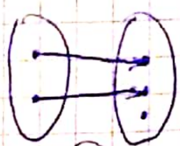
1

Fiche de révisions chapitre 1 : Préliminaires

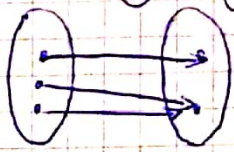
SEC 301.

I. Fonctions

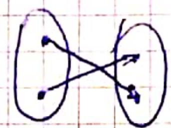
- Une **fonction** $f : S_1 \to S_2$ est un objet mathématique qui associe à chaque élément de S_1 un ou aucun élément de S_2
- Une **application** $f : S_1 \to S_2$ est une fonction qui associe à chaque élément de S_1 un et un seul élément de S_2.
- Une **injection** est une application pour laquelle 2 éléments distincts de son ensemble de départ ne peuvent pas avoir la même image par f. 1 antécédent par image



- Une **surjection** est une application pour laquelle tout élément de S_2 est l'image d'au moins un élément de S_1



- Une **bijection** est une application injective et surjective



II. Relations.

- Une **relation binaire** $\sim$ sur un ensemble S est un sous ensemble de $S \times S$ si $(a,b) \in S \times S$ si $(a,b) \in S\times S$, on dit que a est en relation avec b. $\to a \sim b$
- Une **relation d'équivalence** sur un ensemble S est une relation binaire avec les propriétés :
  - ↳ réflexivité : $\forall a \in S,\ a \sim a$
  - ↳ symétrie : $\forall a, b \in S,\ a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
  - ↳ transitivité : $\forall a,b,c \in S \quad a \sim b$ et $b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- Une **partition** d'un ensemble S est une collection de sous ensembles non vides S_i de S tq $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ et $S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i,j \in I$ et $i \neq j$
- Si $\sim$ définit une relation d'équivalence sur un ensemble S alors la **classe d'équivalence** de $a \in S$ relative à $\sim$ est $X_a = \{x \in S \mid x \sim a\}$
  ex : $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ multiple de 2 (relation d'équivalence) $\to$ 2 classes d'équivalence (pairs et impairs) X_0 X_1
  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to$ on divise $\mathbb{Z}$ en 2 classes.
- **Propriété** : N'importe quel élément d'une classe d'équivalence peut être choisi comme représentant ie $\forall b \in X_a,\ X_a = X_b$

↳ **Preuve** : Prouver $X_a \subseteq X_b$ et $X_b \subseteq X_a$ et conclure $X_a = X_b$.

- **Propriété** : Les classes d'équivalence d'un ensemble S muni d'une relation d'équivalence $\sim$ forme une partition.

↳ **Preuve** : On considère l'ensemble des classes d'équivalence $\{X_a \mid a \in S\}$
Prouver que $\bigcup_{a \in I} X_a = S$
Prouver que $X_a \cap X_b = \emptyset \ \forall a,b \in I$ et $a \neq b$