

Calcul des prédicats et preuves en arithmétique

5 avril 2022

1 Modélisation du langage

1. Écrire sous forme de formules du premier ordre :

- Quelqu'un chante ;
- Quelques musées sont gratuits ;
- Tous les français aiment le fromage ;
- Aucun enfant ne déteste les glaces ;
- Il existe des livres savants et ennuyeux ;
- Il existe des livres savants et il existe des livres ennuyeux ;
- Il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les autres ;
- Si quelqu'un crie, je suis embêté ;
- Si tout le monde crie, je suis embêté ;
- Un enseignant est heureux si tous ses étudiants aiment la logique ;
- Chaque ville a un employé de la fourrière qui a été mordu par chaque chien de la ville ;
- Il existe un seul Dieu.

2. Traduire les phrases suivantes en formules du premier ordre en utilisant les prédicats suivants :
 $H(x)$: x est un homme, $M(x)$: x est un mathématicien, $F(x)$: x est fou.

- Tous les mathématiciens sont des hommes.
- Si Luc est un mathématicien, Luc est fou.
- Quelques mathématiciens sont fous.
- Quelques mathématiciens ne sont pas fous.
- Aucun mathématicien n'est fou.
- Tous les hommes ne sont pas mathématiciens.
- Tous les hommes sont mathématiciens ou fous.

3. En utilisant la *signature* $+, -, \times, =, \geq$ et les constantes numérales, traduire en langage logique les phrases suivantes.

- Le carré de tout nombre est positif
- n divise m ;
- Un nombre divisible par 8 est divisible par 2 ;
- Il existe un nombre pair divisible par 3 ;
- Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont positifs ;
- Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3 ;
- a est l'inverse multiplicatif de b ;
- L'inverse (multiplicatif) de tout nombre est unique.

2 Variables libres, variables liées

Pour chacun des prédicats suivants, dessiner l'arbre de formation, indiquer les variables libres et les variables liées, puis remplacer chaque variable liée par une nouvelle variable (choisir une lettre pas encore employée).

- $P(x) \vee Q(y)$;
- $(\forall x.P(x)) \vee \neg Q(y)$;
- $\forall x.(P(x) \vee Q(y))$;
- $(\forall x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$;
- $\forall x.(P(x) \vee Q(x))$.

3 Équivalences remarquables

1. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Si non, est-ce que l'une implique l'autre ?

- $\neg(\exists x.P(x))$ et $(\forall x.\neg P(x))$;
- $(\forall x.P(x) \wedge Q(x))$ et $((\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)))$;
- $((\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x)))$ et $(\forall x.P(x) \vee Q(x))$;
- $(\exists x.P(x) \vee Q(x))$ et $((\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x)))$;
- $(\exists x.P(x) \wedge Q(x))$ et $((\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x)))$;
- $(\exists x.\forall y.P(x, y))$ et $(\forall y.\exists x.P(x, y))$.

2. Écrire la négation des formules suivantes :

- $\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$
- $\exists x.P(x) \wedge Q(x)$
- $\exists x.\forall y.Q(x, y) \Rightarrow (P(x, y) \vee R(x, y))$

4 Un peu de sémantique

Quelle est la valeur de vérité des prédicats suivants ?

- Il n'existe pas de contre-exemple a à l'affirmation "si pour tout b le produit ab équivaut à 0, alors a vaut 0" ;
- Pour tout couple n, m d'entiers, si n est pair et m est impair, alors $1 + 1 = 2$;
- $\forall a \in \mathbb{Z}.(\exists b.(a = 2b) \wedge \exists c.(a = 2c + 1)) \Rightarrow 1 + 1 = 0$;
- Si le reste de la division de a par 3 est 1, et si le reste de la division de b par 3 est 2, alors $a + b$ est divisible par 3 ;
- L'opposé de tout nombre est unique (**suggestion** : utilisez l'absurde).

5 Modèles du calcul des prédicats

1. On note **A1**, **A2** et **A3** les trois formules suivantes :

$$\mathbf{A1} : \forall x.\exists y.y = x + 1 ;$$

$$\mathbf{A2} : \exists x.\forall y.x \leq y ;$$

$$\mathbf{A3} : \forall x.\forall y.((x + 1 = y + 1) \Rightarrow x = y).$$

Définition : Deux propositions sont indépendantes s'il existe un modèle qui rend vraie l'une et fausse l'autre.

- Montrer que ces trois formules sont indépendantes.

- Donner trois modèles très différents vérifiant ces trois formules.
2. Donner des contre-exemples pour montrer que les formules suivantes ne sont pas toujours vraies :
- $(\forall x.\exists y.A(x, y)) \Rightarrow \exists y.A(y, y)$
 - $(\exists x.\exists y.A(x, y)) \Rightarrow \exists y.A(y, y)$
 - $((\exists x.A(x)) \Leftrightarrow (\exists x.B(x))) \Rightarrow \forall x.(A(x) \Leftrightarrow B(x))$
 - $(\exists x.A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\exists x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.B(x)))$.
3. Déterminer si les formules suivantes sont toujours vraies :
- $((\exists x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.B(x))) \Rightarrow (\exists x.A(x) \Rightarrow B(x))$;
 - $\neg(\exists y.\forall x.A(x, y) \Leftrightarrow \neg A(x, x))$;
 - $(\forall x.\exists y.A(x, y) \Rightarrow B(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x.\exists y.\neg A(x, y) \vee B(x, y))$.