

# 基于自适应网格的主动学习算法及其结构可靠性预测应用

吴玉顺<sup>1</sup> 宋成涛<sup>2</sup> 韩志杰<sup>3</sup> 许峙峰<sup>\*1</sup> 陈旭勇<sup>1</sup> 吴巧云<sup>1</sup>

(1.武汉工程大学, 湖北武汉 430073; 2.中交第二航务工程勘察设计院, 湖北武汉 430071; 3.长江三峡通航管理局, 湖北武汉 443003;)

**摘要:** 搜索整个输入空间才能保证可靠度估计的准确性, 而现有的基于搜索算法的可靠度估计方法为此需要高额的计算成本, 为此, 本文通过自适应网格实现整个输入空间的搜索并通过主动学习降低搜索成本, 提出两种基于自适应网格的主动学习算法, 即可靠度误差监督的自适应网格算法和可靠性指标精度监督的自适应网格算法, 前者计算指定误差的可靠度, 后者计算指定精度的可靠性指标, 并在与其他算法的比较和实际工程运用中验证了其准确、高效及实用性。

**关键词:** 结构可靠性; 自适应网格; 主动学习; 搜索算法

**中图分类号:** TU312+.3 **文献标识码:** A

## Adaptive grid-based active learning algorithm and its application to structural reliability prediction

Wu Yushun<sup>1</sup> Song ChengTao<sup>2</sup> Han Zhijie<sup>3</sup> Xu Zhifeng<sup>\*1</sup> Chen Xuyong<sup>1</sup> Wu Qiaoyun<sup>1</sup>

(1. Wuhan Institute of Technology, Hubei, Wuhan, 430073; 2. China Communications 2nd Navigational BUREAU and Reconnaissance Design Institute Co., Ltd., Hubei, Wuhan, 430071; 3. Three Gorges Ship Lock Management Office of Three Gorges Navigation Administration Bureau of The Yangtze River., Ltd., Hubei, Yichang, 443003)

**Abstract :** Searching the entire input space is required to ensure the accuracy of the reliability estimation, for which existing reliability estimation methods based on search algorithms require high computational costs. To this end, this paper realizes the search of the whole input space through adaptive grids and reduces the search cost through active learning, and proposes two active learning algorithms based on adaptive grids, namely, reliability error supervised algorithm of adaptive grid and reliability index accuracy supervised algorithm of adaptive grid. The former calculates the reliability of the specified error, and the latter calculates the reliability index of the specified accuracy, and its accuracy, efficiency and practicability are verified in the comparison with other algorithms and practical engineering applications.

**Keywords :** structural reliability; adaptive grids; active learning; search algorithm

基金项目: 中交第二航务工程勘察设计院有限公司长悬臂双层钢管式靠船结构关键技术研究项目 (X012830)

作者简介: 吴玉顺, 出生于 1997 年, 男, 工学硕士, 学生, 主要从事可靠度研究。E-mail: 2305787665@qq.com

通信作者: 许峙峰, 出生于 1990 年, 男, 工学博士, 特聘教授, 主要从事算法及可靠度相关研究。E-mail: 20120102@wit.edu.cn

收稿日期: 2024 年 2 月

## 0 引言

工程结构常被要求满足极低的失效概率 ( $10^{-4}$  以下)<sup>[1]</sup>, 如何使用较少样本来估计如此低的失效概率, 学者近数十年里提出了诸多方法<sup>[2]</sup>。当下结构可靠度预测方法大致分为如下两类: 1, 基于概率论的解析方法, 2, 基于蒙特卡洛模拟的统计方法<sup>[3]</sup>。

基于概率论的解析方法采用基于统计力学的概率模型来预测结构失效概率, 其中模型参数可通过力学分析或者对试验数据的最优化拟合来确定, 此类方法对于简单结构能给出完整且较准确的可靠性分布, 如高斯分布束模型<sup>[4]</sup>, 最弱连接模型<sup>[5]</sup>, 渔网模型<sup>[6]</sup>等等, 但对于实际工程中的复杂结构缺乏适用性, 因此工程上常采用统计学方法。

统计学方法的评估精度与计算成本正相关。在实际工程应用中, 学者们通常从如下四个方面来平衡计算成本和评估精度<sup>[1]</sup>: 1, 改进抽样方法; 2, 可靠度近似; 3, 替代模型; 4, 搜索算法。改进抽样方法显著地降低了抽样数量, 如基于重要度的抽样方法<sup>[7]</sup>, 基于定向的抽样方法<sup>[8]</sup>, 基于子集模拟的方法<sup>[9]</sup>以及基于拉丁超立方体的抽样方法<sup>[10]</sup>等等, 但随着样本的减少, 输入空间得不到完整搜索, 误差可能随之扩大; 在可靠度近似领域, 诸多方法基于设计点展开<sup>[11]</sup>, 如广泛在工程中运用的一阶可靠度法<sup>[12]</sup>, 二阶可靠度法<sup>[12]</sup>, 以及使用多个设计点和高阶矩的其他方法<sup>[13]</sup>, 然而当极限状态面 (limit state surface, LSS) 显著偏离所假设的函数形式时, 基于设计点的方法可能无法提供准确的解答; 为此, 近年来诞生了许多替代模型, 原始功能函数 (performance function, PF) 被一些计算成本更低的模型所取代。如基于传统响应面的方法<sup>[14]</sup>和基于机器学习的方法<sup>[14]</sup>, 但如果 LLS 上 PF 具有非线性, 其也会产生很大的误差。

对比如上三种方法, 搜索算法能提高 PF 非线性的情况下的有效性和准确性, 其通常由搜索算法和抽样策略所组成, 如基于方向划分的启发式算法<sup>[15]</sup>, 基于梯度的算法<sup>[16]</sup>, 基于群算法的方法<sup>[17]</sup>, 基于遗传算法的方法<sup>[18]</sup>, 基于主动学习的方法<sup>[19-25]</sup>等。都能减少冗余采样

和提高精度, 并且具有更好的兼容和稳定性。但目前的搜索算法往往对输入空间进行了较大的忽略从而导致了可靠度估计的错误, 或者采用大量抽样访问整个输入空间使得其计算成本高昂。

针对上述问题, Xu<sup>[26]</sup>等提出了一类基于网格树的可靠度启发式算法, 但其对网格进行大量采样, 效率有待进一步提高。为此本文提出了一类基于自适应网格的主动学习算法并将应用于结构可靠度预测上, 其在保证搜索整个输入空间的前提下大幅减少不必要的抽样。该算法使用自适应网格作为设计实验的抽样策略, 并使用主动学习方法来减少抽样样本容量, 其中主动学习方法由广度优先搜索 (breadth-first search, BFS)、剪枝算法及线性内插预测实现。为满足可靠度预测及可靠性指标估计的需求, 在上述算法的基础上, 本文进一步提出了以下两种算法: 1, 可靠度误差监督的自适应网格算法 (reliability error supervision algorithm of adaptive grid, RESAAG), 其可保证可靠度预测结果误差在给定范围内; 2, 可靠性指标精度监督的自适应网格算法 (reliability index accuracy supervision algorithm of adaptive grid, RIASAAG), 其保证算法估计的可靠性指标的精度。同时通过数值验证证明了本文所提算法的准确性, 并通过对比主流可靠性估计算法证明了其优越性, 还通过该算法在一靠船构件可靠性分析上的应用证明了其实用性。

## 1 理论背景

### 1.1 可靠性分析基础

设目标结构在一列输入作用下的响应可由集合  $G(\mathbf{X}) = \{G_1(\mathbf{X}), G_2(\mathbf{X}), \dots, G_j(\mathbf{X})\}$  表示, 其中  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  为输入变量,  $k$  为输入空间的维度,  $G_i(\mathbf{X}) < 0$  则表示结构某一失效事件。一般而言, 可将结构视为一串系统, 则其 PF 可表示为  $G(\mathbf{X}) = \min\{G_1(\mathbf{X}), G_2(\mathbf{X}), \dots, G_j(\mathbf{X})\}$ , 其中  $G > 0$  和  $G < 0$  分别代表了结构安全和结构失效。该结构的 LSS 可表示为:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{X} | G(\mathbf{X}) = 0\} \quad (1)$$

该结构的失效概率可由下式计算:

$$P_f = 1 - R = 1 - \int_{\Omega_s} f_{\mathbf{X}}(X_1, X_2, \dots, X_k) dX_1 dX_2 \dots dX_k \quad (2)$$

其中  $f_{\mathbf{X}}(X_1, X_2, \dots, X_k)$  为各个  $X_i$  的联合概率密度函数 (joint probability density function, JPDF),  $\Omega_s = \{\mathbf{X} | G(\mathbf{X}) > 0\}$  表示结构的安全域,  $R$  为结构可靠度。

在实际工程中, 一般将  $\mathbf{X}$  通过 Nataf 变换<sup>[1]</sup>转化为标准正态向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_k]$

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathbf{X}}^{-1}[F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})] \quad (3)$$

其中  $F_{\mathbf{X}}$  为各个  $X_i$  的累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF),  $\Phi_{\mathbf{X}}$  为各个  $x_i$  的联合累积分布函数 (joint cumulative distribution function, JCDF),  $\Phi_{\mathbf{X}}^{-1}$  为  $\Phi_{\mathbf{X}}$  的反函数。

同理,  $\mathbf{X}$  至  $\mathbf{x}$  的 Nataf 变换可写作:

$$\mathbf{X} = F_{\mathbf{X}}^{-1}[\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})] \quad (4)$$

相应地, 该结构关于  $\mathbf{x}$  的 PF 可表示为:

$$g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{X}) = G\{F_{\mathbf{X}}^{-1}[\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})]\} \quad (5)$$

其中,  $F_{\mathbf{X}}^{-1}$  是  $F_{\mathbf{X}}$  的反函数。

同时, 该结构关于  $\mathbf{x}$  的极限状态曲面变为:

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) = 0\} \quad (6)$$

而失效概率则为:

$$P_f = 1 - R = 1 - \int_{\Omega_s} \varphi_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \quad (7)$$

其中,  $\varphi_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  表示各个  $x_i$  的 JPDF,

$\Omega_s = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) > 0\}$  为变换后的安全域。

可靠性指标 (reliability index, RI), 又名 Hasofer-Lind 指数<sup>[27]</sup>, 为从原点至 LLS 的最短距离, 即

$$\beta = |\mathbf{x}_0| = \min[|\mathbf{x}|, \mathbf{x} \in \mathbf{u}] \quad (8)$$

其中  $|\cdot|$  为二范数运算,  $\mathbf{x}_0$  为最可能点 (most probable point, MPP), 满足  $|\mathbf{x}_0| = \beta$  和  $G(\mathbf{x}_0) = 0$ 。

工程上常采用一阶矩法利用 RI 来估计结构失效概率, 其假设 LLS 为一个超平面, 则对应失效概率可表示为<sup>[28]</sup>:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (9)$$

另一方面, 失效概率也可半径为  $\beta$  的超球体之外的概率来保守估计, 即:

$$P_f \leq 1 - \int_{|\mathbf{x}| < \beta} \Phi_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \quad (10)$$

其中  $\Phi_{\mathbf{X}}$  为各个  $x_i$  的 JPDF。若各个  $x_i$  相互独立, 则上述概率服从卡方分布<sup>[29]</sup>, 即:

$$P_f \leq 1 - \chi^2(\beta^2, k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\beta^2 - k}{\sqrt{2k}}\right) \quad (11)$$

其中  $\chi^2$  为  $k$  个自由度的卡方分布 CDF。当  $k$  足够大时, 上式右侧的近似是有效的。

## 1.2 数据结构及算法

### 1.2.1 树状结构

给定一个  $k$  维超矩形空间  $\mathbf{C}^k$  并在其所有维度上进行等二划分, 可得  $2^k$  个  $k$  维空间网格, 对新划分出的空间网格继续进行等二划分并重复这一过程。可用一个  $n$  层的树状结构 (见图 1) 来表示  $n-1$  次上述划分过程, 其特征为: 1, 根节点代表  $\mathbf{C}^k$ ; 2, 每个树节点代表相应的空间网格, 并储存其  $2^k$  个顶点的信息; 3, 每个树节点都可以决定是否生成子节点; 4, 每个父节点有  $2^k$  个子节点。

### 1.2.2 广度优先搜索及剪枝算法

通过 BFS 策略可以由低到高逐层由左至右访问树状结构所有节点。同时引入剪枝算法, 即跳过部分不满足搜索条件的节点来降低搜索量。具体而言, 对于一个  $n$  层的  $k$  维超矩形空间对应的树状结构 (见图 1), 实现树状结构的遍历有以下步骤:

(1) 设访问层数  $l=1$  并访问  $c_{l,1}$ ;

(2) 使  $l=l+1$ , 并访问  $c_{l,1}$  到  $c_{l,4m+4}$  (通过剪枝算法跳过部分节点);

(3) 重复步骤 2 直到访问层数  $l$  达到  $n$ 。

### 1.2.3 自适应网格

自适应网格, 即网格在解的梯度较大时进行细化, 在解的梯度较小时变疏, 通过这种由粗到细的网格划分方式, 达到高效逼近物理或几何边界的目的 (见图 1)。

网格的生成原理如下, 网格的生成依赖于点, 对于超矩形空间  $\mathbf{C}^k$  所有维度进行等二空间划分成为  $2^k$

个网格需要  $\sum_{i=0}^k C_k^i 2^{k-i}$  个点, 并可按超矩形空间  $\mathbf{C}^k$  的子

超矩形空间  $\mathbf{C}^i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) 进行分类, 每种顶点对应  $\mathbf{C}^i$  的中心点且其数量  $n_i = C_k^i 2^{k-i}$ 。举例而言, 对于一个二维平面, 将其两个维度进行等二空间划分需要 9 个点, 分别为 4 个平面的顶点 (0 维中心点)、4 个边的中点 (1 维中心点)、1 个面的中点 (2 维中心点)。

## 2 基于自适应网格的主动学习算法

为在遍历整个输入空间的前提下高效完成可靠性分析, 本部分提出了一类基于自适应网格的主动学习算法。在上述算法的基础上, 本节进一步提出了以下两个算法: 1. 可靠度误差监督的自适应网格算法 (Reliability Error Supervision Algorithm of Adaptive Grid, RESAAG), 其可保证可靠度预测结果的误差在给定范围内; 2. 可靠性指标精度监督的自适应网格算法 (Reliability Index Accuracy Supervision Algorithm of Adaptive Grid, RIASAAG), 其可保证 RI 结果的精度。

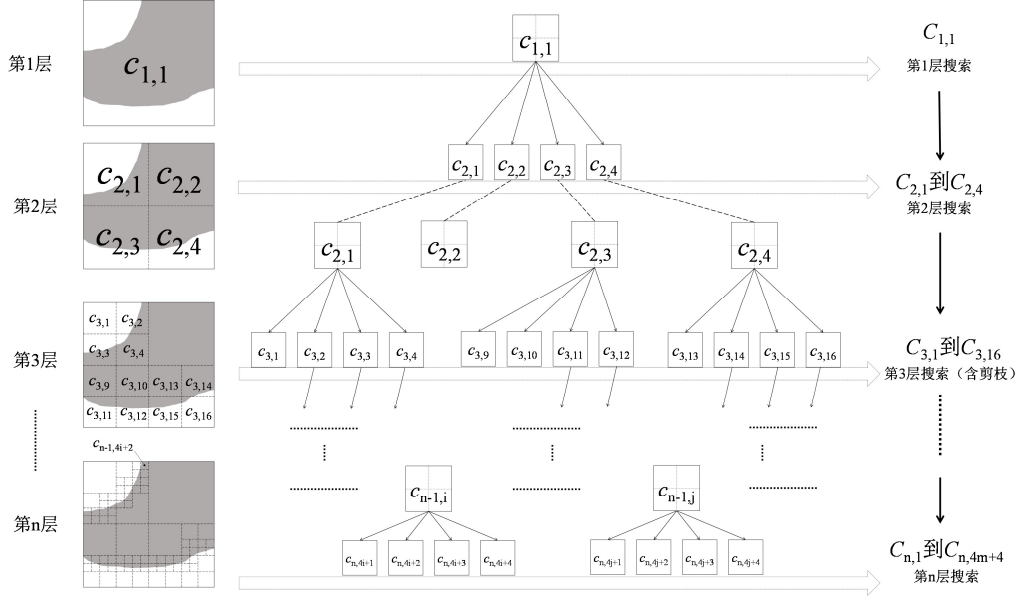


图 1 二维空间自适应网格和树状结构的对应及各层的遍历

Fig 1 Correspondence between adaptive grids and tree structures in two dimensions and traversal of the layers

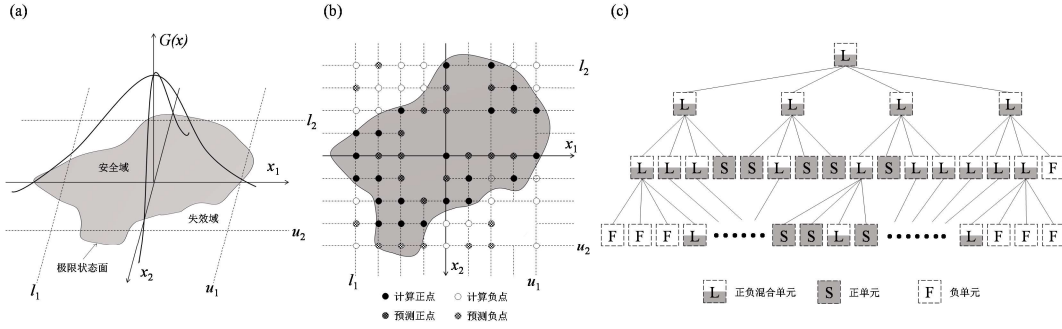


图 2 二维状态下输入空间自适应网格的主动学习生成过程

Fig 2 Active learning generation process for adaptive grids in 2-D input-space

## 2.1 算法整体介绍

在应用中一般将工程原始输入变量通过式(4)转换为标准正态输入变量。假定输入  $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_k]^T$  的输出为  $G(\mathbf{x})$  (见图 2 (a)), 其中  $x_i \in [l_i, u_i]$ , 即超矩形空间  $\mathbf{C}^*$  其第  $i$  个维度的长度为  $C_i=u_i-l_i$ 。

算法通过主动学习来自适应性地划分安全域网格和失效域网格, 来对超矩形空间  $\mathbf{C}^*$  进行由内外部粗略至边缘精细的完整遍历从而有效且高效地计算(7)表示的失效概率。图 2 展示了 2 维情形下的算法的实现。

算法的核心思想是通过逐层对超矩形空间  $\mathbf{C}^*$  所有维度进行等二划分并生成对应的树状结构, 同时在此过程中通过线性内插策略预测 PF 在点上的正负和值, 并引入网格的安全类型判断准则来剪枝, 跳过部分非必要网格的生成, 然后通过 BFS 遍历网格树状结构来实现主动学习的可靠度计算。方便起见, 下文将在超矩形空间划分过程中产生的空间网格称为单元, 依据 PF 在点上的正负, 将点分为正点和负点, 将 PF 在点上的值称作点的值; 依据单元所有顶点的正负同号性, 可将单元分为顶点全为正的单元, 顶点全为负的单元和正负混合单元。

依上文所述, 单元类型的判断依赖于单元顶点的

正负, 算法的线性内插策略可概括如下: 第一次网格划分时计算  $\sum_{i=0}^k C_i^* 2^{k-i}$  个点(见 1.2.3 节)的值并记录正负,

之后的划分通过预测标准用已有的顶点的值来预测中心点(见 1.2.3 节)的值并记录正负(见图 2 (b))。预测标准为: 子超矩形空间  $\mathbf{C}^*$  的中心点通过其顶点来进行预测, 顶点同号则预测中心点为同号, 中心点值取其顶点最大值和最小值的均值, 顶点异号则不满足预测准则, 需要进一步计算中心点的值并记录正负。

算法的剪枝策略如下: 正、负单元不参与下一层的网格划分, 正负混合单元继续进行后续划分。不进行网格划分的正负单元即为自适应网格中的较大的网格, 正负混合单元继续后续划分后继续生成自适应网格中精细的网格。

单元的可靠度通过下式计算:

$$R_E = \int_{\Omega_E \cap \Omega_s} \varphi_x(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k \quad (12)$$

其中  $R_E$  为所有单元的可靠度,  $\Omega_E$  为单元的域,  $\Omega_s$  为安全域,  $\cap$  为交集运算符。显然负单元的可靠度为 0, 因此上式即变为:

$$R_{SE} = \int_{\Omega_{SE}} \varphi_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k \quad (13)$$

其中  $R_{SE}$  为正单元的可靠度,  $\Omega_{SE}$  为正单元的域,  $\varphi_{\mathbf{x}}$  为各个  $x_i$  的联合概率密度函数 ( $1 \leq i \leq k$ )。当各个  $x_i$  相互独立时, (13)可进一步简化为:

$$R_{SE} = \prod_{i=1}^k [\Phi(u_i) - \Phi(l_i)] \quad (14)$$

其中  $u_i$  和  $l_i$  分别为单元在第  $i$  个维度上的上下界。基于以上公式, 提出以下公式来计算极限状态单元的可靠度:

$$R_{LSE} \approx \frac{V_{safe}}{V_{LSE}} \int_{\Omega_{LSE}} \varphi_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k \leq R_{SE} \quad (15)$$

其中  $V_{safe}$  是正负混合单元的安全域的超体积,  $V_{LSE}$  是正负混合单元的总超体积,  $\Omega_{LSE}$  为正负混合单元的域。

需要进一步说明的是, 因为只是依据其顶点来判断单元类型, 所以正单元和负单元不一定为内部点的值全正的安全单元和点的值全负的失效单元, 但基于实际工程问题中安全域单元连通中心集中且曲率连续的基本情况, 可以认为实际工程问题中的正单元和负单元内部非全正和非全负的概率可以忽略, 因此在算法执行过程中假定只包含正节点和负节点的单元只为正单元和负单元。

## 2.2 可靠度误差监督的自适应网格算法

可靠度误差监督的自适应网格算法的原理基于以下两点: 1, 在超矩形空间自适应网格划分生成  $k$  层树状结构这一过程中, 整个树状结构中的所有正单元包含了结构的可靠度信息, 第  $k$  层的正负混合单元包含了结构可靠度的计算误差信息。2, 随着层级的增加, 第  $k$  层的正负混合单元总域逐渐减少, 即有效可靠度的误差是逐层降低的。举例而言, 如果  $k$  层树状结构中总共出现了  $p$  个正单元, 那么计算的结构有效可靠度为  $\sum_{i=1}^p R_{SE}^i$ ,  $R_{SE}^i$  为第  $i$  个正单元的可靠度, 通过式(14)计算; 第  $k$  层出现了  $q$  个正负混合单元, 根据式(15), 结构的可靠度最大误差不超过  $\sum_{j=1}^q R_{SE}^j$ , 且随着  $k$  的增加而

单调减少,  $R_{SE}^j$  为第  $j$  个正负混合单元按照正单元计算的可靠度。

由此, 当可靠度最大误差小于精度要求时算法停止网格划分生成新的树状结构层级, 从而保证可靠性的精度规定。最后利用式(15)将最后一层生成的正负混合单元的插值可靠度和正单元的可靠度累加到总可靠度中来进一步提高精度。

图 3 展示了可靠度误差监督的自适应网格算法的流程图, 可概括为以下四个步骤:

(1)计算输入的超矩形空间所有子矩形空间中心点的值并生成第二层网格, 并将第二层设为当前层级;

(2)遍历当前层级的所有单元, 计算正单元的可靠度累加到总可靠度中, 将当前层级的正负混合单元的可靠度求和来计算误差, 通过线性内插策略生成下一层的网格单元;

(3)判断误差是否小于精度要求, 如果误差大于设

定的精度阈值, 则将下一层设为当前层级并重复步骤 2; 如果最大误差小于设定的精度阈值, 则进入步骤 4;

(4)遍历下一层的所有单元, 将正负混合单元的差值可靠度和正单元的可靠度累加到可靠度中。

可靠度误差监督的自适应网格算法

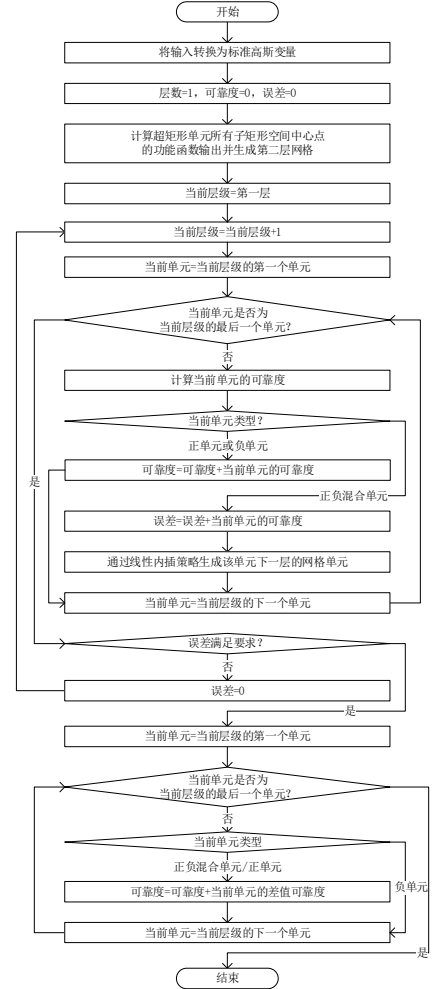


图 3 可靠度误差监督的自适应网格算法流程图

Fig 3 Flow chart of RESAAG

## 2.3 可靠性指标精度监督的自适应网格算法

可靠性指标精度监督的自适应网格算法的基本原理基于以下两点: 1, RI 的物理含义为 LSS 至原点的最短距离, 从而 MPP 只可能出现在正负混合单元中; 2, 随着层级的增加, 自适应网格在 LSS 处的分辨率越来越高。

与 RESAAG 类似, 只有正负混合单元才将生成下一层的单元, 同时引入加速搜索策略来进一步提高算法效率, 加速搜索策略指在生成下一层的网格之前删除肯定不包含 MPP 的单元。举例而言, 假定存在  $E_1$  和  $E_2$  两个单元,  $E_1$  距原点的最大距离为  $l_1$ ,  $E_2$  距原点的最大距离为  $l_2$ , 若  $l_1 < l_2$  则说明  $E_2$  必然不包含 MPP 因此可以删除。据此在网格划分生成下一层前, 首先计算出当前层级所有正负混合单元距原点的最大距离并将其最小的作为 RI, 然后让所有距原点的最大距离大于 RI 的单元不进行网格生成。当达到 RI 的精度所规定的

最大层级时算法停止，用  $\varepsilon_P$  表示可靠性指标的精度，其与最大层级的关系如下  $2^m \geq |C^k|/\varepsilon_P$ ，其中  $|C^k|$  是输入空间的二范数。最后用得到的可靠性指标通过式(11)来计算可靠度。

图 4 展示了 RIASAAG 的流程图，可概况为以下五个步骤：

(1)计算输入的超矩形空间所有子矩形空间中心点的值并生成第二层网格，并将第二层设为当前层级；

(2)遍历当前层级所有单元，记录所有正负混合单元到原点的最大距离，并求出其最小值作为 RI；

(3)遍历当前层级的所有单元，将当前层级的到原点的最小距离小于 RI 的正负混合单元通过主动学习策略生成下一层的网格单元。

(4)判断当前层数是否已经达到精度所要求的最大层数，若未达到，则将下一层设为当前层级并重复步骤 2；如果达到，则进入步骤 5；

(5)通过插值含有最大可靠度指标的正负混合单元最终确定可靠度指标，并通过(11)式来计算可靠度。

## 2.4 算法数值验证及分析

以下通过高度非线性串联系统问题<sup>[30]</sup>来验证所提算法的有效性。

$$g = \min \{g_m^1, g_m^2, g_m^3, g_m^4\}, \begin{cases} g_m^i = g^i + 2\sin(g^i), i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ g^1 = 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ g^2 = 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ g^3 = x_1 - x_2 + 7/\sqrt{2} \\ g^4 = x_2 - x_1 + 7/\sqrt{2} \end{cases} \quad (16)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布，取值区间分别为  $[-6, 6]$  和  $[-4, 4]$ ， $g$  在输入空间上的 PF 和 LLS 的非线性如图 5。为比较两种算法的差异，将 RESAAG 的最大误差设为 0.001，同时将 RIASAAG 的可靠度指标精度设为 0.1，结构的失效概率通过蒙特卡洛抽样  $10^8$  来进行计算，图 5 展示了两种算法的抽样结果和所得到的安全域，表 1 展示了其相应的可靠度估计值。通过图 5 和表 1 可知：

(1)两种算法都实现了对整个输入空间的遍历；

(2)两种算法跳过非必要 PF 的计算有两种方式，一种是跳过正、负单元生成的剪枝策略，另一种是通过低错误率的主动学习策略预测 PF 的值。通过这两种方式

极大降低了计算成本；

(3)两种算法对 LLS 曲率连续的情形在保证精度的情况下有较好的效果；

(4)由于算法只是使用 PF 的正负性判断来进行迭代，从而避免了 PF 的非线性对可靠度估计的影响。

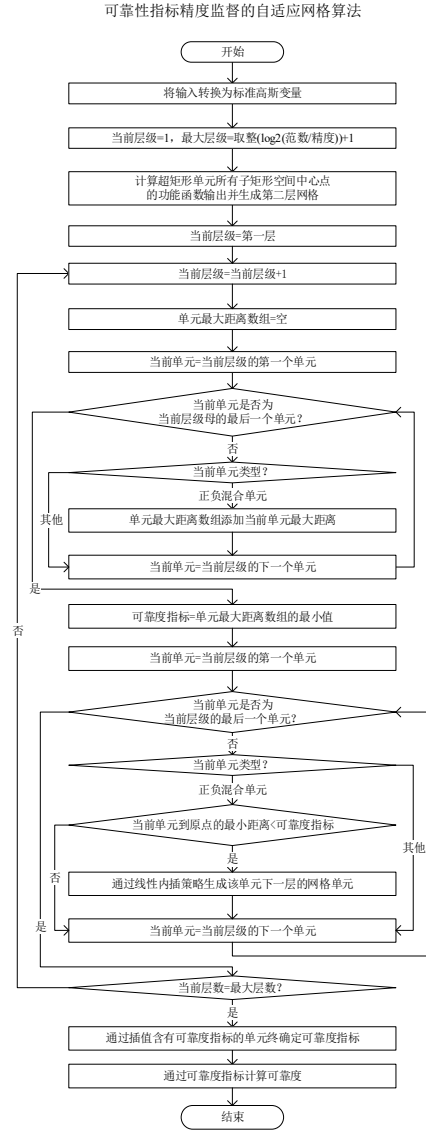


图 4 可靠性指标精度监督的自适应网格算法流程图

Fig 4 Flow chart of RIASAAG

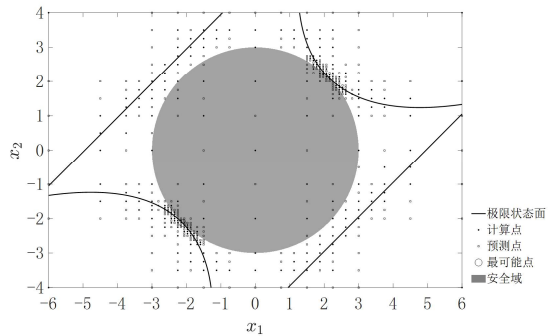
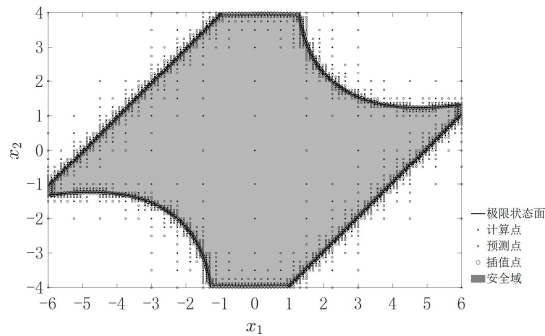


图 5 算法的二维验证：(a) 可靠度误差监督的自适应网格算法；(b) 可靠性指标精度监督的自适应网格算法

Fig 5 2-D validation of algorithms: (a) RESAAG; (b) RIASAAG



表 1 可靠度估计结果对比

Table 1 Comparison of reliability estimation results

| 算法      | 实际抽样数量          | 预测数量 | 预测错误数量 | 失效概率                                      | 绝对误差                      | 相对误差    | 预测错误率 |
|---------|-----------------|------|--------|---|---------------------------|---------|-------|
| 蒙特卡洛    | $1 \times 10^8$ | -    | -      | $2.272 \times 10^{-3}$                    | -                         | -       | -     |
| RESAAG  | 981             | 976  | 58     | $2.28367 \times 10^{-3}$                  | $0.116668 \times 10^{-4}$ | 0.51%   | 5.94% |
| RIASAAG | 239             | 220  | 6      | $11.10167 \times 10^{-3}$<br>(RI=3.00022) | $88.32545 \times 10^{-4}$ | 388.62% | 2.73% |

### 3 算法效率比较分析

在本节中，将所提两种算法与常见的可靠度估计和估计可靠性指标的方法进行了低维条件下的对比。

#### 3.1 可靠度估计

以下通过四种功能函数将 RESAAG 与重要性抽样 (importance sampling, IS) 算法、定向抽样 (directional sampling, DS) 算法、子集模拟 (subset simulation, SS) 算法、拉丁超矩形抽样 (Latin hyperrectangle sampling, LHS) 算法、基于深度强化学习的抽样 (deep reinforcement learning-based sampling, DRL) 算法<sup>[30]</sup>、结合克里金和蒙特卡洛模拟的主动学习可靠度方法 (active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation, AK-MCS)<sup>[31]</sup>和自适应方向重要性采样 (adaptive directional importance sampling, ADIS) 算法<sup>[32]</sup>进行比较，同时使用  $10^7$  个采样点的蒙特卡洛抽样结果作为基准，可靠度精度设为 0.005。

(1) 串联系统问题，功能函数如下，

$$g = \min\{g^1, g^2, g^3, g^4\} \quad (17)$$

其中  $g^i$  同式(16)， $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布，取值区间

为 $[-7,7]$ 。

(2) 高度非线性串联系统问题，见式(16)，区间取 $[-7,7]$ 。

(3) 二次凸面 LSS，功能函数如下：

$$g = 2.5 - \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} + 0.1(x_1 - x_2)^2 \quad (18)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布，取值区间为 $[-6,6]$ 。

(4) 含拐点的 LSS，功能函数如下：

$$g = 2 - x_2 + 0.1x_1^2 + 0.06x_1^3 \quad (19)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布，取值区间为 $[-6,6]$ 。

图 6 展示了上述四种案例对应的功能函数及 RESAAG 实现，表 2 展示了其与不同方法的对比。对于案例 1，RESAAG 和 AK-MCS 相比其他方法都具有良好的计算效率和预测精度，但 AC-MCS 对于案例 2 高度非线性问题的估计产生了较大误差；对于案例 3 和案例 4，RESAAG 对比 DS 有较高的计算效率和预测精度，对比 ADIS 在相近计算效率的条件下有较高的预测精度。但同时应当注意，对于 LSS 不够平缓的部分，RESAAG 无法进行的预测（图 6 (a) 和 (b) 中空白的部分）。

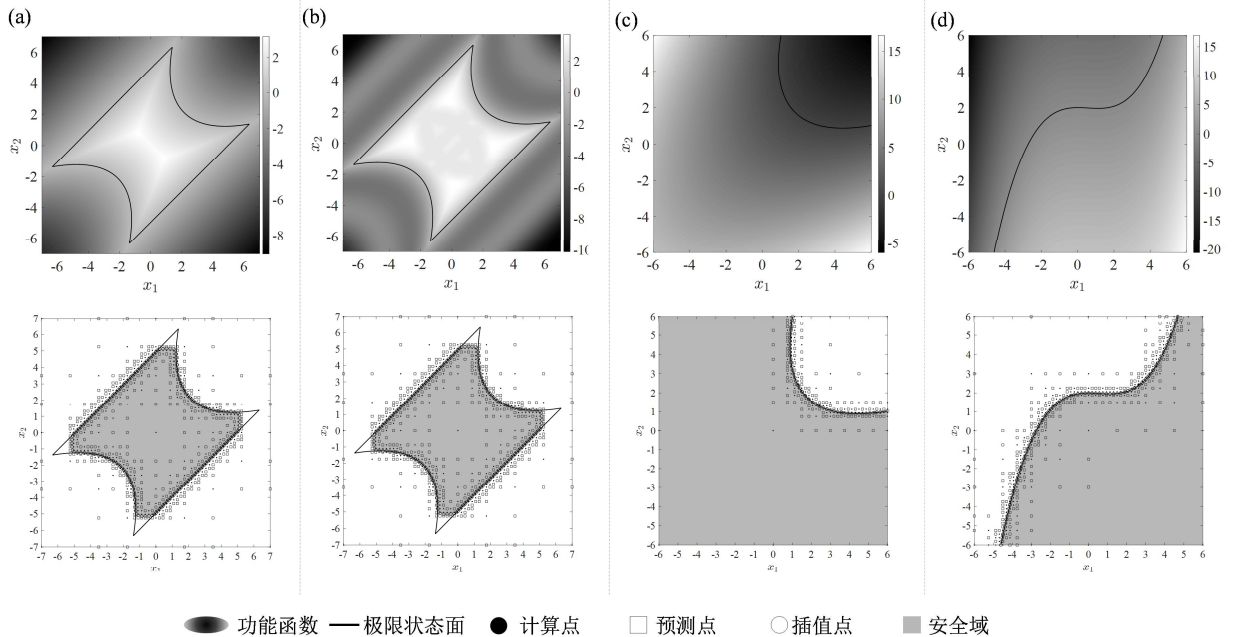


图 6 RESAAG 抽样结果: (a) 案例 1; (b) 案例 2; (c) 案例 3; (d) 案例 4

Fig 6 Sampling results of RESAAG: (a)Case 1; (b)Case 2; (c)Case 3; (d)Case 4

表 2 不同方法对可靠度估计的对比

Table 2 Comparison of different methods for reliability estimation

| 方法                     | 案例 | 抽样数量              | 失效概率                    | 绝对误差                    | 相对误差    |
|------------------------|----|-------------------|-------------------------|-------------------------|---------|
| MCS                    | 1  | $1 \times 10^7$   | $2.223 \times 10^{-3}$  | -                       | -       |
| IS <sup>[31]</sup>     | 1  | 4750              | $2.200 \times 10^{-3}$  | $2.30 \times 10^{-5}$   | 1.03%   |
| DS <sup>[31]</sup>     | 1  | 9192              | $2.600 \times 10^{-3}$  | $37.70 \times 10^{-5}$  | 16.96%  |
| SS <sup>[33]</sup>     | 1  | $2.8 \times 10^5$ | $2.225 \times 10^{-3}$  | $0.20 \times 10^{-5}$   | 0.09%   |
| LHS <sup>[30]</sup>    | 1  | 2597              | $2.330 \times 10^{-3}$  | $10.70 \times 10^{-5}$  | 4.81%   |
| DRL <sup>[30]</sup>    | 1  | 2597              | $2.314 \times 10^{-3}$  | $9.10 \times 10^{-5}$   | 4.09%   |
| AK-MCS <sup>[31]</sup> | 1  | 96                | $2.233 \times 10^{-3}$  | $1.00 \times 10^{-5}$   | 0.45%   |
| RESAAG                 | 1  | 353               | $2.230 \times 10^{-3}$  | $7.63 \times 10^{-5}$   | 3.44%   |
| MCS                    | 2  | $1 \times 10^7$   | $2.246 \times 10^{-3}$  | -                       | -       |
| SS <sup>[30]</sup>     | 2  | $4.4 \times 10^4$ | $2.460 \times 10^{-3}$  | $21.43 \times 10^{-5}$  | 9.54%   |
| LHS <sup>[30]</sup>    | 2  | 2706              | $2.684 \times 10^{-3}$  | $43.83 \times 10^{-5}$  | 19.51%  |
| DRL <sup>[30]</sup>    | 2  | 2706              | $2.318 \times 10^{-3}$  | $7.23 \times 10^{-5}$   | 3.21%   |
| AK-MCS <sup>[30]</sup> | 2  | 519               | $1.182 \times 10^{-3}$  | $106.37 \times 10^{-5}$ | 47.37%  |
| RESAAG                 | 2  | 353               | $2.299 \times 10^{-3}$  | $5.33 \times 10^{-5}$   | 2.37%   |
| MCS                    | 3  | $1 \times 10^7$   | $4.21 \times 10^{-3}$   | -                       | -       |
| DS <sup>[32]</sup>     | 3  | 3740              | -                       | -                       | <10.00% |
| ADIS <sup>[32]</sup>   | 3  | 251               | $4.040 \times 10^{-3}$  | $17.22 \times 10^{-5}$  | 4.09%   |
| RESAAG                 | 3  | 116               | $4.271 \times 10^{-3}$  | $5.87 \times 10^{-5}$   | 1.39%   |
| MCS                    | 4  | $1 \times 10^7$   | $34.417 \times 10^{-3}$ | -                       | -       |
| DS <sup>[32]</sup>     | 4  | 1270              | -                       | -                       | <10.00% |
| ADIS <sup>[32]</sup>   | 4  | 355               | $36.700 \times 10^{-3}$ | $228.31 \times 10^{-5}$ | 6.63%   |
| RESAAG                 | 4  | 236               | $35.094 \times 10^{-3}$ | $67.71 \times 10^{-5}$  | 1.97%   |

### 3.2 可靠性指标估计

以下通过三种功能函数将 RIASAAG 与最速下降法 (steepest descent method, SDM)、共轭梯度法 (conjugate gradient method, CSS)、粒子群优化 (particle swarm optimization, PSO) 算法、民主粒子群优化 (democratic particle swarm optimization, DPSO) 算法、萨尔普群 (salp swarm, SSA) 算法、碰撞体优化 (colliding bodies optimization, CBO) 算法、增强碰撞体优化 (enhanced colliding bodies optimization, ECBO) 算法、改进射线优化 (improved ray optimization, IRO) 算法和改进约束差分进化 (improved constrained differential evolution, ICDE) 算法进行比较。通过解析求解最小距离方程得到 RI 的最小值作为基准, 可靠性指标精度设为 0.01。

(5)功能函数为:

$$g = \exp[0.4(x_1 + 2) + 6.2] - \exp(0.3x_2 + 5) - 200 \quad (20)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布, 取值区间为[-6,6]。

(6)功能函数为:

$$g = \exp(0.2x_1 + 1.4) - x_2 \quad (21)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  服从标准正态分布, 取值区间为[-6,6]。

(7)受均布荷载作用的悬臂梁, 功能函数为:

$$G = 18.46156 - 7.476923 \times 10^{10} \frac{X_1}{X_2^3} \quad (22)$$

其中  $X_1$ 、 $X_2$  分别服从均值 0.001 方差 0.0002、均值 250 方差 37.5 的正态分布, 取值区间为[-6,6]。

图 7 展示了上述三种案例对应的功能函数和 RIASAAG 实现, 表 3 展示了其与不同方法的对比。相较于其他方法, RIASAAG 在具有极高的计算效率的同时保持了和其他算法近似的预测精度。



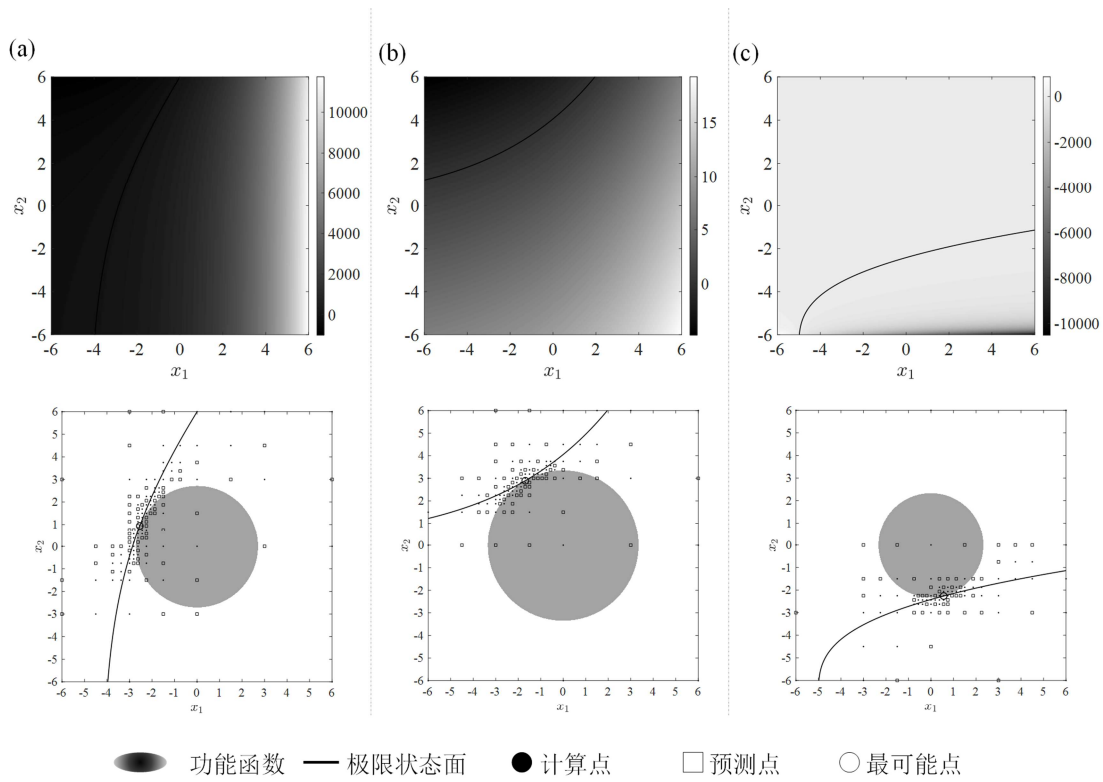


图 7 RIASAAG 抽样结果: (a) 案例 5; (b) 案例 6; (c) 案例 7

Fig 7 Sampling results of RIASAAG: (a)Case 5; (b)Case 6; (c)Case 7

表 3 不同方法对可靠性指标估计的对比

Table 3 Comparison of different methods for RI estimation

| 方法                   | 案例 | 抽样数量  | RI     | 绝对误差                    |
|----------------------|----|-------|--------|-------------------------|
| 解析解                  | 1  | -     | 2.7099 | -                       |
| SDM <sup>[34]</sup>  | 1  | 1020  | 2.7097 | 0.20×10 <sup>-3</sup>   |
| CSS <sup>[34]</sup>  | 1  | 1600  | 2.7100 | 0.10×10 <sup>-3</sup>   |
| PSO <sup>[34]</sup>  | 1  | 69300 | 2.7099 | 0.00×10 <sup>-3</sup>   |
| DPSO <sup>[34]</sup> | 1  | 4000  | 2.7103 | 0.40×10 <sup>-3</sup>   |
| SSA <sup>[34]</sup>  | 1  | 300   | 2.7099 | 0.00×10 <sup>-3</sup>   |
| CBO <sup>[34]</sup>  | 1  | 4000  | 2.7109 | 1.00×10 <sup>-3</sup>   |
| ECBO <sup>[34]</sup> | 1  | 4000  | 2.7149 | 5.00×10 <sup>-3</sup>   |
| IRO <sup>[34]</sup>  | 1  | 4000  | 2.7129 | 3.00×10 <sup>-3</sup>   |
| ICDE <sup>[34]</sup> | 1  | 4000  | 2.7099 | 0.00×10 <sup>-3</sup>   |
| RIASAAG              | 1  | 83    | 2.7105 | 0.60×10 <sup>-3</sup>   |
| 解析解                  | 2  | -     | 3.3497 | -                       |
| SDM <sup>[34]</sup>  | 2  | 234   | 3.1947 | 154.99×10 <sup>-3</sup> |
| CSS <sup>[34]</sup>  | 2  | 1600  | 3.3500 | 0.31×10 <sup>-3</sup>   |
| PSO <sup>[34]</sup>  | 2  | 69300 | 3.4971 | 147.40×10 <sup>-3</sup> |
| DPSO <sup>[34]</sup> | 2  | 4000  | 3.3496 | 0.09×10 <sup>-3</sup>   |
| SSA <sup>[34]</sup>  | 2  | 300   | 3.3508 | 1.15×10 <sup>-3</sup>   |
| CBO <sup>[34]</sup>  | 2  | 4000  | 3.3496 | 0.09×10 <sup>-3</sup>   |
| ECBO <sup>[34]</sup> | 2  | 4000  | 3.3496 | 0.09×10 <sup>-3</sup>   |

|                      |   |       |        |                       |
|----------------------|---|-------|--------|-----------------------|
| IRO <sup>[34]</sup>  | 2 | 4000  | 3.3496 | 0.09×10 <sup>-3</sup> |
| ICDE <sup>[34]</sup> | 2 | 4000  | 3.3496 | 0.09×10 <sup>-3</sup> |
| RIASAAG              | 2 | 70    | 3.3497 | 0.00×10 <sup>-3</sup> |
| 解析解                  | 3 | -     | 2.3309 | -                     |
| SDM <sup>[34]</sup>  | 3 | 711   | 2.3306 | 3.17×10 <sup>-3</sup> |
| CSS <sup>[34]</sup>  | 3 | 1600  | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| PSO <sup>[34]</sup>  | 3 | 69300 | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| DPSO <sup>[34]</sup> | 3 | 4000  | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| SSA <sup>[34]</sup>  | 3 | 300   | 2.3310 | 0.82×10 <sup>-3</sup> |
| CBO <sup>[34]</sup>  | 3 | 4000  | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| ECBO <sup>[34]</sup> | 3 | 4000  | 2.3310 | 0.82×10 <sup>-3</sup> |
| IRO <sup>[34]</sup>  | 3 | 4000  | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| ICDE <sup>[34]</sup> | 3 | 4000  | 2.3309 | 0.17×10 <sup>-3</sup> |
| RIASAAG              | 3 | 61    | 2.3302 | 0.69×10 <sup>-3</sup> |

## 4 靠船构件可靠性分析应用

为了论证所提算法的实用性，本节将其运用于湖北省秭归旧州河上的靠船结构的可靠性估计。

### 4.1 工程问题描述

如图 8 (a) 示，靠船结构主要由混凝土基础、上部结构（未画出）、橡胶护舷及钢管结构组成。工程实际表明其中钢管结构为最易损结构，故本节在忽略其他部分的可靠度的情况下对钢管结构的可靠度进行估计。

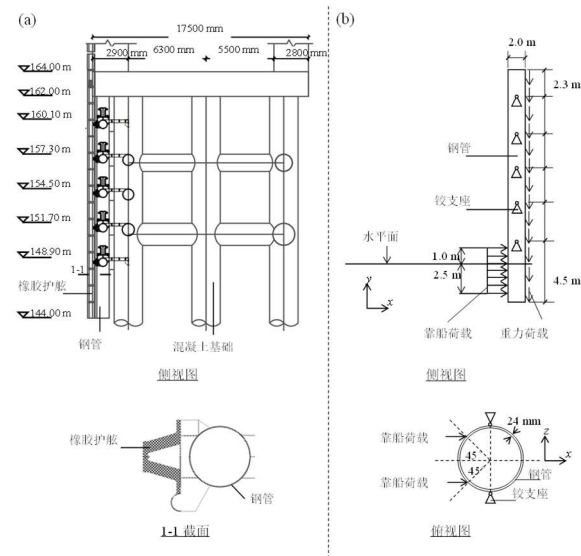


图 8 (a) 靠船结构构造图；(b) 靠船结构受力简图

Fig 8 (a) structural diagram of the berthing structure; (b) force diagram of the berthing structure

如图 8 (b) 示，出于保守估计，可将此结构简化为

在靠船冲击荷载及重力的作用下的双悬臂四跨简支连续梁，钢管的纵向长度、横向外半径、壁厚分别为 18.0m、1.0m 及 24mm。由于橡胶护舷具有缓冲作用，通过能量守恒定理<sup>[35]</sup>可将靠船冲击荷载等效为在河面以下 2.5m 至河面以上 1m 内均匀分布的两条静态线荷载。由图可知，当水平面低于 146.5m 时，靠船冲击荷载将被重新均匀分布；如果水位高于 164.5m，钢管将不会承受冲击荷载。故靠船冲击线荷载  $q$  可表示如下：

$$q = \begin{cases} F/2l & 143 < w \leq 164.5 \\ 0 & w > 164.5 \end{cases} \quad (23)$$

其中  $w$  为河流水面高度， $F$  为等效靠船冲击荷载，靠船冲击线荷载的有效长度  $l$  可表示为：

$$l = \begin{cases} w - 143 & 143 < w \leq 146.5 \\ 3.5 & w > 146.5 \end{cases} \quad (24)$$

在钢管结构的可靠度估计中，将其屈服应力  $f_y$  作为均值为 303.41MPa、方差为 22.69MPa 的正态变量考虑，将等效靠船冲击荷载作为均值为 1442.0KN 和方差为 48.1KN 的对数正态分布变量考虑，河流水面高度按照记录数据

图 9 所得到的经验 CDF 来描述。

出于安全考虑，靠船结构如果存在任何塑性应变，即认为结构失效。因为靠船冲击线荷载在整个钢管上是随机分布的，失效机制也会多变，所以其 PF 可能是高度非线性的，LLS 也可能是复杂的。因此需要对整个输入空间进行完整搜索，以确保足够的准确性。

### 4.2 可靠性分析

为了获取靠船结构的失效概率，将钢管的屈服应力  $f_y$ 、等效靠船冲击荷载  $F$  和河流水面高度  $w$  分别变换为标准正态变量  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$ ，同时将算法的可靠性误差设为  $1 \times 10^{-4}$ ，可靠性指标精度设为 0.05。

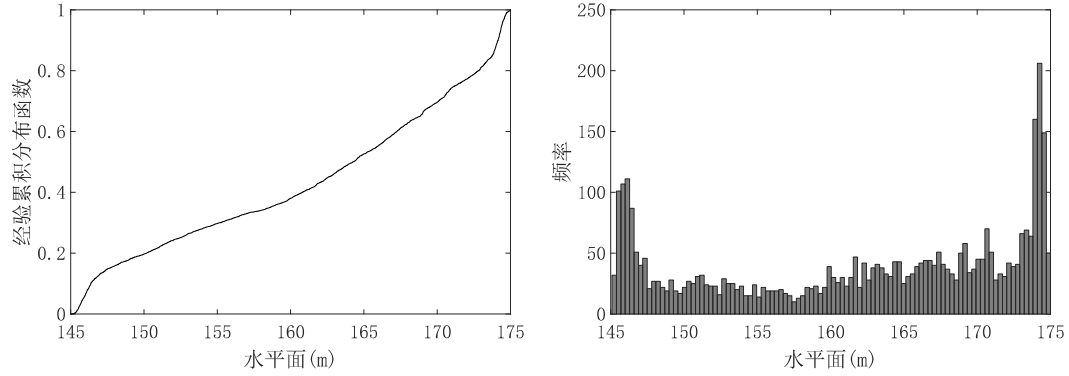


图 9 水平面高度概率分布

Fig 9 Horizontal plane height probability distribution

两种算法通过 MATLAB 实现，并通过调用 ABAQUS 2020 内置 Python 脚本传参调用建模来进行有限元分析。具体步骤如下：

- (1)通过 MATLAB 程序在调用 PF 时将  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$  传值给 Python 脚本；
- (2)Python 修改 ABAQUS 的输入文件并引导其进行有限元分析；
- (3)MATLAB 程序获取最大塑性应变的负值，将其作为输出进一步计算可靠度。

其中钢管结构建模时纵向的单元尺寸设为 0.1m，横向半径方向尺寸设为 12mm，且其对应的横截面圆心角为 5 度，图 10 展示了  $f_y=212.65 \text{ Mpa}$ ， $F=1646.7\text{KN}$  及  $w=145.0 \text{ m}$  时所对应的有限元模型及其分析结果。

图 10 示了 RESAAG 及 RIASAAG 在取样 306、189 时的结果。随着整个输入空间的遍历，靠船事件所导致的靠船构件失效事件通过 RESAAG 估测的概率为  $2.46 \times 10^{-6}$ ，通过 RIASAAG 估测的可靠性指标为 4.5749，进一步通过一阶二次矩法获得的概率为  $2.38 \times 10^{-6}$ 。结果显示，所提算法对于高度非线性的 PF 和复杂 LLS 的工程问题是有效的。

## 5 结论

本文提出了基于自适应网格的两种主动学习算法，即可靠度误差监督的自适应网格算法和可靠性指标精度监督的自适应网格算法，两种算法通过自适应的网格划分实现整个输入空间的完整搜索，并通过主动学习极大降低抽样成本，在给定精度的情况下分别计算可靠度和可靠性指标，并与其他方法的比较和在工程中的应用来验证了所提算法的准确性、高效性及实用性。总结而言如下：

- (1)通过全域的网格划分保证对输入空间的完整搜索；

- (2)通过 BFS 确保了可靠度和可靠性指标精度随网格细分的逐级提高；

- (3)通过剪枝算法和线性内插策略极大降低抽样成本；

- (4)通过正负处理策略可以处理高度非线性的 PF；

- (5)对于 LSS 曲率连续的问题适用性极好，但对于 LSS 曲率非连续的情形需要进一步研究。

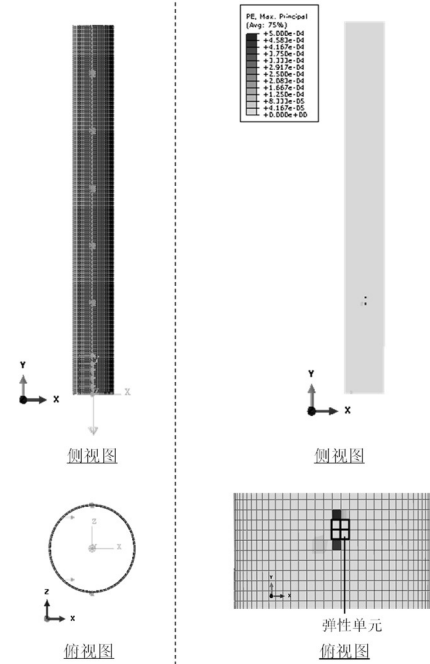


图 10 有限元模型及分析结果

Fig 10 Finite element model and analysis results

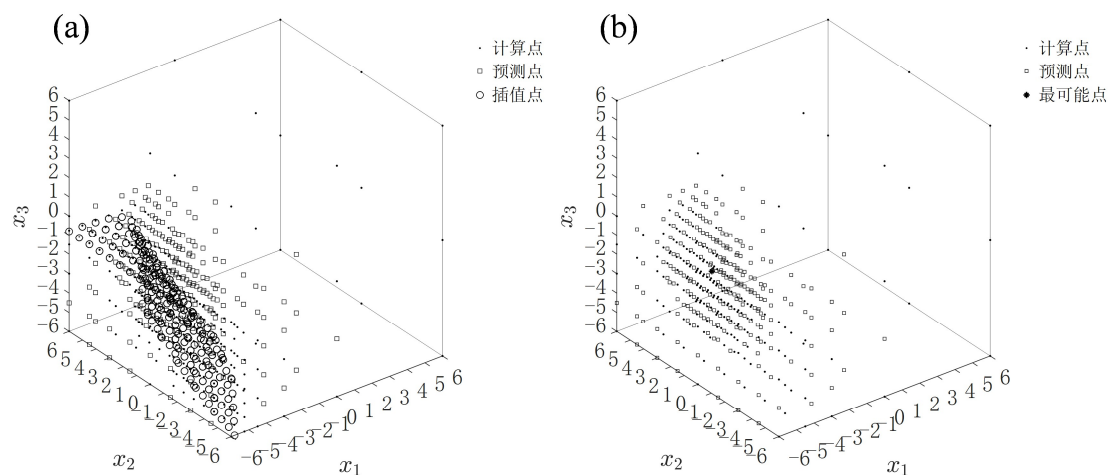


图 11 算法抽样图示: (a) RESAAG; (b) RIASAAG

Fig 10 Algorithmic sampling illustration: (a) RESAAG; (b) RIASAAG

### 参考文献

- [1] MELCHERS R E, BECK A T. Structural Reliability Analysis and Prediction[M]. John Wiley & Sons, 2018.
- [2] LIMON S, YADAV O P, LIAO H. A literature review on planning and analysis of accelerated testing for reliability assessment[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2017, 33(8): 2361-2383.
- [3] ZHAO Y G, ONO T. Moment methods for structural reliability[J]. Structural safety, 2001, 23(1): 47-75.
- [4] BAŽANT Z P, PANG S D. Mechanics-based statistics of failure risk of quasibrittle structures and size effect on safety factors[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2006, 103(25): 9434-9439.
- [5] ZOK F W. On weakest link theory and Weibull statistics[J]. Journal of the American Ceramic Society, 2017, 100(4): 1265-1268.
- [6] LUO W, BAŽANT Z P. Fishnet model for failure probability tail of nacre-like imbricated lamellar materials[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2017, 114(49): 12900-12905.
- [7] PAPAIOANNOU I, PAPADIMITRIOU C, STRAUB D. Sequential importance sampling for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2016, 62(6): 66-75.
- [8] MELCHERS R E. Structural system reliability assessment using directional simulation[J]. Structural Safety, 1994, 16(1): 23-37.
- [9] PARSONS V L. Stratified Sampling[M]. 1st ed. Wiley, 2017.
- [10] SHIELDS M D, ZHANG J. The generalization of Latin hypercube sampling[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2016, 148(12): 96-108.
- [11] ZHAO Y G, ONO T. Moment methods for structural reliability[J]. Structural Safety, 2001, 23(1): 47-75.
- [12] HALDAR A, MAHADEVAN S. First-Order and Second-Order Reliability Methods[M], Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications. Boston, MA: Springer US, 1995: 27-52.
- [13] 朱殿芳, 陈建康, 郭志学. 结构可靠度分析方法综述[J]. 中国农村水利水电, 2002(8): 47-49.
- [14] GAVIN H P, YAU S C. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2008, 30(2): 162-179.
- [15] GONG J X, YI P. A robust iterative algorithm for structural reliability analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(4): 519-527.
- [16] SHAYANFAR M A, BARKHORDARI M A,

- ROUDAK M A. A new effective approach for computation of reliability index in nonlinear problems of reliability analysis[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 60(12): 184-202.
- [17] ZHONG C, WANG M, DANG C, et al. Structural reliability assessment by salp swarm algorithm-based FORM[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(4): 1224-1244.
- [18] JING Z, CHEN J, LI X. RBF-GA: An adaptive radial basis function metamodeling with genetic algorithm for structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 189(3): 42-57.
- [19] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145-154.
- [20] CHENG K, LU Z. Adaptive Bayesian support vector regression model for structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 206: 107286.
- [21] XIAO S, OLADYSHKIN S, NOWAK W. Reliability analysis with stratified importance sampling based on adaptive Kriging[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 197: 106852.
- [22] ZHANG J, XIAO M, GAO L. An active learning reliability method combining Kriging constructed with exploration and exploitation of failure region and subset simulation[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 188: 90-102.
- [23] XIANG Z, BAO Y, TANG Z, et al. Deep reinforcement learning-based sampling method for structural reliability assessment[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 199: 106901.
- [24] MARELLI S, SUDRET B. An active-learning algorithm that combines sparse polynomial chaos expansions and bootstrap for structural reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2018, 75: 67-74.
- [25] BAO Y, XIANG Z, LI H. Adaptive subset searching-based deep neural network method for structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 213: 107778.
- [26] CHEN X, XU Z, WU Y, et al. Heuristic algorithms for reliability estimation based on breadth-first search of a grid tree[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 232: 109083.
- [27] HASOFER A M, LIND N C. Exact and Invariant Second-Moment Code Format[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1974, 100(1): 111-121.
- [28] Achintya Haldar. First-Order and Second-Order Reliability Methods[M]. *Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications*. Boston, MA: Springer US, 1995: 27-52[2024-02-21].
- [29] DITLEVSEN O, MADSEN H O. *Structural reliability methods: Vol. 178*[M]. Wiley New York, 1996.
- [30] XIANG Z, BAO Y, TANG Z, et al. Deep reinforcement learning-based sampling method for structural reliability assessment[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 199: 106901.
- [31] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145-154.
- [32] SHAYANFAR M A, BARKHORDARI M A, BARKHORI M, et al. An adaptive directional importance sampling method for structural reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2018, 70(11): 14-20.
- [33] ZHANG J, XIAO M, GAO L. An active learning reliability method combining Kriging constructed with exploration and exploitation of failure region and subset simulation[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 188: 90-102.

- [34] ZHONG C, WANG M, DANG C, et al. Structural reliability assessment by salp swarm algorithm–based FORM[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(4): 1224-1244.
- [35] ROUBOS A, PETERS D J, GROENEWEGEN L, et al. Partial safety factors for berthing velocity and loads on marine structures[J]. *Marine Structures*, 2018, 58(11): 73-91.