THÉORIE DES JEUX :

JEUX DE NIM

Pierre Couchney

M2 AMIS | UVSQ

ÉQUIPE

SARAH OUHOCINE

DJILLALI BOUTOUILI

SOMMAIRE

01

INTRODUCTION

JEUX COMBINATOIRES

1 **2 joueurs**
qui s’affrontent

2 **Un ensemble fini d’états**
positions dans le jeu

3 **Les règles du jeu**
spécifiant vers quelles positions de jeu peut se déplacer

4 **Jeu séquentiel /à tour de rôle**
les joueurs se déplacent alternativement

5 **Jeu fini**
le jeu finit par se terminer

6 **Condition d’arrêt du jeu**
le jeu se termine lorsqu’un joueur ne peut plus se déplacer

CLASSES DE JEUX COMBINATOIRES

JEUX IMPARTIAUX

- ✅ La position du jeu
- ❌ Le joueur qui joue

JEUX PARTISANS
(NON IMPARTIAUX)

- ✅ La position du jeu
- ✅ Le joueur qui joue

02

JEU DE NIM

RÈGLES DU JEU DE NIM

- Jeu combinatoire impartial séquentiel sans hasard à 2 joueurs
- Se joue avec 1 ou plusieurs tas d'objets (alumettes, batons, pierres, etc).
- Jeu de stratégie pure
- Possède une stratégie gagnante
- Il existe plusieurs variantes de jeu de NIM
- Le nombre d'objets dans chaque tas ainsi que le nombre de tas peut varier en fonction de la variante du jeu

Consiste à retirer le nombre désiré d' objets (allumettes) d'un seul tas jusqu'a ce qui ait plus d'objets dans les tas

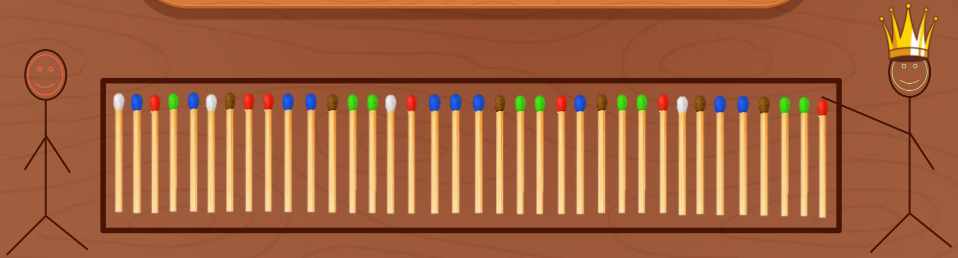
NORMAL

MISÈRE

On s’interesse au JEU DE **NIM**

NORMAL

Le gagnant est celui qui retire la dernière allumette



SOLUTION DU JEUX DE NIM

STRATÉGIE GAGNANTE

La stratégie pour gagner à ce jeu est basée sur

XOR

$\oplus$

SOLUTION DU JEUX DE NIM

Opérateur logique ayant une sortie vraie (1)
si les entrées sont différentes

Entrées		Sortie
A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

SOLUTION DU JEUX DE NIM

$$3 \oplus 4 = 7$$

Conversion Décimale-Binaire

Conversion Binaire-Décimale

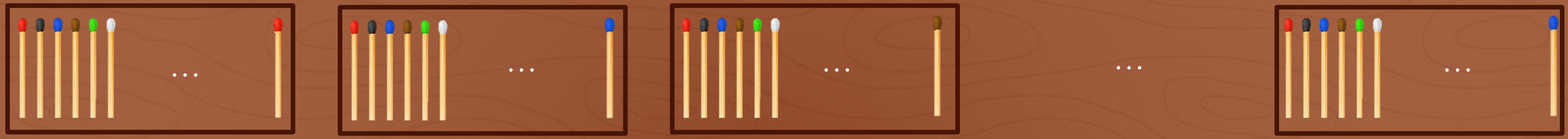
$$011 \oplus 100 = 111$$

Utilisation de la Table de vérité XOR

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Pour utiliser la stratégie gagnante basée sur le XOR dans le jeu de NIM nous devons :

✓ Calculer le **XOR** de toutes les quantités d'alumettes (ni) dans chaque tas (i) appelé : **NIM-SOMME**, notée $\sum$ **NIM**



tas 1 : n1 allumettes

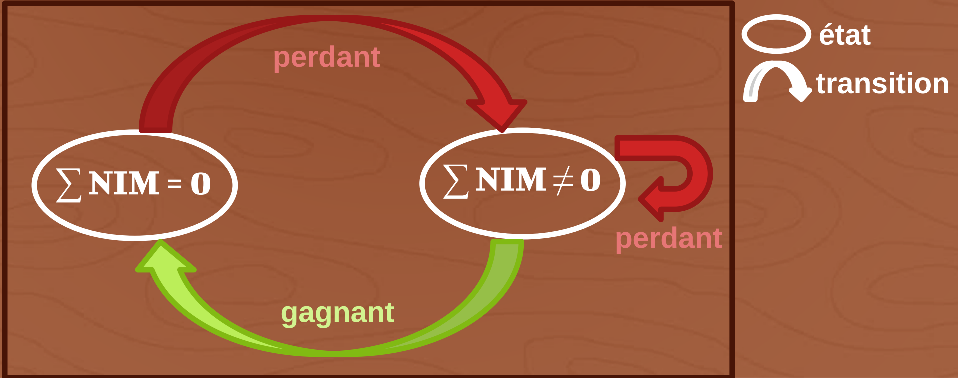
tas 2 : n2 allumettes

tas 3 : n3 allumettes

tas n : nn allumettes

$$\sum \text{NIM} = n1 \oplus n2 \oplus n3 \oplus \;\ldots\; \ldots \oplus nn$$

✓ La stratégie gagnante dans le jeu de NIM est de terminer chaque mouvement avec une $\sum$ NIM = 0



THEORÈME

THEORÈME : la stratégie gagnante dans le jeu de NIM est de terminer chaque mouvement avec une $\sum$ NIM = 0

LEMME 1

Si la $\sum$ **NIM = 0** après le tour d'un joueur, alors le joueur suivant faut le changer.

Cette transition ne peut pas se produire dans le jeu de NIM

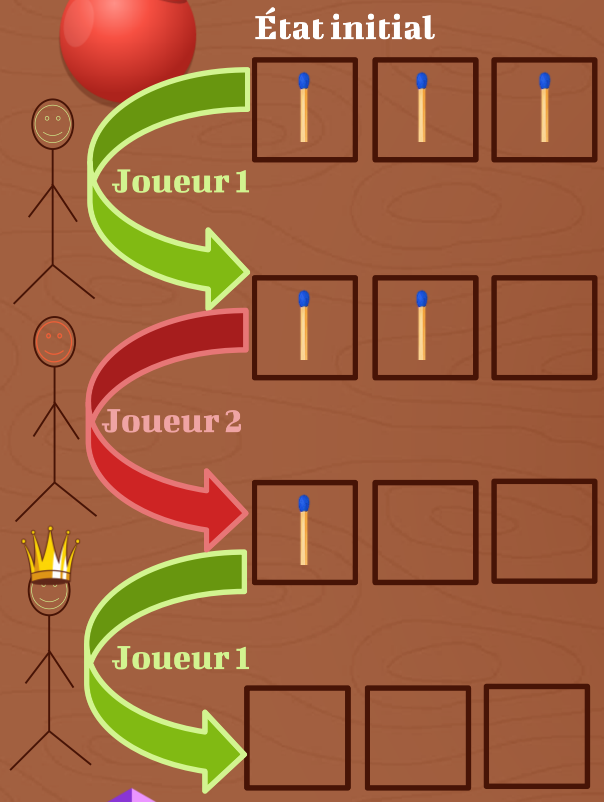
~~$\sum$ NIM = 0~~

LEMME 2

Il est toujours possible qu'un joueur remette la $\sum$ **NIM = 0** à **son tour si ce n'était pas à 0 au début de son tour**

Cette transition est toujours possible dans le jeu de NIM

$\sum$ NIM = 0 $\leftarrow$ $\sum$ NIM $\neq$ 0



$\Rightarrow \sum NIM = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \sum NIM = 1 \oplus 1 = 0$

$\Rightarrow \sum NIM = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \sum NIM = 0$

Le joueur qui termine son mouvement avec une $\sum$ NIM = 0, c'est lui le gagnant (prendra la dernière allumette)

Selon les 2 lemmes

Le premier joueur qui réussira à passer à l'état $\sum$ NIM = 0 à un instant donné, gagnera certainement la partie du jeu s'il ne se trompe pas

$\sum NIM \neq 0$

STRAÉGIES PRATIQUES DANS JEUX DE NIM

BASÉE SUR LEMME 1

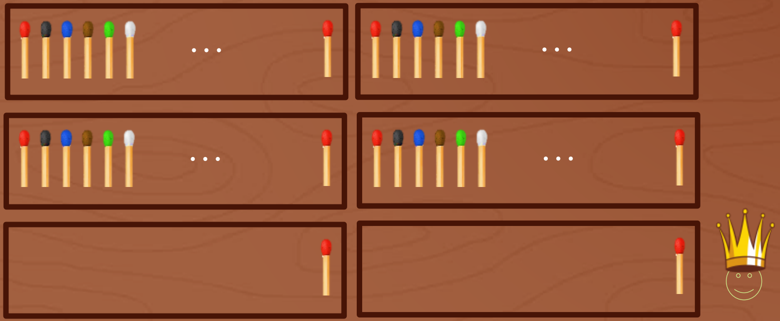
1. Réduire les tas à 2 tas non nuls contenant le même nombre d'allumettes chacun → $\sum$ NIM = 0

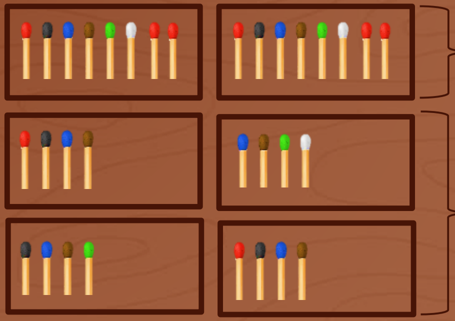
2. Imiter tout simplement le mouvement de l'adversaire à chaque fois sur l'état opposé pour garder les deux tas égaux jusqu'à ce qu'on puisse prendre la dernière allumette

BASÉE SUR LEMME 2

1. Faire la $\sum$ NIM = 0 en laissant un nombre paire de tas des puissances de 2 allumettes (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 …) en commençant par la plus grande puissance possible

tas 1 : n allumettes   tas 2 : n allumettes





2 tas de $=2^3$ = 8 allumettes

4 tas de $=2^2$ = 4 allumettes

PREUVES

“La stratégie gagnante dans le jeu Nim est de terminer chaque mouvement avec un Nim-sum de 0 »

Lemme 1 : « Si le Nim-sum est 0 après le tour d'un joueur, alors le coup suivant le change obligatoirement »

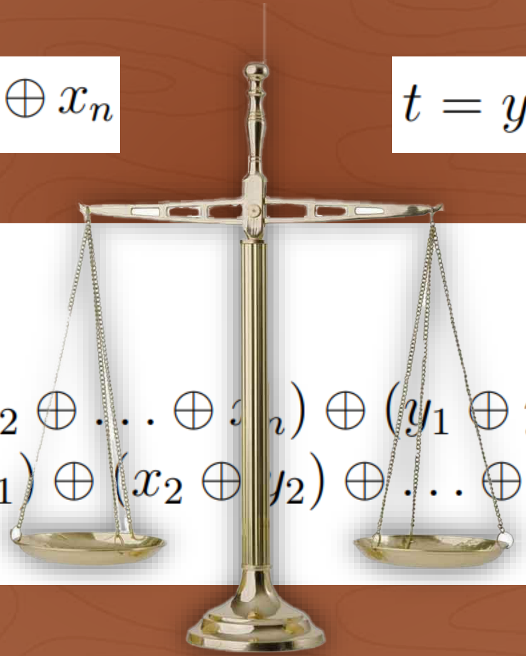
Lemme 2 : « Il est toujours possible de mettre le nim-sum à 0 à votre tour si ce n'était pas déjà 0 au début de votre tour »

LEMME 1

« Si le Nim-sum est 0 après le tour d'un joueur, alors le coup suivant le change obligatoirement »

$$s = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n$$

$$t = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus \ldots \oplus y_n$$



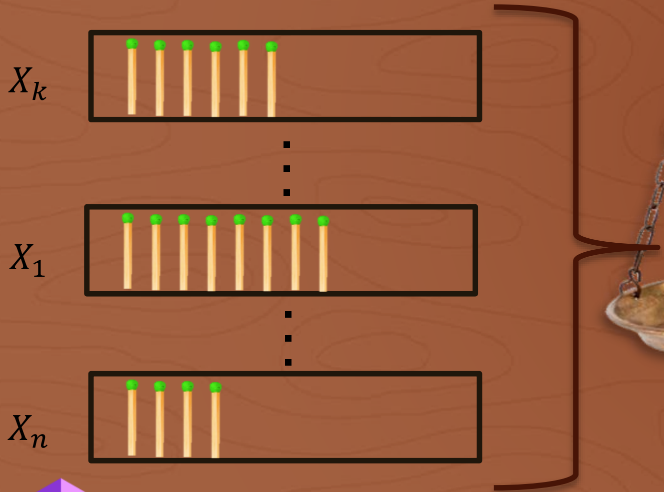
$$\begin{aligned}
t &= 0 \oplus t \\
&= s \oplus s \oplus t \\
&= s \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus y_2 \oplus \ldots \oplus y_n) \\
&= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus (x_2 \oplus y_2) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus y_k) \\
&= s \oplus x_k \oplus y_k
\end{aligned}$$

LEMME 2

« Il est toujours possible de mettre le nim-sum à 0 à votre tour si ce n'était pas déjà 0 au début de votre tour »

$$s = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n$$

$$t = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus \ldots \oplus y_n$$



y_k

$$\begin{aligned} t &= s \oplus x_k \oplus y_k (\text{from above}) \\ &= s \oplus x_k \oplus x_k \oplus s \\ &= s \oplus s \oplus x_k \oplus x_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

03

TYPES DE POSITIONS DANS LES JEUX IMPARTIAUX

TYPES DE POSITIONS DANS LES JEUX IMPARTIAUX

P-Position

Si la position garantit une victoire pour le joueur **précédent**.

Nim état (0,1,1)

N-Position

Si la position garantit une victoire pour le joueur **suivant**.

Nim état (0,0,1)

Je suis dans P ou dans N?

Pour déterminer si une position est N ou P, Nous appliquons une méthode de **Backward Induction** de la fin du jeu jusqu'au début.

Algorithme Backward Induction

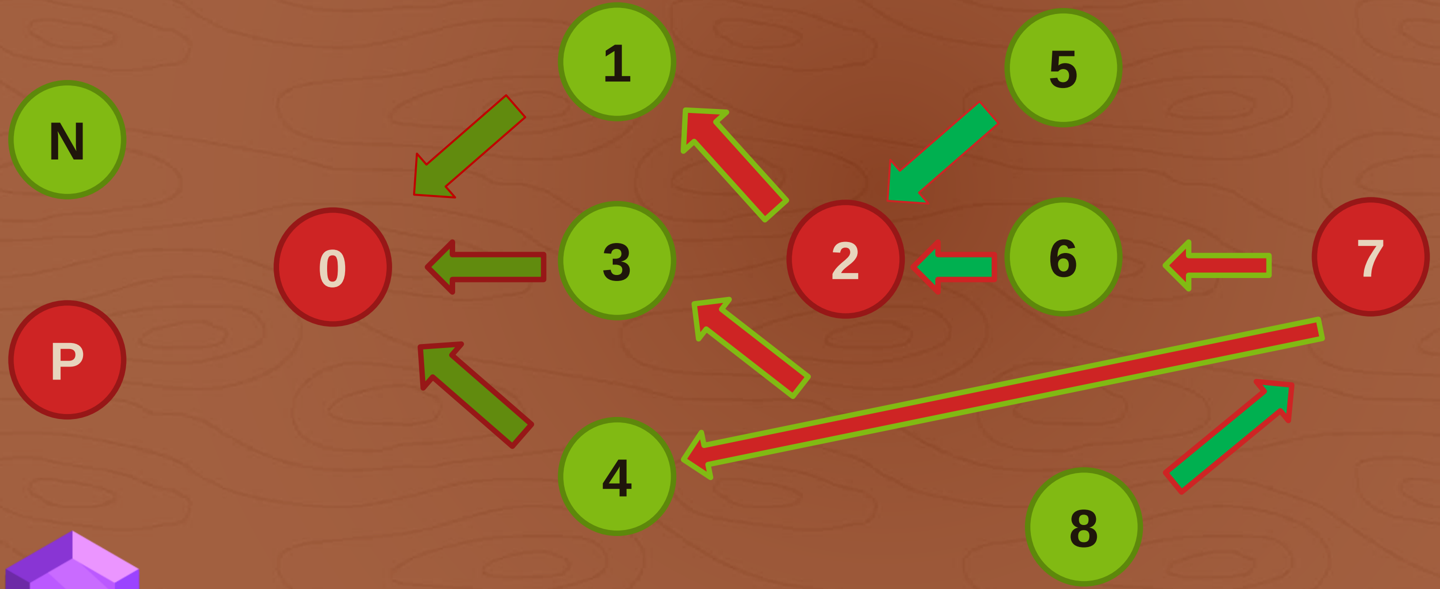
- Marquez chaque position terminale en P
- Marquez chaque position qui peut atteindre une position P en N.
- Marquer P les positions qui ne se déplacent que vers des positions N

Exemple - jeu de soustraction

Règle : commence avec une pile de jetons, ... un nombre quelconque de l'ensemble S = {1, 3, 4} ...

Objectif : trouver une période de positions du jeu

« PNPNNNNP » est la période du jeu de soustraction



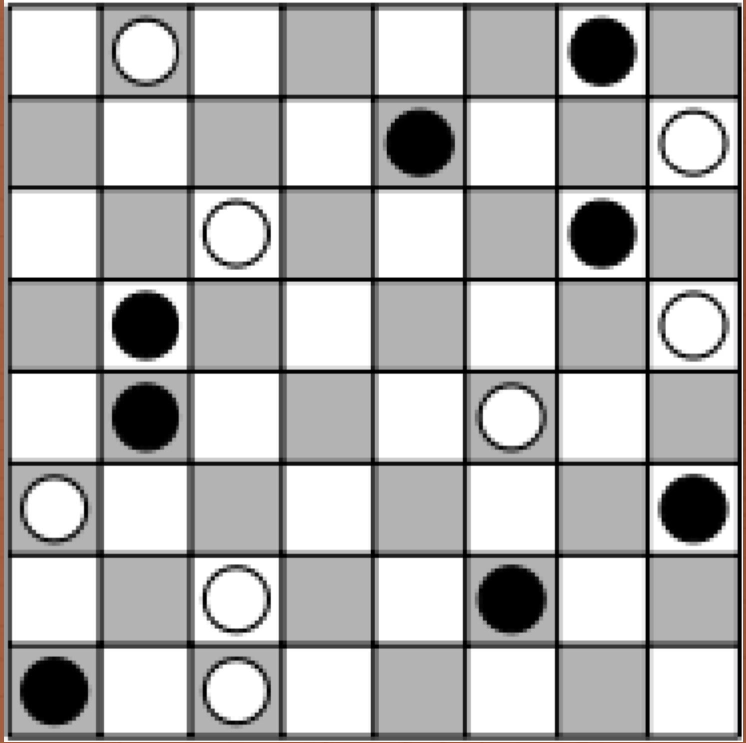
04

VARIANTES DE JEU DE NIM

Quelque variantes

- Poker Nim : Un joueur peut décider de rajouter des nims.
- Northcott’s Game

NorthCott's Game



- Le nombre de cases entre les deux jetons sont la taille des tas de NIM

- L'objectif est de rendre le Nim-SUM des distances entre jetons = 0 à chaque étape.

MERCI !

De votre attention

Des Questions ?

DÉMONSTRATION