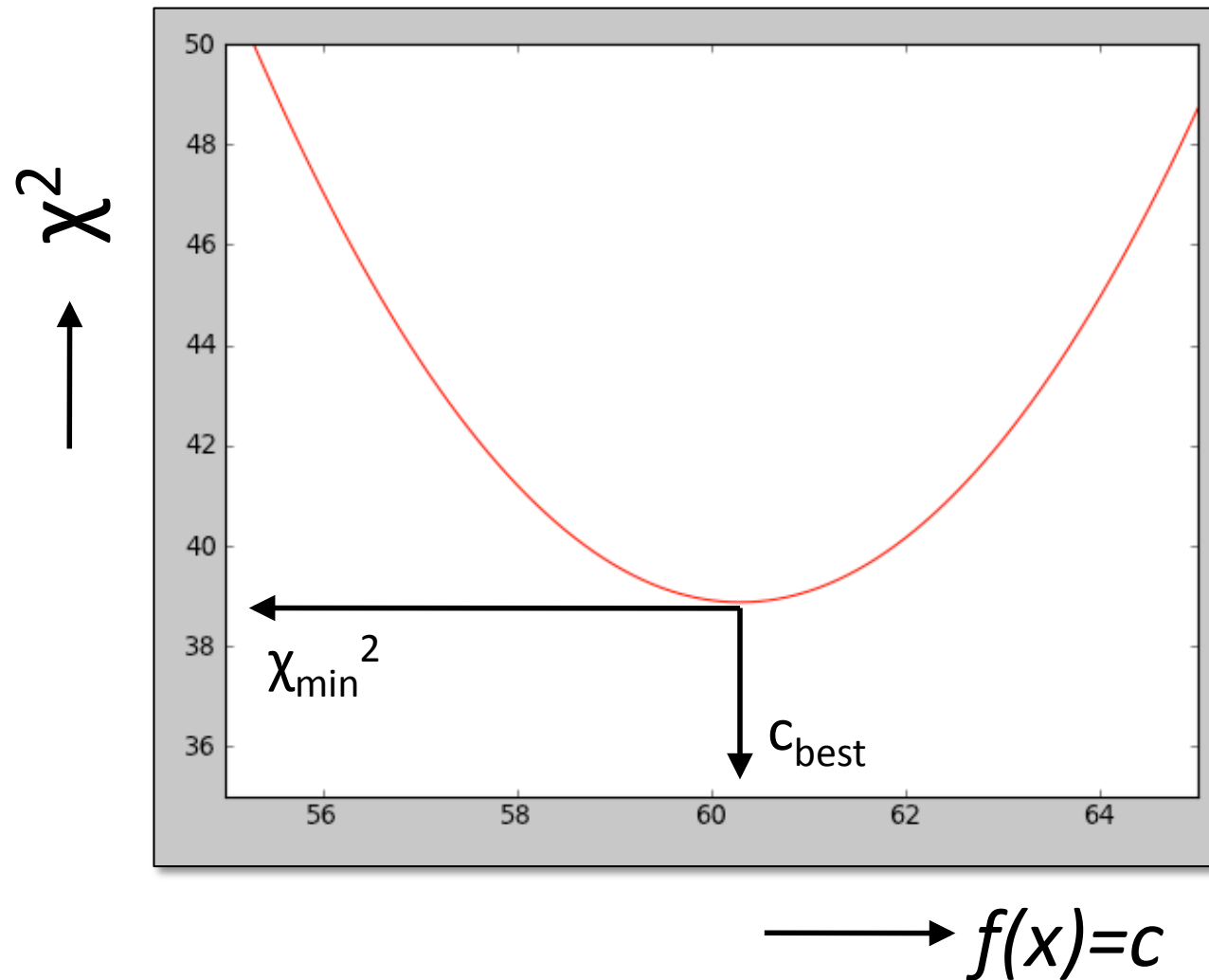


Voorbeeld:  $f(x) = c = 50$ :

$$\chi^2 = \left( \frac{55 - 50}{5} \right)^2 + \left( \frac{50 - 50}{4} \right)^2 + \left( \frac{39 - 50}{9} \right)^2 + \left( \frac{58 - 50}{4} \right)^2 + \left( \frac{54 - 50}{5} \right)^2 + \left( \frac{57 - 50}{5} \right)^2 + \left( \frac{78 - 50}{7} \right)^2 + \left( \frac{66 - 50}{3} \right)^2 + \left( \frac{62 - 50}{6} \right)^2 + \left( \frac{82 - 50}{6} \right)^2$$

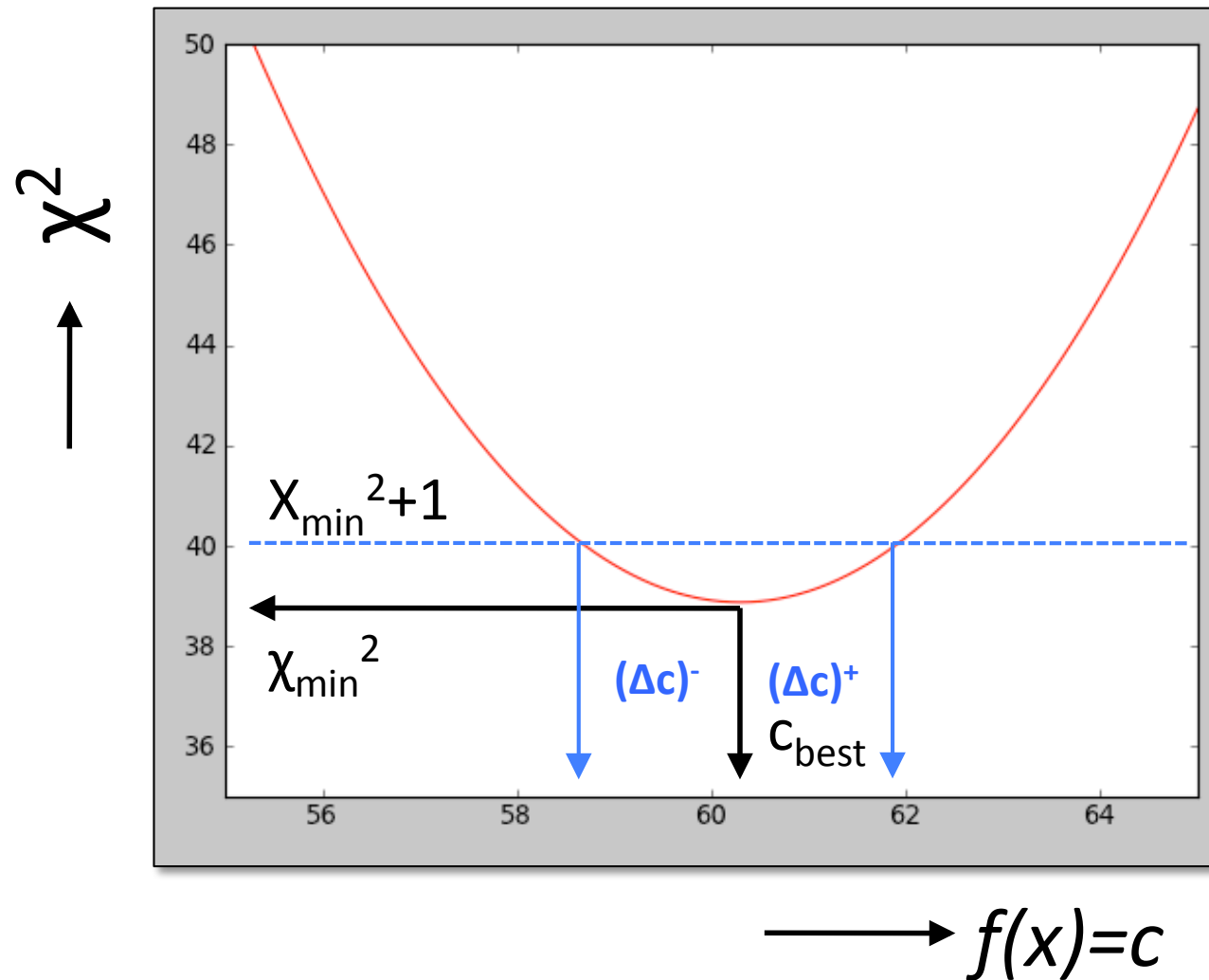
$$= 85.98$$

Issue 1: wat is de optimale waarde van de parameters in  $f(x)$ :  $c_{\text{best}}$  ?



De beste waarde van  $c$  is de waarde waarbij de  $\chi^2$  minimaal is ( $\chi_{\min}^2$ )

Issue 2: wat is de onzekerheid op  $c_{\text{best}}$  :  $(\Delta c)^+$  en  $(\Delta c)^-$  ?



De fout is gegeven door de 2 waarden waarvoor geldt:  $\chi^2 = \chi_{\text{min}}^2 + 1$



# Algemene mededeling

*“Discussieer de strategie, maar schrijf je eigen code”*

# Voorbeeld:

## *Student 1*

```
while g > 0 and f > 0:          #Kijk welke priemgetallen er zijn
    while getal/f - getal/n != 0:
        f = f - 1
        n = n - 1
    if f == 1:
        lijst.append(getal)      #Stop ze in een lijst.
        g = g - 1
        f = float(getal)
        n = getal
        getal = getal + 1
    if getal/f - getal/n == 0 and f > 1:
        f = float(getal)
        n = getal
        getal = getal + 1
        g = g - 1
```

## *Student 2*

```
while a>0 and f>0:
    while number/f-number/n != 0:
        f=f-1
        n=n-1
    if f==1:
        numberlist.append(number)
        a=a-1
        f=float(number)
        n=number
        number=number+1
    if number/f-number/n==0 and f>1:
        f=float(number)
        n=number
        number=number+1
        a=a-1
```

- 1) Bespreek samen een **idee/strategie**, maar werk zelfstandig je **code** uit
- 2) Paar studenten doen extra opdracht aan het eind van de cursus
- 3) Volgende overtredingen worden vanaf nu aan de examencommissie doorgegeven (beide studenten)

## Becijfering ingeleverde code

- Scope
- Correctness
- Design
- Style

```
5
6 Bla = [2]
7 for A in range(3,8000,2):
8     for B in range(2,A):
9         Deler = B
10        if A%B == 0:
11            Deler = Deler - 1
12            break
13        if Deler == B:
14            Bla.append(A)
15 print Bla
16
17 print "Part 2"
18
19 P = 0
20 for D in range(3,1000,2):
21     PP = Bla[D]
22     PPP = Bla[D-1]
23     V = PP - PPP
24     if V > P:
25         P=V
26 print"Het langste reeks aaneengesloten niet-priemgetallen zijn?"
27 if PP >= PPP:
28     while PP >= PPP:
29         print PP
30         PP = PP - 1
31
```

Zo dus niet