En combinant, pour éliminer le terme en β_2

$$\pi = \frac{x^{(k)} - \alpha^2 x^{(k-2)}}{1 - \alpha^2}$$

Les itérations suivantes utilisent π pour redémarrer plutôt que que $x^{(k+1)}$ Cette extrapolation peut être effectuée 1 fois toutes les m itérations.

Proposer une version efficace en mémoire et en calcul de l'algorithme et comparez expérimentalement avec la méthode des puissances sur les graphes du web dont vous disposez en faisant varier m. Parametres à étudier :

- α
- m

15 Accélération de Aitken quadratique dans l'algorithme des puissances

Dans la méthode des puissances, la vitesse de convergence est dominée par la seconde valeur propre λ_2. L'accélérateur a pour but d'estimer cette valeur propre de manière à corriger les estimateurs pour converger plus vite (avec la valeur propre suivante qui est plus proche de 0). On suppose que $\lambda_2 > \lambda_3$. Soit β_1, . β_n, la décomposition de $x^{(0)}$ sur la base des vecteurs propres v_1,, v_n. On a

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

Supposons que $\beta_1 \neq 0$. On a pour tout k

$$x^{(k)} = \beta_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \lambda_i^k v_i$$

On va considérer 3 termes successifs $(x^{(k)}, x^{(k+1)}, x^{(k+2)}$ pour la version quadratique que l'on calcule par la méthode des puissances. En omettant les termes d'ordre supérieur à deux (et en posant pour tout i, $u_i = \beta_i v_i$), on obtient:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= u_1 + u_2 \lambda_2^k \\ x^{(k+1)} &= u_1 + u_2 \lambda_2^{k+1} \\ x^{(k+2)} &= u_1 + u_2 \lambda_2^{k+2} \end{aligned}$$

On a donc un système à 3 équations et 2 équations u_2 et λ_2 que l'on peut résoudre. Supposons que l'on dispose d'un estimateur des termes λ_2 et $u_2\lambda_2$, on peut périodiquement modifier la valeur de $x^{(k)}$ pour inclure les estimations de $u_2\lambda_2^k$ et donc converger avec une vitesse dépendant de λ_3. La remarque suivante prouve que l'on peut estimer les quantités par la différence entre itérations passées une certaine valeur de k puisque le terme $u_2(\lambda_2^k)(1 - \lambda_2)$ devient dominant (rappel : $1 > \lambda_2 > \lambda_3$).

$$x^{(k)} - x^{(k+1)} = u_2(\lambda_2^k)(1 - \lambda_2) + \sum_{i=3}^{n} u_i(\lambda_i^k)(1 - \lambda_i)$$

Proposer une version efficace en mémoire et en calcul de l'algorithme et comparez expérimentalement avec la méthode des puissances sur les graphes du web dont vous disposez.